Matematická indukce

V čtvrté sérii se budeš potýkat s problémy, které lze řešit pomocí principu matematické indukce. Co se skrývá za tímto vzletným názvem? Je to druh důkazu, který se hodí, když potřebujeme dokázat tvrzení tvaru „Pro každé n přirozené platí $T(n)$“, kde $T(n)$ je nějaké tvrzení o čísle n.

Myšlenkou je dokázat nejprve, že platí $T(1)$ (to obvykle jde snadno), a pak ukázat, že pokud platí $T(n)$ pro všechna $n \leq k$, tak platí i $T(k+1)$ (obvykle stačí ukázat implikaci $T(k) \Rightarrow T(k+1)$). Pokud se s indukcí setkáváš poprvé, asi ti tento postup nepřijde příliš intuitivní. Zkus si to představovat tak, že platnost tvrzení ověřuješ postupně pro $T(1)$, potom z platnosti $T(1)$ umíš ukázat platnost $T(2)$, z platnosti $T(1), T(2)$ platnost $T(3)$ a tak dále. Postupně vlastně ukážeš, že platí $T(1), T(2), T(3), \ldots$, přičemž žádné přirozené číslo nevynecháš.

Kroku, kdy dokazuješ $T(1)$, se říká první indukční krok, dokazování $T(k+1)$ z platnosti $T(n), n \leq k$ druhý indukční krok (pro jistotu připomínáme, že druhý krok musíš provádět pro obecné $k \in \mathbb{N}$, ale můžeš si pomoci tvrzeními $T(n)$).

Zkusme to říct ještě jinak: Řekněme, že nějaká množina M obsahuje číslo 1 a že s každým číslem, které obsahuje, obsahuje také číslo o jedna vyšší. Potom protože M obsahuje jedničku, obsahuje i dvojku. Protože ale obsahuje dvojku, obsahuje následně i trojku a tak dále. Tím dostaneme, že M obsahuje všechna přirozená čísla.

Zkusme si to na příkladě: Ukážeme si, že $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (tato rovnost pro dané n je právě naše tvrzení $T(n)$) pro každé n přirozené.

První krok: Tvrzení $T(1)$ vypadá jako $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$, což jistě platí.

Druhý krok: Předpokládejme, že platí $T(n)$ pro všechna $n \leq k$ (číslo k nám zadává „nepřítel“). Chceme ukázat, že $T(k+1)$ je pravda. Můžeme si vypomoci tvrzením $T(k)$, které zní:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Přičteme tedy na obě strany této rovnosti číslo $k+1$ a upravujme:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \end{aligned}.$$

Ale to je přesně tvrzení $T(k+1)$. Jsme tedy hotovi.

Ještě si ukážeme příklad na netriviální použití matematické indukce. *Úplný graf na m vrcholech* budeme říkat množině m bodů (vrcholů), přičemž mezi každými dvěma vede čára (hrana). Obarvený graf pro nás bude úplný graf, jehož hrany mají dvě barvy (kreslíme čáry červenou a žlutou pastelkou).

Ukážeme teď, že pro každé přirozené l existuje přirozené číslo $R(l)$ (zvané Rameseyovo číslo) takové, že když vezmeme $m \geq R(l)$, tak v každém obarveném grafu na m vrcholech najdeme množinu V vrcholů velikosti l takovou, že všechny hrany spojující vrcholy z V mají stejnou barvu (jsou buď všechny červené, nebo všechny žluté).

Důkaz provedeme samozřejmě indukcí, ale použijeme trik: Označme pro $p, q \in \mathbb{N}$ jako $R(p,q)$ nejmenší počet vrcholů potřebný k tomu, abychom v každém obarveném grafu na $R(p,q)$ vrcholech našli p vrcholů spojených jen červenými hranami nebo q vrcholů spojených jen žlutými hranami. Zjevně $R(l) = R(l,l)$. Ukážeme, že $R(p,q)$ jsou konečná čísla, indukcí (pozor!) podle $n = p + q$ (protože $n \geq 2$, začínáme indukci tentokrát od dvojky místo od jedničky).

Než začneme, všimněme si, že $R(1,q) = R(p,1) = 1$, protože stačí vybrat jeden libovolný vrchol (o hrany se pak nemusíme starat).

První krok: Pokud $n = 2$, je $p = 1, q = 1$ a víme, že $R(1,1) = 1$.

Druhý krok: Nechť jsou všechna $R(p,q)$ dobře definovaná pro $p+q \le k$ a mějme $p+q = k+1$. Protože případy $p = 1$ a $q = 1$ jsou jednoduché, můžeme předpokládat $p, q > 1$. Ukážeme, že pak platí $R(p,q) \le R(p-1,q) + R(p,q-1)$, tedy že $R(p-1,q) + R(p,q-1)$ vrcholů nám stačí (což už bude znamenat, že $R(p,q)$ je konečné).

Mějme obarvený graf na $R(p-1,q) + R(p,q-1)$ vrcholech. Vyberme si v něm libovolný vrchol v a uvažme množiny $V_{č}$ a $V_{ž}$ vrcholů spojených s v červenými a žlutými hranami. Protože $|V_{č}| + |V_{ž}| + 1 = R(p-1,q) + R(p,q-1)$, je buď $|V_{č}| \ge R(p-1,q)$ nebo $|V_{ž}| \ge R(p,q-1)$ (rozmysli si). Bez újmy na obecnosti ať nastane první případ. Potom v podgrafu na vrcholech $V_{č}$ buď najdeme celožlutou množinu velikosti q (a vyhráváme) nebo v něm najdeme celočervenou množinu velikosti $p-1$. K té ovšem stačí přidat vrchol v, abychom našli celočervenou množinu o p vrcholech.

Literatura

Pokud si o indukci chceš přečíst víc, doporučujeme Ti poohlédnout se po textech z edice Škola mladých matematiků.

Rudolf Výborný: *Matematická indukce*, Škola mladých matematiků 6.
Antonín Vrba: *Princip matematické indukce*, Škola mladých matematiků 40.

4th series

Topic:	Mathematical Induction
Date due:	January 8th 2007

PROBLEM 1 (3 POINTS)

Prove that for any natural number n it is

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1)2^n + 1.$$

PROBLEM 2 (3 POINTS)

Prove that for any integer $n \ge 3$ it is $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{1}{4}n^2$.

PROBLEM 3 (3 POINTS)

Let x be a real number and $x + \frac{1}{x}$ an integer. Prove that $x^n + x^{-n}$ is an integer for any natural n.

PROBLEM 4 (5 POINTS)

Prove that among any 201 different integers with absolute values less than 199 you can always find three such that their sum is zero.

PROBLEM 5 (5 POINTS)

For a given natural $n \ge 2$ we will write out all fractions in the form $\frac{1}{p \cdot q}$, where numbers p, q are coprime and satisfy the condition: $0 < p < q \le n$, $p + q > n$. Prove that the sum of all such fractions equals $\frac{1}{2}$.

PROBLEM 6 (5 POINTS)

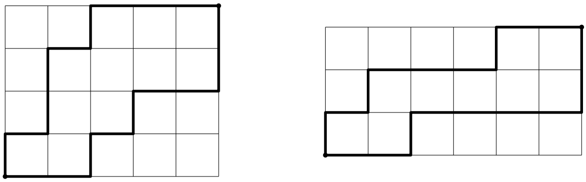
Prove that for any natural n there exists a number with decimal notation containing only the digits 1, 2 which is divisible by 2^n.

PROBLEM 7 (5 POINTS)

Let X be a set containing $\binom{2k-4}{k-2}+1$ real numbers, $k \geq 2$. Prove that there exists an ascending or descending sequence $\{x_i\}_{i=1}^{k}$ of numbers from X such that $|x_{i+1}-x_1| \geq 2|x_i - x_1|$ for all $i \in \{2,\ldots,k-1\}$.

PROBLEM 8 (5 POINTS)

We define shape of size n as a couple of paths of length n in a square grid, such that the paths go only upwards or rightwards and cross only at the beginning and at the end (see the picture showing two shapes of size 9).



Prove that for any n there exist exactly $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ different shapes of size n (shapes differing just by the placement of their starting points are not considered different).

Serie N. 4

Thema: Die mathematische Induktion

Termin der Absendung: 8. JANUAR 2007

AUFGABE N. 1 (3 PUNKTE)

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Beweisen Sie:

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1)2^n + 1.$$

AUFGABE N. 2 (3 PUNKTE)

Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie: $\sqrt{3}+\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{n} < \frac{1}{4}n^2$.

AUFGABE N. 3 (3 PUNKTE)

Sei x eine reelle Zahl, so dass $x + \frac{1}{x}$ eine ganze Zahl ist. Beweisen Sie, dass so auch $x^n + x^{-n}$ eine ganze Zahl ist (für n natürlich).

AUFGABE N. 4 (5 PUNKTE)

Unter 201 verschiedenen ganzen Zahlen mit einem Absolutbetrag kleiner als 199 findet man immer drei solche, deren Summe gleich Null ist. Beweisen Sie.

AUFGABE N. 5 (5 PUNKTE)

Sei n eine fest gegebene natürliche Zahl, $n \geq 2$. Schreiben wir jetzt alle Brüche der Form $\frac{1}{p \cdot q}$ aus, wobei p und q teilerfremde natürliche Zahlen sind, so dass $0 < p < q \leq n$, $p + q > n$ gilt. Beweisen Sie, dass die Summe aller dieser Brüche $\frac{1}{2}$ ist.

AUFGABE N. 6 (5 PUNKTE)

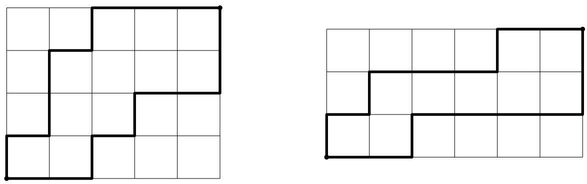
Beweisen Sie, dass es für jede natürliche Zahl eine Zahl gibt, deren Notation im Dezimalsystem nur die Zifren 1,2 enthält und die durch 2^n teilbar ist.

AUFGABE N. 7 (5 PUNKTE)

Sei X eine Menge, die $\binom{2k-4}{k-2} + 1$ reelle Zahlen enthält, $k \geq 2$. Beweisen Sie, dass es so entweder eine streng monoton steigende oder streng monoton fallende Zahlenfolge $\{x_i\}_{i=1}^{k}$ der Zahlen aus X gibt, so dass $|x_{i+1} - x_1| \geq 2|x_i - x_1|$ für alle $i \in \{2, \ldots, k-1\}$.

AUFGABE N. 8 (5 PUNKTE)

Als eine Figur der Größe n bezeichnen wir ein Paar der Wege in einem Quadratnetz, die nur aufwärts oder rechts verlaufen und sich nur am Anfang und am Ende schneiden (sehe das Bild, auf welchem zwei solche Figuren der Größe 9 abgebildet sind).



Beweisen Sie, dass es genau $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ verschiedene Figuren der Größe n gibt. (Verschobene Figuren betrachten wir als identisch, d.h. wir zählen sie nur einmal).

La 4. série

Sujet: Induction mathématique

Date d'expedition: 8 JANVIER 2007

PROBLÈME 1 (3 POINTS)

Démontrez que pour tous nombres naturels n

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1)2^n + 1.$$

PROBLÈME 2 (3 POINTS)

Démontrez que pour tous nombres naturels $n \geq 3$ il est $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{1}{4}n^2$.

PROBLÈME 3 (3 POINTS)

Soit x un nombre réel et $x + \frac{1}{x}$ un nombre entier. Démontrez que $x^n + x^{-n}$ est même un nombre entier pour tous n naturels.

PROBLÈME 4 (5 POINTS)

Démontrez que entre quelconques 201 nombres entiers différentes dont la valeur absolue est plus petite que 199, on peut toujours trouver 3 dont la somme et 0.

PROBLÈME 5 (5 POINTS)

Soit n un nombre naturel fixe tel que $n \geq 2$. On écrit toutes fractions en forme $\frac{1}{p \cdot q}$ où p et q sont les nombres premiers entre eux qui satisfaient les conditions $0 < p < q \leq n$, $p + q > n$. Démontrez que la somme de toutes ces fractions fait $\frac{1}{2}$.

PROBLÈME 6 (5 POINTS)

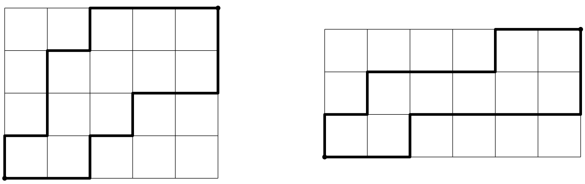
Démontrez que pour chaque n naturel, il existe un nombre dont la notation au système décimal ne contient que les chiffres 1 et 2 et qui est divisible par 2^n.

PROBLÈME 7 (5 POINTS)

Soit X un ensemble qui contient $\binom{2k-4}{k-2}+1$ nombres réels, $k \geq 2$. Démontrez qu'il existe une suite croissante ou décroissante $\{x_i\}_{i=1}^{k}$ de nombres du ensemble X telle que $|x_{i+1} - x_1| \geq 2|x_i - x_1|$ pour chaque $i \in \{2, \ldots, k-1\}$.

PROBLÈME 8 (5 POINTS)

Définissons une figure de valeur n comme un couple de routes de longeur n au résseau carré qui ne vont qu'a droit et en haut et qui se ne coupe qu'au début et à la fin (voir l'image où on peut voir deux figures de valeur 9).



Démontrez qu'il existe juste $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ figures différentes de valeur n (les figures poussées ne sont pas comptées comme différentes).

4. série

Téma: Matematická indukce

Datum odeslání: 8. LEDNA 2007

1. ÚLOHA (3 BODY)

Dokažte, že pro každé přirozené n platí:

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1)2^n + 1.$$

2. ÚLOHA (3 BODY)

Dokažte, že pro každé přirozené $n \geq 3$ platí:

$$\sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{1}{4}n^2.$$

3. ÚLOHA (3 BODY)

Nechť x je reálné a $x + \frac{1}{x}$ celé. Dokažte, že potom i $x^n + x^{-n}$ je celé pro všechna n přirozená.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že mezi libovolnými 201 různými celými čísly v absolutní hodnotě menšími než 199 se vždy najdou tři, jejichž součet je nula.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Pro dané přirozené $n \geq 2$ vypíšeme všechny zlomky tvaru $\frac{1}{p \cdot q}$, kde čísla p, q jsou nesoudělná a navíc splňují podmínky: $0 < p < q \leq n$, $p + q > n$. Dokažte, že součet všech takovýchto zlomků je roven $\frac{1}{2}$.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje číslo, jehož dekadický zápis obsahuje jen cifry 1, 2, a které je dělitelné 2^n.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

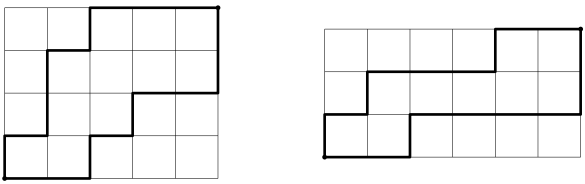
Nechť X je množina obsahující $\binom{2k-4}{k-2} + 1$ reálných čísel, $k \geq 2$. Dokažte, že existuje rostoucí nebo klesající posloupnost $\{x_i\}_{i=1}^k$ čísel z X taková, že

$$|x_{i+1} - x_1| \geq 2|x_i - x_1|$$

pro všechna $i \in \{2, \ldots, k-1\}$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Definujme obrazec velikosti n jako dvojici cest délky n ve čtvercové síti, které jdou pouze nahoru nebo doprava a protínají se pouze na začátku a na konci (viz obrázek, kde jsou znázorněny dva obrazce velikosti 9).



Dokažte, že pro každé n existuje přesně $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ různých obrazců velikosti n (posunuté obrazce nepovažujeme za různé).

Řešení 4. série

1. úloha

Dokažte, že pro každé přirozené n platí:

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1)2^n + 1.$$

Tvrzení dokážeme matematickou indukcí podle n.

V prvním indukčním kroku (pro $n = 1$) máme ověřit, že $1 \cdot 2^0 = (1-1) \cdot 2^1 + 1$. Rovnost nastává, jelikož jsou oba výrazy rovny 1.

V druhém indukčním kroku budeme dokazovat, že tvrzení platí pro $n > 1$. Přitom můžeme předpokládat, že tvrzení platí pro $n - 1$ (indukční předpoklad). Nyní už jen upravujme (v první úpravě využíváme indukčního předpokladu):

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1} =$$
$$= (n-2)2^{n-1} + 1 + n2^{n-1} = (2n-2)2^{n-1} + 1 = (n-1)2^n + 1,$$

což jsme chtěli dokázat.

2. úloha

Dokažte, že pro každé přirozené $n \geq 3$ platí:

$$\sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{1}{4}n^2.$$

Tvrzení dokážeme matematickou indukcí podle n.

V prvním indukčním kroku (pro $n = 3$) máme ověřit, že $\sqrt{3} < \frac{1}{4}3^2$. Nerovnost je splněna, jelikož $\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2 < \frac{9}{4}$. Ještě nerovnost ověříme[1] pro $n = 4$. Máme dokázat, že $\sqrt{3}+\sqrt{4} < \frac{1}{4}4^2$. Přitom $\sqrt{3} + \sqrt{4} < 2\sqrt{4} = \frac{1}{4}4^2$.

V druhém indukčním kroku budeme dokazovat, že tvrzení platí pro $n \geq 5$. Přitom můžeme předpokládat, že tvrzení platí pro $n - 1$ (indukční předpoklad). Nyní už jen upravujme (v první úpravě využíváme indukčního předpokladu):

$$\sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n} < \frac{1}{4}(n-1)^2 + \sqrt{n} = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} + \sqrt{n} \leq$$
$$\leq \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{20}n + \sqrt{n} = \frac{1}{4}n^2 - \sqrt{n}\left(\frac{9}{20}\sqrt{n} - 1\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{4}n^2 - \sqrt{n}\left(\frac{9}{20}\sqrt{5} - 1\right) = \frac{1}{4}n^2 - \frac{\sqrt{81}\sqrt{5} - 20}{20}\sqrt{n} <$$
$$< \frac{1}{4}n^2 - \frac{\sqrt{80}\sqrt{5} - 20}{20}\sqrt{n} = \frac{1}{4}n^2 - \frac{20-20}{20} = \frac{1}{4}n^2,$$

což jsme chtěli dokázat (ve všech „$\leq$“ nerovnostech jsme využívali toho, že $n \geq 5$).

3. úloha

Nechť x je reálné a $x + \frac{1}{x}$ celé. Dokažte, že potom i $x^n + x^{-n}$ je celé pro všechna n přirozená.

Nejprve uděláme první indukční krok, kterým ověříme, že tvrzení platí pro $n = 1, 2$.

Pro $n = 1$ je platnost evidentní, nechť tedy $n = 2$:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2,$$

[1] V úloze byl drobný chyták v tom, že druhý indukční krok funguje až pro $n \geq 5$.

jelikož $x + \frac{1}{x}$ je dle předpokladu celé číslo, je i $x^2 + \frac{1}{x^2}$ číslo celé.

Přejděme k druhému indukčnímu kroku. Ukážeme, že za předpokladu, že čísla $x^n + x^{-n}$ a $x^{n-1} + x^{-(n-1)}$ jsou celá, je celé i číslo $x^{n+1} + x^{-(n+1)}$.

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) + \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

Vidíme, že číslo $x^{n+1} + x^{-(n+1)}$ je celé, neboť číslo $x + \frac{1}{x}$ je celé z předpokladu tvrzení a čísla $x^n + x^{-n}$, $x^{n-1} + x^{-(n-1)}$ jsou celá z indukčního předpokladu.

4. úloha

Dokažte, že mezi libovolnými 201 různými celými čísly v absolutní hodnotě menšími než 199 se vždy najdou tři, jejichž součet je nula.

Dokážeme obecnější tvrzení: mezi libovolnými k různými celými čísly v absolutní hodnotě menšími než $k-2$ se vždy najdou tři, jejichž součet je nula.

Nechť $k = 5$, čísla v absolutní hodnotě menší než 3 jsou: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Evidentně se mezi nimi najdou tři, jejichž součet je nula.

Indukční krok: jestliže v libovolných k číslech z $\{k-3, \dots, 0, \dots, -k+3\}$ (označme tuto množinu A), existuje trojice, jejíž součet je nula, pak v libovolných $k+1$ číslech (označme množinu těchto $k+1$ čísel J) z $B = \{k-2, \dots, 0, \dots, -k+2\}$ existuje trojice čísel, jejichž součet je rovněž nula. Mohou nastat následující případy:

(i) Pokud množina J obsahuje nejvýše jeden z prvků $k-2$, $2-k$, potom obsahuje k čísel z množiny A. Mezi těmito čísly je z indukčního předpokladu hledaná trojice.

(ii) $J = \{k-2, 2-k, \underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}_{k-1 \text{ prvků množiny } A}\}$, je-li v $k-1$ prvcích z množiny A obsažena nula, tvoří $\{k-2, 0, 2-k\}$ hledanou trojici, v opačném případě ukážeme, že jsou v $k-1$ prvcích množiny A dva takové, jejichž součet je buď $k-2$ nebo $2-k$. Rozdělíme čísla množiny A do několika skupin. Pro $\frac{1}{2}(k-3) \geq j \geq 1$ budeme mít skupiny $S_j = \{j, k-2-j\}$. Pro $1 \geq j \geq -\frac{1}{2}(k-3)$ budeme mít skupiny $S_j = \{j, -(k-2)-j\}$. Pro větší názornost vypíšeme dvojice patřící do skupiny $S_j = \{j, k-2-j\}$:

$$\begin{array}{llll} k \text{ liché:} & (1, k-3) & k \text{ sudé:} & (1, k-3) \\ & (2, k-4) & & (2, k-4) \\ & \vdots & & \vdots \\ & \left(\frac{k-3}{2}, \frac{k-1}{2}\right) & & \left(\frac{k-4}{2}, \frac{k}{2}\right) \end{array}$$

Je-li k liché, máme $k-3$ skupin a těmi pokryjeme všechna nenulová čísla množiny A. Jelikož máme k dispozici $k-1$ čísel z A, musí být nějaká dvě ve stejné skupině, jejich součet pak je $k-2$ nebo $-(k-2)$.

Je-li k sudé, máme $k-4$ skupin, nicméně čísla $\frac{k-2}{2}$, $-\frac{k-2}{2}$ nenáleží žádné skupině. Tedy $k-3$ ($k-1$ čísel je z množiny A, od tohoto počtu je však potřeba odečíst dvojku za čísla $\frac{k-2}{2}$, $-\frac{k-2}{2}$) čísel náleží do zmiňovaných $k-4$ skupin. Odtud plyne, že nějaká dvě čísla náleží stejné skupině, a opět je pak jejich součet $k-2$ nebo $-(k-2)$.

Důkazem obecnějšího tvrzení jsme automaticky vyřešili zadanou úlohu, která je jen speciálním případem pro $k = 201$.

5. úloha

Pro dané přirozené $n \geq 2$ vypíšeme všechny zlomky tvaru $\frac{1}{p \cdot q}$, kde čísla p, q jsou nesoudělná a navíc splňují podmínky: $0 < p < q \leq n$, $p + q > n$. Dokažte, že součet všech takovýchto zlomků je roven $\frac{1}{2}$.

Pro $n = 2$, je tvrzení zřejmé. Jediný zlomek splňující zadané podmínky je $\frac{1}{2}$.

Chceme ukázat, že když tvrzení platí pro n, platí i pro $n + 1$. Co se stane, když zvýšíme n o 1? Do množiny zlomků splňujících podmínky přibudou ty, pro něž $q = n + 1$, přičemž $\operatorname{nsd}(p, q) = \operatorname{nsd}(p, n + 1) = 1$ ($\operatorname{nsd}(a, b)$ značí největšího společného dělitele čísel a, b), na druhou stranu z ní vypadnou ty, pro něž $p + q = n + 1$ a $\operatorname{nsd}(p, n + 1 - p) = 1$. Poslední podmínka je ekvivalentní s $\operatorname{nsd}(p, n + 1) = 1$. Jak se to promítne do součtů?

Přibude:

$$\sum_{\substack{1 \leq p < n+1 \\ \operatorname{nsd}(p,n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1)},$$

odpadne:

$$\sum_{\substack{1 \leq p < n+1-p \\ \operatorname{nsd}(p,n+1)=1}} \frac{1}{(n+1-p)p}.$$

Stačí nám ukázat, že se předchozí dvě sumy rovnají, tedy:

$$\sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ \operatorname{nsd}(p,n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1)} - \sum_{\substack{1 \leq p \leq n-p \\ \operatorname{nsd}(p,n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1-p)} =$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq p \leq n-p \\ \operatorname{nsd}(p,n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1)} + \sum_{\substack{n-p+1 \leq p \leq n \\ \operatorname{nsd}(p,n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1)} - \sum_{\substack{1 \leq p \leq n-p \\ \operatorname{nsd}(p,n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1-p)} =$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq p \leq n-p \\ \operatorname{nsd}(p,n+1)=1}} \left(\frac{1}{p(n+1)} - \frac{1}{p(n+1-p)} \right) + \sum_{\substack{n-p+1 \leq p \leq n \\ \operatorname{nsd}(p,n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1)} =$$

$$= - \sum_{\substack{1 \leq p \leq n-p \\ \operatorname{nsd}(p,n+1)=1}} \frac{1}{(n+1)(n+1-p)} + \sum_{\substack{n-p+2 \leq p \leq n \\ \operatorname{nsd}(p,n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1)}.$$

V poslední úpravě se v druhé sumě podmínka $n - p + 1 \leq p \leq n$, $\operatorname{nsd}(p, n + 1) = 1$ změnila na podmínku $n - p + 2 \leq p \leq n$, $\operatorname{nsd}(p, n + 1) = 1$. Tyto dvě podmínky jsou ekvivalentní, jelikož kdyby $n - p + 1 = p$, potom $n + 1 = 2p$, odkud $\operatorname{nsd}(p, n + 1) \neq 1$.

Nyní začneme upravovat druhou sumu posledního výrazu, postupně ji doupravujeme na první sumu, čímž dostaneme, že součet těchto sum je nulový. V první úpravě použijeme přeindexování $r = (n + 1) - p$ (tedy $p = (n + 1) - r$).

$$\sum_{\substack{n-p+2 \leq p \leq n \\ \operatorname{nsd}(p,n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1)} = \sum_{\substack{r+1 \leq (n+1)-r \leq n \\ \operatorname{nsd}(n+1-r,n+1)=1}} \frac{1}{(n+1-r)(n+1)} =$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq r \leq n-r \\ \operatorname{nsd}(n+1-r,n+1)=1}} \frac{1}{(n+1-r)(n+1)} = \sum_{\substack{1 \leq r \leq n-r \\ \operatorname{nsd}(r,n+1)=1}} \frac{1}{(n+1-r)(n+1)}.$$

V poslední úpravě jsme využili toho, že $\mathrm{nsd}(n+1-r, n+1) = 1$, právě když $\mathrm{nsd}(-r, n+1) = 1$, neboli $\mathrm{nsd}(r, n+1) = 1$. (Pokud ses v tomhle formálním přeindexování ztratil, nevadí, stačí si povšimnout, že první člen první sumy je poslední člen sumy druhé, druhý člen první sumy je předposlední člen sumy druhé ... (ovšem pořád za podmínky $\mathrm{nsd}(p, n+1) = 1$).)

Tímto jsme ukázali, že součet zlomků splňujících zadané podmínky je $\frac{1}{2}$, neboť to tak je pro $n = 2$ a při zvýšení n o 1 (a tedy i o libovolné jiné přirozené číslo) se součet díky rovnosti sum nezmění.

6. úloha

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje číslo, jehož dekadický zápis obsahuje jen cifry 1, 2, a které je dělitelné 2^n.

Ukážeme trošičku silnější tvrzení: pro každé n přirozené existuje číslo, jehož dekadický zápis je dělitelný 2^n a má délku n – označme dekadický zápis tohoto čísla A_n.

Případ $n = 1$ je triviální, neb $A_1 = 2$ a $2^1 | A_1$.

Indukční krok: Z existence A_n takového, že $2^n | A_n$ ukážeme existenci čísla A_{n+1} takového, že $2^{n+1} | A_{n+1}$.

Rozlišme dvě možnosti:

(i) $2^{n+1} | A_n$: zvolme $A_{n+1} = \overline{2A_n}$, tedy $A_{n+1} = \overline{2A_n} = 2 \cdot 10^n + A_n = 2^{n+1} \cdot 5^n + A_n$, což je dělitelné 2^{n+1}, neboť $2^{n+1} | A_n$. (Ta rovná čára znamená zápis čísla po cifrách – v našem konkretním případě tedy to, že před číslo A_n jsme napsali dvojku, čímž vzniklo číslo o $n+1$ cifrách.)

(ii) $2^{n+1} \nmid A_n$: zvolme $A_{n+1} = \overline{1A_n}$, tedy $A_{n+1} = \overline{1A_n} = 1 \cdot 10^n + A_n = 2^n \cdot 5^n + k \cdot 5^n = 2^n(5^n + k)$, což je dělitelné 2^{n+1}, neboť k je liché číslo ($2^n | A_n$ a zároveň $2^{n+1} \nmid A_n$) a součet dvou lichých čísel je číslo sudé.

7. úloha

Nechť X je množina obsahující $\binom{2k-4}{k-2} + 1$ reálných čísel, $k \geq 2$. Dokažte, že existuje rostoucí nebo klesající posloupnost $\{x_i\}_{i=1}^k$ čísel z X taková, že

$$|x_{i+1} - x_1| \geq 2|x_i - x_1|$$

pro všechna $i \in \{2, \ldots, k-1\}$.

Dokážeme obecnější tvrzení[2]: Nechť $k, l \geq 2$ a nechť X je množina obsahující $\binom{k+l-4}{k-2} + 1$ reálných čísel. Potom X obsahuje buď rostoucí posloupnost $\{x_i\}_{i=1}^k$ různých prvků z X (délky k) splňující

$$\forall i \in \{2, 3, \ldots, k-1\}: \ |x_{i+1} - x_1| \geq 2|x_i - x_1|$$

nebo klesající posloupnost $\{x_i\}_{i=1}^l$ různých prvků z X (délky l) splňující

$$\forall i \in \{2, 3, \ldots, l-1\}: \ |x_{i+1} - x_1| \geq 2|x_i - x_1|.$$

Tvrzení dokážeme indukcí podle $k+l$. V případě, že $k = 2$ nebo $l = 2$ je tvrzení zřejmé (první indukční krok).

[2]Tato úloha, včetně řešení, byla převzata ze soutěže IMC.

Nyní provedeme druhý indukční krok, $k, l > 2$. Nechť a je nejmenší prvek množiny X a b je největší prvek množiny X. Označíme

$$X_{\text{malá}} = \left\{x \in X; x \leq \frac{a+b}{2}\right\} \text{ a } X_{\text{velká}} = \left\{x \in X; x > \frac{a+b}{2}\right\}.$$

Jelikož

$$\binom{k+l-4}{k-2} = \binom{k+(l-1)-4}{k-2} + \binom{(k-1)+l-4}{(k-1)+2},$$

dostáváme, že

$$|X_{\text{malá}}| \geq \binom{(k-1)+l-4}{(k-1)-2} + 1 \text{ nebo } |X_{\text{velká}}| \geq \binom{k+(l-1)-4}{k-2} + 1.$$

V případě, že nastane první možnost, užitím indukčního předpokladu dostáváme, že X obsahuje buď klesající posloupnost délky l požadovaných vlastností (a jsme hotovi), nebo rostoucí $\{x_i\}_{i=1}^{k-1}$ posloupnost délky $k-1$ požadovaných vlastností. Zvolíme-li $x_{k+1} = b$, dostaneme hledanou posloupnost.

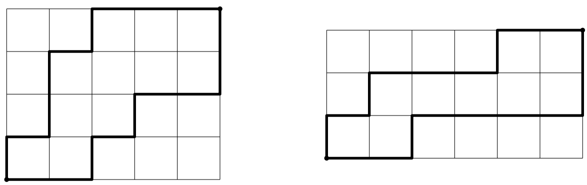
Podobným způsobem se vyřeší případ

$$|X_{\text{velká}}| \geq \binom{k+(l-1)-4}{k-2} + 1.$$

Tím je obecnější tvrzení dokázáno a k vyřešení úlohy už stačí zvolit $k = l$.

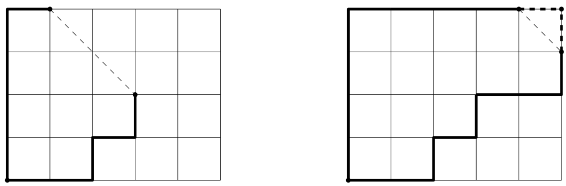
8. úloha

Definujme obrazec velikosti n jako dvojici cest délky n ve čtvercové síti, které jdou pouze nahoru nebo doprava a protínají se pouze na začátku a na konci (viz obrázek, kde jsou znázorněny dva obrazce velikosti 9).



Dokažte, že pro každé n existuje přesně $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ různých obrazců velikosti n (posunuté obrazce nepovažujeme za různé).

Zkusme počítat něco trochu obecnějšího: Počet k-otevřených obrazců velikosti n. Jde o dvojice cest délky n, které jdou jen nahoru nebo doprava ze společného počátku, neprotínají se mimo počátek a jejich konce jsou od sebe vzdáleny přesně $\sqrt{2}k$ po úhlopříčce – viz obrázek vlevo.



Označme počet takových obrazců $b(n, k)$ a položíme $b(n, 0) = 0$ pro $n \geq 1$.[3] Počet hledaných obrazců velikost n ze zadání je roven $b(n-1, 1)$, stačí si představit, že obě cesty usekneme těsně před koncem jako na obrázku vpravo (rozmysli si).

Položíme $b(n, 0) = 0$ a pomocí matematické indukce ukážeme, že pro $n \geq k \geq 0, n \geq 1$ platí

$$b(n, k) = \frac{k}{n}\binom{2n}{n-k}.$$

Když to uděláme, budeme hotovi, protože dosazením dostaneme

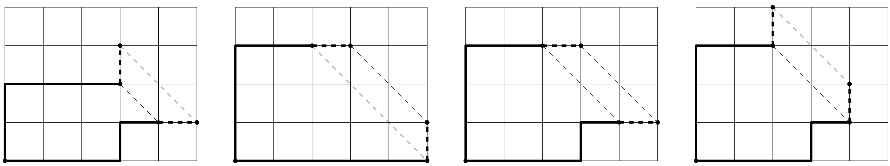
$$b(n-1, 1) = \frac{1}{n-1}\binom{2(n-1)}{n-2} = \frac{(2n-2))!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Zbývá tedy provést indukci podle n:

(i) Pro $n = 1$ máme jen dvě možnosti $b(1, 0) = 0$ a $b(1, 1) = 1$. Snadno dosazením ověříš, že vztah platí.

(ii) Nechť vztah platí pro $n - 1$. Číslo $b(n, k)$ spočteme s využitím rovnosti

$$b(n, k) = b(n-1, k-1) + 2b(n-1, k) + b(n-1, k+1).$$



Každý k-otevřený obrazec totiž můžeme dostat z právě jednoho nějakého $k+1, k$ nebo $(k-1)$-otevřeného obrazce velikosti n právě jedním způsobem. Přitom z k-otevřeného obrazce velikosti $n-1$ můžeme dostat dokonce dva k-otevřené obrazce velikosti n, zatímco pro $k+1, k-1$ máme jen jednu možnost. Celou úvahu ilustruje obrázek výše. Tím máme za sebou myšlenkově náročnou část důkazu, teď stačí už jen dosadit do vzorečku a neúnavně počítat s využitím znalosti, že $\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b-1}$ a indukčního předpokladu:

$$\begin{aligned}
b(n, k) &= b(n-1, k-1) + 2b(n-1, k) + b(n-1, k+1) = \\
&= \frac{k-1}{n-1}\binom{2n-2}{n-k} + 2\frac{k}{n-1}\binom{2n-2}{n-k-1} + \frac{k+1}{n-1}\binom{2n-2}{n-k-2} = \\
&= \frac{k-1}{n-1}\binom{2n-2}{n-k} + \frac{k-1}{n-1}\binom{2n-2}{n-k-1} + \frac{k+1}{n-1}\binom{2n-2}{n-k-1} + \frac{k+1}{n-1}\binom{2n-2}{n-k-2} = \\
&= \frac{k-1}{n-1}\binom{2n-1}{n-k} + \frac{k+1}{n-1}\binom{2n-1}{n-k-1} = \\
&= \frac{(k-1)(2n-1)!}{(n-1)(n-k)!(n+k-1)!} + \frac{(k+1)(2n-1)!}{(n-1)(n-k-1)!(n+k)!} = \\
&= \frac{2k(2n-1)!}{(n-k)!(n+k)!} = \frac{k}{n}\binom{2n}{n-k},
\end{aligned}$$

což je přesně ta rovnost, kterou jsme chtěli.

---

[3] Nezbláznili jsme se? Proč pokládat $b(n, 0) = 0$, když to vypadá jako přesně to číslo, co hledáme? Protože v definici výše jsme řekli, že v otevřeném obrazci se cesty *neprotínají mimo počátek* – tedy se cesty nemohou protínat na konci. Při počítání cest budeme používat rekurentní vztah, který této skutečnosti využívá. Občas cesta k řešení vede přes zkomplikování problému.