1. seriálová série

Téma: Neklasické logiky

Datum odeslání: 8. ledna 2007

1. Úloha

Předpokládejme, že místo obvyklých pravdivostních hodnot „pravda/nepravda“ budeme pracovat s následujícími čtyřmi pravdivostními hodnotami:

1: Mám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a nemám důvod si myslet, že je nepravdivý.
0: Mám důvod si myslet, že výrok je nepravdivý, a nemám důvod si myslet, že je pravdivý.
X: Mám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a mám také důvod si myslet, že je nepravdivý.
?: Nemám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, ani důvod si myslet, že je nepravdivý.

(a) Napiš tabulku pro negaci (tedy pro každou ze čtyř možných „pravdivostních hodnot“ výroku A urči, jakou hodnotu bude mít $\neg$A). (2 body)

(b) Zkus určit, jaké hodnoty může mít konjunkce $A \wedge B$ v následujících případech. Nezapomeň při tom na to, že v této logice nemusí pravdivostní hodnota $A \wedge B$ záviset pouze na pravdivostních hodnotách výroků A, B[1].

A	B	A$\wedge$ B
1	X	
1	?	
X	?	
0	X	

(3 body)

2. Úloha (5 bodů)

Podívej se na tabulku výrokové spojky, jejíž význam je „A a B jsou neslučitelné“. Tato spojka se obvykle nazývá „Shefferovo lomítko“.

A	B	A|B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Ukaž, že pomocí této jediné spojky lze vyjádřit všechny spojky výrokové logiky, tedy najdi formule, které obsahují pouze spojku | a jsou ekvivalentní s $\neg A$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $A \vee B$, $A \Leftrightarrow B$.

3. Úloha

(a) Zdůvodni, že hrají-li proponent i oponent dobře (tedy neudělají-li chybu), pak platí, že proponent vyhraje právě tehdy, když jeho tvrzení je pravdivé (a v opačném případě vyhraje

[1] Tedy $\wedge$ nemusí být extenzionální spojka.

oponent). Předpokládej, že oba hráči jsou vševědoucí – o každém výroku vědí, zda je pravdivý, nebo ne[2]. (3 BODY)

(b) V pravidlech pro hru chybí pravidla pro implikaci a pro ekvivalenci. My ale víme, že obě lze považovat jen za zkratku za formuli se spojkami $\neg$, $\wedge$ a $\vee$, pro které pravidla máme. Navrhni pravidlo pro hru s výrokem, který je implikací. (2 BODY)

Řešení 1. seriálové série

1. úloha

Předpokládejme, že místo obvyklých pravdivostních hodnot „pravda/nepravda" budeme pracovat s následujícími čtyřmi pravdivostními hodnotami:

1: Mám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a nemám důvod si myslet, že je nepravdivý.
0: Mám důvod si myslet, že výrok je nepravdivý, a nemám důvod si myslet, že je pravdivý.
X: Mám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, a mám také důvod si myslet, že je nepravdivý.
?: Nemám důvod si myslet, že výrok je pravdivý, ani důvod si myslet, že je nepravdivý.

(a) Napiš tabulku pro negaci (tedy pro každou ze čtyř možných „pravdivostních hodnot" výroku A urči, jakou hodnotu bude mít $\neg$A).

(b) Zkus určit, jaké hodnoty může mít konjunkce $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$ v následujících případech. Nezapomeň při tom na to, že v této logice nemusí pravdivostní hodnota $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$ záviset pouze na pravdivostních hodnotách výroků A, B[3].

A	B	A$\wedge$ B
1	X	
1	?	
X	?	
0	X	

(a) Negace. Mám-li důvod si myslet, že výrok A je nepravdivý, mám současně důvod si myslet, že jeho negace je pravdivá – vždyť od negace očekáváme právě to, že bude vyjadřovat tvrzení „Tvrzení A je nepravdivé." Jestliže například věřím, že $\pi = 3{,}1416$, protože je to tak napsáno v Matematicko-fyzikálních tabulkách, mám důvod věřit, že $\pi \neq 3{,}14159265358979323846264338$3.

Naopak, mám-li důvod si myslet, že výrok A je pravdivý, mám současně také důvod si myslet, že jeho negace je nepravdivá. Díky tomu by tabulka pro čtyřhodnotovou negaci měla vypadat takto:

A	$\neg$A
1	0
0	1
X	X
?	?

[2]Připomínáme, že v klasické logice každý výrok je buď pravdivý, nebo nepravdivý. Třetí možnost neexistuje.

[3]Tedy $\wedge$ nemusí být extenzionální spojka.

(b) Konjunkce. U konjunkce je situace o trošku zapeklitější, podívejme se ale nejprve na některé dílčí případy:

(i) Víme, že když je některý z výroků A, B nepravdivý, je také celý výrok $A \wedge B$ nepravdivý. Naopak, jistotu o tom, že výrok $A \wedge B$ je pravdivý, máme pouze tehdy, když víme, že oba výroky A i B jsou pravdivé.

Na základě těchto úvah můžeme formulovat následující dvě pravidla:

(ii) Mám-li nějaký důvod věřit, že výrok A je pravdivý, a také nějaký důvod věřit, že výrok B je pravdivý, tak mám důvod věřit, že jejich konjunkce je pravdivá. (Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota obou výroků buďto 1 nebo X.) Mám-li důvod věřit, že jeden z výroků A, B je nepravdivý, tak mám také důvod věřit, že jejich konjunkce je nepravdivá. (Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota některého z výroků A, B buďto 0 nebo X.)

Obrácením druhého pravidla dostaneme třetí pravidlo:

(iii) Pokud nemám důvod věřit, že výrok A je nepravdivý, ani nemám důvod věřit, že výrok B je nepravdivý, tak nemám důvod věřit, že výrok A a B je nepravdivý. (Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota obou výroků A, B buďto 1 nebo ?.)

Pokud se rozhodneme řídit se podle těchto pravidel, můžeme začít vyplňovat tabulku:

A	B	$A \wedge B$
1	X	X protože podle (i) mám důvod věřit, že $A \wedge B$ je pravdivý podle (ii) mám důvod věřit, že $A \wedge B$ je nepravdivý
1	?	podle (iii) nemám důvod věřit, že $A \wedge B$ je nepravdivý
X	?	podle (ii) mám důvod věřit, že $A \wedge B$ je nepravdivý
0	X	podle (ii) mám důvod věřit, že $A \wedge B$ je nepravdivý

Vidíme, že naše pravidla umožňují určit pravdivostní hodnotu v prvním řádku. Navíc říkají, jestli máme důvod věřit, že $A \wedge B$ je nepravdivý výrok.

Možná se ptáš, proč jsme neobrátili také první pravidlo – dostali bychom tak následující pravidlo:

(iv) Pokud nemám důvod věřit, že výrok A je pravdivý, nebo nemám důvod věřit, že výrok B je pravdivý, tak nemám důvod věřit, že $A \wedge B$ je pravdivý. (Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota některého z výroků A, B buďto 0 nebo ?.)

Pomocí tohoto pravidla bychom naši tabulku doplnili takto:

A	B	$A \wedge B$
1	X	X
1	?	?
X	?	0
0	X	0

Můžeme se ale rozhodnout pravidlo iv) nepřijmout a být raději optimističtí[4]:

(iv') Když mám důvod věřit, že výrok A je pravdivý, budu to považovat za důvod věřit, že konjunkce $A \wedge B$ je pravdivá. (Mohu argumentovat třeba takhle: už vím, že (aspoň půlka) výroku $A \wedge B$ je pravdivá.)[5]

[4]Ve skutečnosti je toto řešení spíše naivní než optimistické: uvěříme skoro všemu, co nám kdo napovídá.

[5]Pravidlo iv) tedy přijmeme jen ve slabším znění: Pokud nemám důvod věřit, že výrok A je

V tom případě bychom tabulku doplnili takto:

A	B	$A \wedge B$
1	X	X
1	?	1
X	?	X
0	X	X

Vidíme, že při vyplňování druhého až čtvrtého řádku si můžeme vybrat, zda budeme pesimističtí (raději nebudeme konjunkci $A \wedge B$ věřit, pokud pro to nemáme **opravdu pádné** důvody), nebo optimističtí (pokud první tři pravidla neurčují jasně, zda konjunkci věřit či ne, prostě jí uvěříme). Čtvrté pravidlo bychom mohli zformulovat ještě alespoň jedním způsobem:

(iv") Když mám důvod věřit, že jeden z výroků je pravdivý, a nemám důvod věřit, že druhý výrok je nepravdivý, budu to považovat za důvod věřit, že konjunkce je pravdivá. (Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota jednoho z výroků A, B buďto 1 nebo X a pravdivostní hodnota druhého je 1, X nebo ?.)

A	B	$A \wedge B$
1	X	X
1	?	1
X	?	X
0	X	0

Asi bychom dokázali vymyslet ještě další verze čtvrtého pravidla. Můžeme také říci, že v těchto případech nelze pravdivostní hodnotu výroku $A \wedge B$ určit pouze na základě pravdivostních hodnot výroků A a B.

Ukažme si na příkladu třetího řádku, za jakých okolností může být na místě optimistické a pesimistické uvažování. V obou případech budeme uvažovat větu „Rodina Černých si koupila nové auto a paní Novákové se narodila holčička."

První případ

Důvody, proč věříme, že výrok A je nepravdivý, mohou být velice pádné, zatímco důvody, proč věříme, že výrok B je pravdivý, jen docela pochybné a vetché. V tom případě asi výroku $A \wedge B$ přiřadíme pravdivostní hodnotu 0 – nemáme dostatečně silné důvody věřit, že $A \wedge B$ je pravdivý.

Vím, že rodina Černých nemá dostatek peněz a že pan Černý by si v životě na nic nevzal hypotéku, takže mám pádný důvod věřit, že si nekoupili nové auto.

Paní Brtníková sice říkala, že paní Novákové se minulý týden narodila holčička, ale na druhou stranu jsem paní Novákovou před měsícem potkala na ulici a nevšimla jsem si, že by měla velké bříško.

Za těchto okolností nemám důvod věřit, že předkládaná konjunkce je pravdivá, ale zato mám dobré důvody věřit, že je nepravdivá.

---

pravdivý a také nemám důvod věřit, že výrok B je pravdivý, tak nemám důvod věřit, že $A \wedge B$ je pravdivý. (Toto pravidlo lze použít, je-li pravdivostní hodnota obou výroků A, B buďto 0 nebo ?.)

Druhý případ

Lze si ale představit i situaci, že máme pořádný důvod věřit, že B je pravdivý, zatímco naše důvody výrokům A, B nevěřit jsou spíše pochybné. V tom případě asi výroku $A \wedge B$ přiřadíme pravdivostní hodnotu X.

Paní Brtníková se dnes dopoledne rozhodla seznámit mě se všemi novinkami v této ulici. Naříkala, jaké je to hrozné, že podnik pana Černého před nedávnem zbankrotoval a paní Černou zrovna ve stejné době vyhodili z práce (důvod věřit, že si Černí uprostřed finanční tísně nekoupili nové auto) a také mi prozradila, že jí paní Všetečníková povídala, že paní Novákové se prý narodil krásný chlapeček (důvod věřit, že se jí nenarodila holčička). Vím ale, že před nedávnem zbankrotoval podnik pana Čertovského, takže si to s panem Černým možná popletla.

Před měsícem jsem ale potkala paní Novákovou na ulici, když šla od lékaře, a říkala mi, že děťátko, které čeká, skoro jistě bude holčička. Paní Žouželková mi navíc včera říkala, že paní Novákové, své sousedce, závidí krásnou dcerušku, ačkoli kvůli jejímu pláči oka nezamhouřila.

Za těchto okolností mám důvod věřit, že předkládaná konjunkce je pravdivá (zdá se mi docela dobře možné, že rodina Černých si koupila nové auto), ale také mám důvod věřit, že je nepravdivá – snad má paní Brtníková aspoň v něčem pravdu.

2. úloha

Podívej se na tabulku výrokové spojky, jejíž význam je „A a B jsou neslučitelné“. Tato spojka se obvykle nazývá „Shefferovo lomítko“.

A	B	A|B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Ukaž, že pomocí této jediné spojky lze vyjádřit všechny spojky výrokové logiky, tedy najdi formule, které obsahují pouze spojku | a jsou ekvivalentní s $\neg A$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $A \vee B$, $A \Leftrightarrow B$.

Výroba formulí pro negaci a konjunkci je vcelku přímočará:

$$\neg A \Leftrightarrow (A|A)$$

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A|B) \Leftrightarrow (A|B)|(A|B)$$

Pro nalezení formule pro disjunkci můžeme použít známé de Morganovy zákony:

$$(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow [(A|A) \wedge (B|B)]|[(A|A) \wedge (B|B)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [((A|A)|(B|B))|((A|A)|(B|B))]|[((A|A)|(B|B))|((A|A)|(B|B))]$$

Dostali jsme sáhodlouhé a krkolomné vyjádření. Když si budeme chvilku hrát s tabulkou, najdeme i kratší vyjádření: $(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A|\neg B) \Leftrightarrow (A|A)|(B|B)$.

Toto vyjádření bychom objevili i pomocí de Morganových zákonů, kdybychom si uvědomili, že $\neg\neg A \Leftrightarrow A$, což v řeči Shefferova lomítka zní $(A|A)|(A|A)$. Díky tomu můžeme zkrátit dlouhou formuli na krátkou:

$$[((A|A)|(B|B))|((A|A)|(B|B))]|[((A|A)|(B|B))|((A|A)|(B|B))] \Leftrightarrow (A|A)|(B|B).$$

Formuli pro implikaci bychom mohli zkusit napsat pomocí některé z ekvivalencí

$$\neg(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B).$$

Kratší vyjádření zní:[6] $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B|A) \Leftrightarrow (B|B)|A$.

Formuli pro ekvivalenci už určitě sám dokážeš napsat pomocí jedné ze dvou následujících ekvivalencí:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B).$$

3. úloha

(a) Zdůvodni, že hrají-li proponent i oponent dobře (tedy neudělají-li chybu), pak platí, že proponent vyhraje právě tehdy, když jeho tvrzení je pravdivé (a v opačném případě vyhraje oponent). Předpokládej, že oba hráči jsou vševědoucí – o každém výroku vědí, zda je pravdivý, nebo ne[7].

(b) V pravidlech pro hru chybí pravidla pro implikaci a pro ekvivalenci. My ale víme, že obě lze považovat jen za zkratku za formuli se spojkami $\neg$, $\wedge$ a $\vee$, pro které pravidla máme. Navrhni pravidlo pro hru s výrokem, který je implikací.

(a) Korektnost hry.

Věta. *Pokud proponent ani oponent neudělají chybu a oba jsou vševědoucí, vyhraje proponent právě tehdy, je-li jeho tvrzení pravdivé; jinak vyhraje oponent.*

Důkaz. Nejprve si řekneme, jakou asi úvahu bys měl udělat, abys vymyslel následující důkaz: představme si nejprve, že proponentovo tvrzení je pravdivá negace $\neg A$. Oponent může na toto tvrzení zaútočit jedině tím, že bude tvrdit A, což je nepravdivý výrok. Je-li A věta jednoduchá, okamžitě prohraje. Kdyby A bylo nějaké složitější souvětí, stejně by se nakonec ukázalo, že je nepravdivé, takže by oponent nakonec prohrál. (V poslední větě jsme jaksi mimochodem použili dokazované tvrzení. V pořádném důkazu, který najdeš o kousek dále, uvidíme, že si to můžeme dovolit!)

Kdyby proponent tvrdil nepravdivou negaci, bude oponent tvrdit pravdivý výrok A, takže by vyhrál oponent.

Představme si ještě, že proponentovo tvrzení je konjunkce $A \wedge B$. Kdyby byla nepravdivá, byl by alespoň jeden z výroků A a B nepravdivý, a právě ten by si vychytrale vybral oponent. Proponent by byl nucen tvrdit nějaký nepravdivý výrok a prohrál by. Kdyby ale konjunkce $A \wedge B$ byla pravdivá, nedostane oponent proponenta do úzkých.

Pořádný důkaz provedeme matematickou indukcí podle počtu spojek v proponentově tvrzení. (Vůbec se nelekej, pokud předchozí větě nerozumíš.) Z pravidel hry je jasné, že dokazované tvrzení platí pro všechny jednoduché výroky, tedy pro všechny výroky, které neobsahují žádné spojky. Ukážeme, že jestli dokazované tvrzení platí pro všechny výroky, které obsahují nejvýš k spojek, platí i pro všechny výroky, které obsahují nejvýš $k+1$ spojek. Díky tomu budeme vědět, že platí pro výroky s libovolným počtem spojek: platí totiž pro výroky s nula spojkami, a tedy i pro výroky s jednou spojkou, a tedy i pro výroky se dvěma spojkami, ... a tedy i pro výroky se sto třiceti pěti spojkami, ...

[6] K objevení tohoto vyjádření nám může pomoci si všimnout, že v druhém řádku chceme dostat nulu, což lze jedině tak, že spojíme dvě formule, které mají hodnotu 1. Protože B má v tomto řádku hodnotu 0, zkusíme ho nejdřív znegovat, takže nejjednodušší formule, u které máme naději na úspěch, je $(B|B)|A$.

[7] Připomínáme, že v klasické logice každý výrok je buď pravdivý, nebo nepravdivý. Třetí možnost neexistuje.

Předpokládejme, že už jsme tvrzení dokázali pro všechny výroky s k spojkami a že dostaneme výrok s $k+1$ spojkami. Ten může být negací $\neg$A, konjunkcí A$\wedge$B nebo disjunkcí A$\vee$B; v každém případě obsahují výroky A a B nejvýš k spojek.

Na negaci $\neg$A musí oponent zaútočit tvrzením výroku A. Hra bude pokračovat s prohozenými rolemi a nový proponent (tedy původní oponent) vyhraje právě tehdy, když výrok A je pravdivý (A má k spojek, takže pro něj jsme tvrzení už dokázali), tedy právě tehdy, když výrok $\neg$A je nepravdivý. Přesně to jsme chtěli ukázat.

Je-li proponentovo tvrzení tvaru A $\wedge$ B a je nepravdivé, vybere oponent ten z výroků A, B, který je nepravdivý (jsou-li nepravdivé oba, vybere si kterýkoli). Tím donutí proponenta tvrdit nepravdivý výrok s nejvýš k spojkami, takže víme, že proponent prohraje, což jsme chtěli ukázat. Kdyby ale tvrzení A $\wedge$ B bylo pravdivé, bude proponent muset tvrdit pravdivý výrok, a tedy vyhraje, což jsme chtěli ukázat.

Případ, kdy proponent tvrdí výrok tvaru A $\vee$ B je analogický a přenecháme ho čtenáři.

(b) Pravidlo pro implikaci. Nejjednodušší pravidlo, které mě napadá, využívá ekvivalenci (A $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ B) $\Leftrightarrow$ ($\neg$A $\vee$ B). Pravidlo může znít třeba takto: „Pokud proponent tvrdí A $\Rightarrow$ B, může si vybrat, zda má dále tvrdit $\neg$A nebo B.“

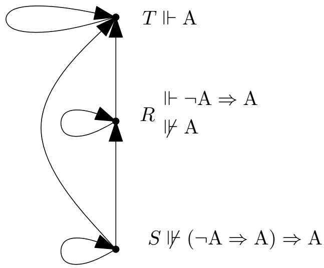
Mohli bychom také využít ekvivalenci (A $\Rightarrow$ B) $\Leftrightarrow$ $\neg$(A$\wedge\neg$B). Tomu by odpovídalo následující znění pravidla: „Pokud proponent tvrdí A $\Rightarrow$ B, může oponent tvrdit A $\wedge$ $\neg$B; dál se hraje s prohozenými rolemi.“

2. seriálová série

Téma:	Neklasické logiky
Datum odeslání:	12. BŘEZNA 2007

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Zkontrolujte, že ve všech možných světech modelu na obrázku jsou splněny podmínky z definice intuicionistického modelu.



5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Vysvětlete, proč je následující důkaz pro intuicionisty nepřijatelný:

Věta. *Existuje dvojice čísel x, y, která nejsou racionální, ale x^y je racionální.*

Důkaz. Uvažujme číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. V případě, že toto číslo je racionální, jsme hotovi ($x = y = \sqrt{2}$);

v opačném případě uvažujme čísla $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$. Pak je $x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 2$.

Ve svých úvahách předpokládejte, že intuicionisté přijímají známé tvrzení, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo.

6. Úloha

Arend Heyting navrhl následující tříhodnotové tabulky pro intuicionistickou logiku.

A	¬A
1	0
x	x
0	1

V následujících tabulkách je v levém sloupečku hodnota A a v prvním řádku je hodnota B:

A ∧ B	1	x	0
1	1	x	0
x	x	x	0
0	0	0	0

A ∨ B	1	x	0
1	1	1	1
x	1	x	x
0	1	x	0

A ⇒ B	1	x	0
1	1	x	0
x	1	1	0
0	1	1	1

A ⇔ B	1	x	0
1	1	x	0
x	x	1	0
0	0	0	1

V této interpretaci hodnota 1 značí „pravda“, x značí „nevíme“ a 0 značí „nepravda“. Lze ukázat, že všechny axiomy intuicionistické logiky mají v této interpretaci hodnotu 1 a pravidlo modus ponens je taktéž korektní. Tyto tabulky ale nevystihují sémantiku intuicionistické logiky.

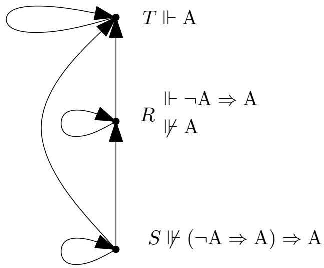
(a) Ukažte, že také formule $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ má podle těchto tabulek hodnotu 1 (bez ohledu na hodnotu výroků A, B). (2 body)

(b) Najděte protipříklad pro tuto formuli. (3 body)

Řešení 2. seriálové série

4. úloha

Zkontrolujte, že ve všech možných světech modelu na obrázku jsou splněny podmínky z definice intuicionistického modelu.



Nejprve doplníme k jednotlivým světům, které jednoduché formule tam jsou a nejsou splněné podle definice. Konkrétně nás budou zajímat podformule formule $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ a jejich negace, tedy formule $A, \neg A, \neg A \Rightarrow A, \neg(\neg A \Rightarrow A), (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$.

Formule A je splněná v T a v R splněná není; díky podmínce perzistence není splněná ani v S.

Formule $\neg$A není splněná v žádném z možných světů, protože z každého je dosažitelný svět T, kde je splněná A.

Formule $\neg A \Rightarrow A$ je splněná ve všech světech, protože v žádném není splněný její předpoklad $\neg$A. (A tedy ve všech světech, které jsou dosažitelné z nějakého pevně zvoleného světa, je implikace $\neg A \Rightarrow A$ klasicky pravdivá.)

Formule $\neg(\neg A \Rightarrow A)$ není splněná v žádném světě, protože z každého světa je dosažitelný svět T, o kterém víme, že $T \Vdash \neg A \Rightarrow A$.

Formule $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ je splněná ve světě T (je zde splněn předpoklad i závěr), ale není splněná ve světě R (předpoklad $\neg A \Rightarrow A$ zde splněný je, ale závěr ne) a tedy ani ve světě S (z toho je dosažitelný svět R, kde předpoklad je splněný a závěr ne).

	A	$\neg$A	$\neg A \Rightarrow A$	$\neg(\neg A \Rightarrow A)$	$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$
T	1	0	1	0	1
R	0	0	1	0	0
S	0	0	1	0	0

Nyní musíme ověřit platnost všech podmínek z definice.

Perzistence. Ze světa T je dosažitelný pouze svět T, takže podmínka perzistence je zde splněna pro všechny formule.

Ve světech R a S se podmínka perzistence vztahuje pouze na jedinou formuli, která je v těchto světech pravdivá, totiž formuli $\neg A \Rightarrow A$. Ta je pravdivá ve všech dosažitelných světech, takže podmínka perzistence je splněna.

Spojky. Podmínky pro jednotlivé spojky jsou splněné, což jsme ověřili při vyplňování tabulky.

5. úloha

Vysvětlete, proč je následující důkaz pro intuicionisty nepřijatelný:

Věta. *Existuje dvojice čísel x, y, která nejsou racionální, ale x^y je racionální.*

Důkaz. Uvažujme číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. V případě, že toto číslo je racionální, jsme hotovi ($x = y = \sqrt{2}$); v opačném případě uvažujme čísla $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$. Pak je $x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 2.$

Ve svých úvahách předpokládejte, že intuicionisté přijímají známé tvrzení, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo.

Problém tkví ve slůvcích „v opačném případě“, za kterými se maskuje přesvědčení, že výrok „Číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je racionální.“ je buďto pravdivý, nebo nepravdivý. Intuicionista namítá, že dokud nebude dokázáno, že daný výrok je pravdivý, nebo nebude dokázáno, že je nepravdivý, nemůžeme se spolehnout na to, že nastane jedna z těchto možností.

6. úloha

Arend Heyting navrhl následující tříhodnotové tabulky pro intuicionistickou logiku.

A	$\neg$A
1	0
x	x
0	1

V následujících tabulkách je v levém sloupečku hodnota A a v prvním řádku je hodnota B:

A ∧ B	1	x	0
1	1	x	0
x	x	x	0
0	0	0	0

A ∨ B	1	x	0
1	1	1	1
x	1	x	x
0	1	x	0

A ⇒ B	1	x	0
1	1	x	0
x	1	1	0
0	1	1	1

A ⇔ B	1	x	0
1	1	x	0
x	x	1	0
0	0	0	1

V této interpretaci hodnota 1 značí „pravda“, x značí „nevíme“ a 0 značí „nepravda“. Lze ukázat, že všechny axiomy intuicionistické logiky mají v této interpretaci hodnotu 1 a pravidlo modus ponens je taktéž korektní. Tyto tabulky ale nevystihují sémantiku intuicionistické logiky.

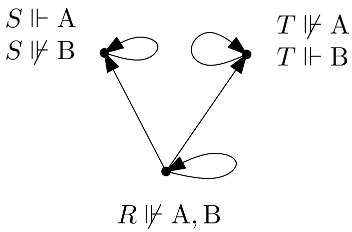
(a) Ukažte, že také formule $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ má podle těchto tabulek hodnotu 1 (bez ohledu na hodnotu výroků A, B).

(b) Najděte protipříklad pro tuto formuli.

(a) Následující tabulka dokazuje, že hodnota formule $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ je podle Heytingových tabulek 1 (bez ohledu na hodnotu výroků A a B):

A	B	A ⇒ B	B ⇒ A	(A ⇒ B) ∨ (B ⇒ A)
1	1	1	1	1
1	×	×	1	1
1	0	0	1	1
×	1	1	×	1
×	×	1	1	1
×	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	×	1	0	1
0	0	1	1	1

(b) Hledaný protipříklad je:



Snadno ověříme, že ve světě R není splněna zadaná formule:

$$S \nVdash A \Rightarrow B \qquad T \nVdash B \Rightarrow A$$

$$R \nVdash A \Rightarrow B, R \nVdash B \Rightarrow A$$

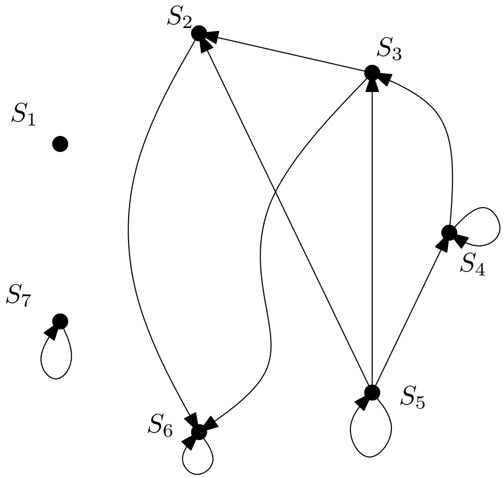
$$R \nVdash (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$$

3. seriálová série

Téma:	Neklasické logiky
Datum odeslání:	14. května 2007

7. úloha (5 bodů)
Najdi příklad, který by ukázal významový rozdíl mezi formulemi $K\neg \mathrm{V}$ a $\neg K\mathrm{V}$! Uveď alespoň jeden příklad „ze života" a alespoň jeden kripkovský model a v něm nějaký svět, ve kterém je jedna z těchto formulí pravdivá a jedna nepravdivá. Jaké jsou v tomto světě pravdivostní hodnoty implikací $K\neg\mathrm{V} \Rightarrow \neg K\mathrm{V}, \neg K\mathrm{V} \Rightarrow K\neg\mathrm{V}$? Myslíš, že tomu tak musí být vždy?

8. úloha (5 bodů)
Představ si, že následující obrázek popisuje relaci dosažitelnosti nějakého agenta A_{008}. Urči, ve kterých možných světech jsou jeho domněnky v souladu s tím, jak se věci skutečně mají, a ve kterých možných světech se v nějaké věci mýlí.



9. úloha (5 bodů)
Ukaž, že axiom **K:** $(K(\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}) \wedge K\mathrm{V}) \Rightarrow K\mathrm{W}$ jsme vybrali dobře – platí ve všech (kripkovských) modelech znalostí nějakých agentů.[8]

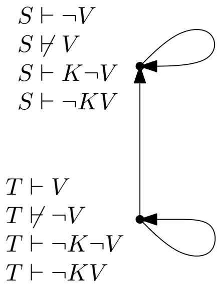
Řešení 3. seriálové série

7. úloha
Najdi příklad, který by ukázal významový rozdíl mezi formulemi $K\neg\mathrm{V}$ a $\neg K\mathrm{V}$! Uveď alespoň jeden příklad „ze života" a alespoň jeden kripkovský model a v němž nějaký svět, ve kterém je

[8] Ve svém důkazu používej pouze definici kripkovských modelů – rozhodně nestačí prohlásit, že dokazované tvrzení je důsledkem věty o korektnosti, protože tu teprv dokazujeme.

jedna z těchto formulí pravdivá a jedna nepravdivá. Jaké jsou v tomto světě pravdivostní hodnoty implikací $K\neg\mathrm{V} \Rightarrow \neg K\mathrm{V}, \neg K\mathrm{V} \Rightarrow K\neg\mathrm{V}$? Myslíš, že tomu tak musí být vždy?

Protipříklad je na následujícím obrázku: Ve světě T nevíme vůbec nic, tedy ani V (z T je totiž dosažitelný S, ve kterém V neplatí, i T, kde V platí), zatímco ve světě S víme, že $\neg$V. Zjevně tedy obecně není pravda, že $\neg K\mathrm{V} \Rightarrow K\neg\mathrm{V}$.



Opačná implikace $K\neg\mathrm{V} \Rightarrow \neg K\mathrm{V}$ platí, budeme-li používat axiom T, který má názorný význam „Co vím, to platí“. Potom pokud by v nějakém světě platilo $K\neg$V a zároveň KV, tak v něm nutně zároveň platí V a $\neg$V. To je ale spor s axiomy klasické logiky, která nepovoluje $\mathrm{V} \wedge \neg\mathrm{V}$.

Přeformulováno do skutečného světa: Pokud vím, že k večeři nebude bramborák ($K\neg$V), tak to je jistě něco jiného než když není pravda, že vím, že k večeři bude bramborák ($\neg K$V). Ve druhém případě si na tom bramboráku totiž nakonec můžu pochutnat, jen to ještě netuším. Přitom bramborák nemůže zároveň být i nebýt ($\neg K(\neg\mathrm{V} \wedge \mathrm{V})$), takže platí $K\neg\mathrm{V} \Rightarrow \neg KV$ (vím-li, že nebude bramborák, nemůžu se oprávněně domnívat, že bude).

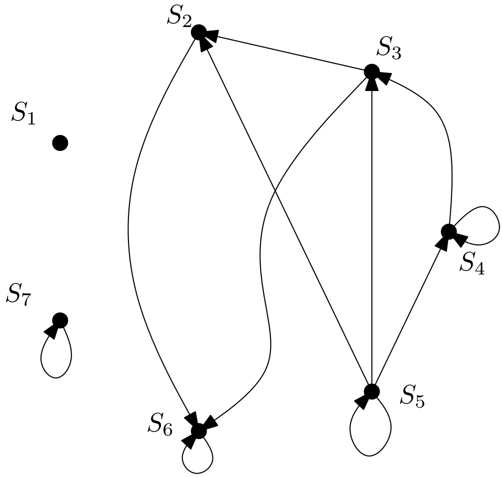
Zatímco ve skutečném světě je mezi formulemi $K\neg$V a $\neg K$V zcela zásadní rozdíl, při psaní počítačových programů se občas považují za ekvivalentní. Konkrétně je to například v některých databázích (programech pro ukládání a pozdější vyhledávání velkého množství informací) a dále třeba v programovacím jazyku ProLog. V obou případech se jedná o situaci, kdy se uživatel zeptá, zda je pravdivý nějaký výrok V. Počítač prohledá soubor informací, které „zná“ (má je uložené v paměti; buď to jsou informace uložené v databázi, v případě jazyka ProLog to jsou informace obsažené v samotném programu) a pokud mezi nimi najde výrok V, odpoví uživateli, že je pravdivý. Pokud výrok V nenajde, odpoví uživateli, že je nepravdivý.[9] Budeme-li formuli KV považovat za zápis tvrzení „Počítač považuje výrok V za pravdivý.“, bude skutečně platit $K\neg\mathrm{V} \Leftrightarrow \neg K\mathrm{V}$! Ti, kteří programují v ProLogu nebo používají zmiňované databáze, vědí, že si musí dávat veliký pozor na způsob, jakým jejich počítač rozumí negacím.

8. úloha

Představ si, že následující obrázek popisuje relaci dosažitelnosti nějakého agenta A_{008}. Urči, ve kterých možných světech jsou jeho domněnky v souladu s tím, jak se věci skutečně mají, a ve kterých možných světech se v nějaké věci mýlí.

---

[9] Tento způsob nakládání s negací se označuje anglickým výrazem *negation as failure*, tedy *negace jako neúspěch*.



Znalosti agenta jsou v souladu s aktuálním stavem světa ve světech S_4, S_5, S_6 a S_7. Všechny tyto světy jsou totiž dosažitelné samy ze sebe.

9. úloha
Ukaž, že axiom **K:** $(K(\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}) \wedge K\mathrm{V}) \Rightarrow K\mathrm{W}$ jsme vybrali dobře – platí ve všech (kripkovských) modelech znalostí nějakých agentů.[10]

Předpokládejme, že máme nějaký kripkovský model a v něm nějaký svět S.

Jestliže $S \Vdash K(\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}) \wedge K\mathrm{V}$, tak pro všechny světy T dosažitelné z S platí $T \Vdash \mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{W}$ a také $T \Vdash \mathrm{V}$. Ovšem podle definice pravdivosti implikace z toho plyne, že $T \Vdash \mathrm{W}$. Odtud $S \Vdash K\mathrm{W}$, protože ve všech světech dosažitelných z S je W pravdivé.

[10] Ve svém důkazu používej pouze definici kripkovských modelů – rozhodně nestačí prohlásit, že dokazované tvrzení je důsledkem věty o korektnosti, protože tu teprv dokazujeme.