4. série

Téma: Funkcionální rovnice

Datum odeslání: 2. ledna 2006

1. úloha (3 body)
Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechny dvojice reálných čísel x a y platí:

$$1 + f(x+y) = 2f(x)f(y).$$

2. úloha (3 body)
Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ takové, že $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ a pro každé reálné číslo x a pro každé přirozené číslo n platí:

$$f(x+n) = f(x) + n.$$

3. úloha (3 body)
Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechny dvojice reálných čísel x a y platí:

$$f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y.$$

4. úloha
Buď $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ taková funkce, že $f(1) > f(0)$ a pro každé přirozené číslo n je:

$$f(n+1) = 3f(n) - 2f(n-1).$$

(a) Dokažte, že $f(2006) \geq 2^{2005}$. (2 body)

(b) Dokažte, že $f(2005) \geq 2^{2005}$. (3 body)

5. úloha (5 bodů)
Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \neq 0, 1$ platí:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

6. úloha (5 bodů)
Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo n platí:

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n.$$

7. úloha (5 bodů)
Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takové, že $f(0) = 0$ a pro každé přirozené číslo n platí:

$$f(n) = n - f(f(n-1)).$$

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte všechny klesající funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechny dvojice reálných čísel x a y platí:

$$f(f(x + f(y))) = f(x + y) - f(y + f(x)).$$

Řešení 4. série

1. úloha **(60, 56, 2,80, 3,0)**

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechny dvojice reálných čísel x a y platí:

$$1 + f(x + y) = 2f(x)f(y).$$

Předpokládejme, že už máme nějaké řešení f a zkusme dosadit $y = 0$:

$$1 + f(x) = 2f(x)f(0)$$
$$f(x)(2f(0) - 1) = 1$$

Pokud by bylo $f(0) = \frac{1}{2}$, platilo by $0 = 1$, což nejde. Proto můžeme dělit:

$$f(x) = \frac{1}{2f(0) - 1}$$

Pro každé x tedy musí platit $f(x) = \frac{1}{2f(0)-1}$. Výraz napravo nezávisí na x, takže f musí být konstantní. Speciálně dosazením $x = 0$ dostáváme podmínku $f(0) = \frac{1}{2f(0)-1}$. Vynásobením obou stran $2f(0) - 1$ (což je pro $f(0) \neq \frac{1}{2}$ ekvivalentní úprava) obdržíme kvadratickou rovnici:

$$2f(0)^2 - f(0) = 1$$
$$2f(0)^2 - f(0) - 1 = 0,$$

která má řešení $f(0) = 1$ a $f(0) = -\frac{1}{2}$.

Proto $f(x) = f(0) \in \{1, -\frac{1}{2}\}$. Zbývá ověřit, že tyto dvě konstantní funkce skutečně řeší naši výchozí rovnici pro libovolné x, y. To je ale jednoduché: Platí $f(x) = f(y) = f(0)$, takže nám funkcionální rovnice přejde do tvaru: $1 + f(0) = 2f(0)^2$, což je přesně ta samá kvadratická rovnice, kterou jsme vyřešili o pár řádků výše, a tedy $f(0)$ rovná 1 a $-\frac{1}{2}$ vyhovují.

Hledané funkce jsou $f(x) = 1$ a $f(x) = -\frac{1}{2}$.

2. úloha **(44, 19, 1,45, 1,0)**

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ takové, že $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ a pro každé reálné číslo x a pro každé přirozené číslo n platí:

$$f(x + n) = f(x) + n.$$

Druhou z podmínek v zadání lze přeformulovat též takto (substituujeme $-m$ za n): $f(x-m) = f(x)-m$ pro libovolné přirozené číslo m. Nechť nyní je $f(0) = n$; pak ovšem platí $f(-n) = 0 \notin \mathbb{N}$, což je spor s předpokladem, že f je funkcí do přirozených čísel. (Pokud považuješ 0 za přirozené číslo, urči například hodnotu $f(-n-1)$.)

Poznámka: Všimněte si, že první podmínka v zadání byla úplně zbytečná.

Poznámka 2: Náročnější řešitelé se mohou pokusit vyřešit tutéž úlohu pro $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$. Řešení následuje. Z druhé podmínky víme, že $f(x+1) = f(x)+1$. Podle první podmínky (pokud je f nerostoucí nebo neklesající, říkáme také, že f je monotónní) vidíme, že pro $y \in (x, x+1)$ musí platit $f(x) \leq f(y) \leq f(x)+1$.

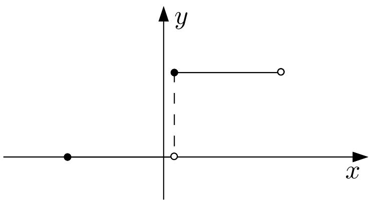
Nejprve zmíníme některé konkrétní příklady funkcí, které splňují zadání a už je znáš. Jsou to různé zaokrouhlovací funkce, například „obyčejné“ zaokrouhlování, dolní celá část a horní celá část.

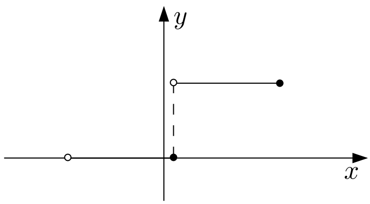
Obecně je každá funkce f splňující zadání jednoznačně určena následujícími třemi „parametry“, které lze volit libovolně:

(i) Hodnota $f(0)$.

(ii) Místo, kde dochází ke „skoku“ (nespojitosti), tedy $y \in (0, 1\rangle$ takové, že pro každé $x_1 < y < x_2$ je $f(x_1) \leq f(x_2)+1$. Nespojitosti se pak periodicky opakují.

(iii) Zda y z předešlého bodu má hodnotu „jako hodnoty nalevo od něj“, nebo „jako hodnoty napravo od něj“. Rozmysli si, že nastává vždy právě jedna možnost.





Poznámky k došlým řešením: Tato úloha byla takovým testem pozornosti řešitelů, klíčovým údajem zadání bylo, že oborem hodnot mají být přirozená čísla. Je snadné nahlédnout, že v takovém případě žádná vyhovující funkce neexistuje.

Za správné řešení úlohy, kdy oborem hodnot jsou čísla celá, jsem uděloval bod.

3. úloha **(49, 40, 2,53, 3,0)**

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechny dvojice reálných čísel x a y platí:

$$f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y.$$

Mějme libovolné reálné číslo x, v zadané rovnici postupně zvolme $y = x$ a $y = -x$. Tím dostaneme $f(2x) + 2f(0) = 3f(x) - x$ a $f(0) + 2f(2x) = 3f(x) + x$, odkud snadno vyjádříme (odečtením dvojnásobku první rovnice od druhé), že $f(x) = x + f(0)$. Označme $f(0) = c$. Víme tedy, že pro všechna x je $f(x) = x + c$. Dosadíme-li tuto funkci do zadání, dostaneme, že $(x+y)+c+2((x-y)+c) = 3(x+c)-y$, což je splněno pro všechna x a y. Funkce $f(x) = x+c$, kde c je libovolné, je tedy řešením dané rovnice.

4. úloha **(49, 42, 3,76, 5,0)**

Buď $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ taková funkce, že $f(1) > f(0)$ a pro každé přirozené číslo n je:

$$f(n+1) = 3f(n) - 2f(n-1).$$

(a) Dokažte, že $f(2006) \geq 2^{2005}$.

(b) Dokažte, že $f(2005) \geq 2^{2005}$.

Matematickou indukcí dokážeme, že pro každé přirozené číslo n platí $f(n) \geq 2^n$ a zároveň $f(n) - f(n-1) \geq 2^{n-1}$.

(1) Pro $n = 1$: $f(0)$ je přirozené číslo, takže $f(0) \geq 1$. $f(1) > f(0)$, takže $f(1) \geq f(0) + 1$, čili $f(1) - f(0) \geq 1$ a $f(1) \geq f(0) + 1 \geq 2$.

(2) Předpokládejme, že tvrzení platí pro n a dokažme je pro $n + 1$.

$$f(n+1) = 3f(n) - 2f(n-1) = f(n) + 2(f(n) - f(n-1)) \geq 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1},$$

$$f(n+1) - f(n) = 2(f(n) - f(n-1)) \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Tím je důkaz indukcí hotov a víme tedy, že pro každé přirozené číslo n platí $f(n) \geq 2^n$, a tedy platí i

(a) $f(2006) \geq 2^{2006} > 2^{2005}$

(b) $f(2005) \geq 2^{2005}$.

5. úloha **(36, 33, 4,39, 5,0)**

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \neq 0, 1$ platí:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

Zvolme jakékoli reálné číslo $t \neq 0, 1$. Dosadíme-li v zadání postupně $x = t$, $x = \frac{1}{1-t}$ a $x = 1 - \frac{1}{t}$ ($t \neq 0, 1$, jsou to tedy všechno reálná čísla; snadno ověříš, že jsou různá od 0 a 1), dostaneme soustavu tří rovnic

$$f(t) + f\left(\frac{1}{1-t}\right) = t$$

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right) + f\left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{1-t}$$

$$f\left(1 - \frac{1}{t}\right) + f(t) = 1 - \frac{1}{t}.$$

Sečteme-li první a třetí rovnici a od součtu odečteme druhou, dostaneme

$$2f(t) = t + 1 - \frac{1}{t} - \frac{1}{1-t},$$

tedy

$$f(t) = \frac{t^3 - t + 1}{2t(t-1)}.$$

Dosazením do zadání zjistíme, že tato funkce je opravdu řešením dané rovnice.

6. úloha **(34, 24, 3,44, 5,0)**

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo n platí:

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n.$$

Nejprve si všimněme, že hledaná funkce musí být prostá (to znamená, že pokud $m \neq n$, pak taky $f(m) \neq f(n)$). Pro spor předpokládejme, že f není prostá, tedy že existují m a n taková, že $m \neq n$ a $f(m) = f(n)$. Pak ale $f(f(m)) = f(f(n))$ a také $f(f(f(m))) = f(f(f(n)))$, a tedy $3m = f(f(f(m))) + f(f(m)) + f(m) = f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$, což je spor.

A teď indukcí dokažme, že $f(n) = n$ pro každé n.

(1) Pro $n = 1$: $f(f(1)) \geq 1$, $f(f(f(1))) \geq 1$, takže $3 = f(f(f(1))) + f(f(1)) + f(1) \geq 2 + f(1)$, a to znamená, že $f(1) \leq 1$. Funkce ale nabývá pouze přirozených hodnot, musí tedy být $f(1) = 1$.

(2) Předpokládejme, že pro všechna $k < n$ platí $f(k) = k$ a dokažme, že i $f(n) = n$:

Kdyby bylo $f(n) < n$, je $f(n) = k$, pro nějaké $k < n$. Podle indukčního předpokladu je ale také $f(k) = k$, a tedy $f(k) = f(n)$, což je spor s prostotou funkce. Je tedy $f(n) \geq n$.

Nyní obdobně jako v předchozím odstavci postupně zjistíme, že $f(f(n)) \geq n$ a také že $f(f(f(n))) \geq n$. To znamená, že $3n = f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) \geq 2n + f(n)$, a tedy $f(n) \leq n$. Už víme, že $f(n) \geq n$. Nezbývá tedy jiná možnost než $f(n) = n$, což jsme chtěli dokázat.

Funkce $f(n) = n$ zadání zřejmě vyhovuje, je tedy jediným řešením.

7. úloha **(9, 2, 1,33, 1,0)**

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takové, že $f(0) = 0$ a pro každé přirozené číslo n platí:

$$f(n) = n - f(f(n-1)).$$

Nejprve si uvědomme, že funkce je daným předpisem správně definovaná, tedy že skutečně nabývá nezáporných hodnot. Laskavá čtenářka snadno indukcí dokáže, že pro každé přirozené n je $0 < f(n) < n$, což je přesně to, co potřebujeme.

Označme $c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (všimněme si, že $c^2 + c = 1$). Spočítáme-li si několik prvních hodnot funkce f, možná nás napadne, že by mohlo platit $f(n) = \lfloor (n+1)c \rfloor$.[1] Pokusme se to tedy dokázat – jak jinak než indukcí!

(1) Pro $n = 0$ to zřejmě platí.

(2) Předpokládejme, že pro každé $n < k$ je $f(n) = \lfloor (n+1)c \rfloor$, a určeme $f(k)$. Všimneme-li si, že z indukčního předpokladu plyne $f(n) \leq n$, zjistíme, že indukční předpoklad můžeme použít i pro $n = \lfloor kc \rfloor = f(k-1)$ a dostat $f(k) = k - f(f(k-1)) = k - f(\lfloor kc \rfloor) = k - \lfloor (\lfloor kc \rfloor + 1)c \rfloor$. Teď už stačí jen dokázat, že $\lfloor (k+1)c \rfloor = k - \lfloor (\lfloor kc \rfloor + 1)c \rfloor$, což je ekvivalentní s $k = \lfloor (k+1)c \rfloor + \lfloor (\lfloor kc \rfloor + 1)c \rfloor$. Označme výraz na pravé straně l.

K tomu se nám bude hodit toto pomocné tvrzení:

Pro každé reálné číslo $0 \leq a < 1$ platí $c + \lfloor a + c \rfloor - a(c+1) \leq 1$.

---

[1] $\lfloor x \rfloor$ značí (dolní) celou část reálného čísla x, což je největší celé číslo, které je menší než x. Jinak se to dá také vyjádřit tak, že $\lfloor x \rfloor$ je takové celé číslo, pro něž platí $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

Důkaz: Požadovanou nerovnost snadno upravíme do ekvivalentního tvaru $\lfloor a+c \rfloor \leq a(c+1)+$ $+ 1 - c$. Zjevně $0 < a + c < 2$, takže mohou nastat 2 případy:

(a) $0 < a + c < 1$. Pak $\lfloor a + c \rfloor = 0$ a protože $a(c + 1)$ i $1 - c$ jsou kladná čísla, nerovnost platí.

(b) $1 \leq a + c < 2$. Pak $\lfloor a + c \rfloor = 1$ a potřebujeme dokázat, že $a(c + 1) \geq c$. Podle předpokladu je $a \geq 1 - c$, takže $a(1 + c) \geq 1 - c^2 = c$, což jsme chtěli dokázat.

A teď už vzhůru k důkazu, že $l = k$.

Označme $a = kc - \lfloor kc \rfloor$. Pak $\lfloor (k + 1)c \rfloor = \lfloor kc + c \rfloor = \lfloor \lfloor kc \rfloor + a + c \rfloor = \lfloor kc \rfloor + \lfloor a + c \rfloor$.

$$l = \lfloor (k + 1)c \rfloor + \lfloor (\lfloor kc \rfloor + 1)c \rfloor < \lfloor (k + 1)c \rfloor + (\lfloor kc \rfloor + 1)c =$$

$$= \lfloor kc \rfloor + \lfloor a + c \rfloor + c\lfloor kc \rfloor + c < (c + 1)\lfloor kc \rfloor + \lfloor a + c \rfloor + c =$$

$$= (c+1)(kc-a)+\lfloor a+c \rfloor+c = k(c^2+c)+\lfloor a+c \rfloor-a(c+1)+c = k+\lfloor a+c \rfloor-a(c+1)+c < k+1,$$

kde první nerovnost je ostrá, protože $(\lfloor kc \rfloor + 1)c$ není celé číslo, a v poslední nerovnosti jsme použili pomocného tvrzení. Čísla l i k jsou celá, takže musí platit $l \leq k$.

Nějakým podobným výpočtem bychom zjistili, že $l \geq k$, takže musí být $k = l$. Víme tedy, že funkce $f(n) = \lfloor (n + 1)c \rfloor$ vyhovuje zadání. Zadání určuje funkci f jednoznačně, zmíněná funkce je tudíž jediným řešením naší úlohy.

8. úloha **(9, 6, 3,33, 5,0)**

Najděte všechny klesající funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechny dvojice reálných čísel x a y platí:

$$f(f(x + f(y))) = f(x + y) - f(y + f(x)).$$

Ukážeme, že taková funkce nemůže existovat. Nechť pro spor nějaká vhodná f existuje. Potom je klesající, takže pokud $x > y$, tak $f(x) < f(y)$. Ukážeme, že na něco takového je podmínka pro f „příliš symetrická“. Platí totiž:

$$f(f(x + f(y))) = f(x + y) - f(y + f(x))$$
$$f(f(x + f(y))) + f(y + f(x)) = f(x + y)$$

Výraz na pravé straně $f(x+y)$ se nezmění, pokud prohodíme x a y (Formálně bychom to udělali tak, že pro každou zadanou dvojici (x, y) dosadíme do rovnosti dvojici (y, x)), takže musí platit:

$$f(f(x + f(y))) + f(y + f(x)) = f(x + y) = f(y + x) = f(f(y + f(x))) + f(x + f(y))$$
$$f(f(x + f(y))) + f(y + f(x)) = f(f(y + f(x))) + f(x + f(y))$$

Zvolme teď $x > y$ a zkusme dosadit. Jistě platí $f(y) > f(x)$, sečtením obdržíme $x + f(y) >$ $> y + f(x)$. Potom ovšem $f(x + f(y)) < f(y + f(x))$ a $f(f(x + f(y))) > f(f(y + f(x)))$ (Druhou nerovnost lze chápat obecněji: Složením dvou klesajících funkcí dostaneme funkci rostoucí.)

Sečtením těchto vztahů dostaneme ostrou nerovnost:

$$f(f(x + f(y))) + f(y + f(x)) > f(f(y + f(x))) + f(x + f(y))$$

O pár řádek výše jsme přitom odvodili, že mezi levou a pravou stranou tohoto vztahu musí pro každé x, y platit rovnost. To je spor, takže žádná vhodná funkce neexistuje.