3. série

Téma: Kružnice

Datum odeslání: 12. prosince 2005

1. úloha (3 body)

V rovině je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně 1. Označme k_A, k_B, k_C kružnice s poloměrem $\frac{1}{2}$ a středy A, B, C. Nechť k je kružnice se středem v těžišti ABC dotýkající se všech tří kružnic k_A, k_B, k_C. Určete poloměr k.

2. úloha (3 body)

Dvě kružnice k_1 a k_2 mají společný vnější bod dotyku P. Bodem P procházejí tři navzájem různé přímky p_A, p_B, p_C protínající k_1 po řadě v bodech A_1, B_1 a C_1 (různých od P) a dále protínající k_2 po řadě v bodech A_2 , B_2 a C_2 (různých od P). Dokažte, že trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ jsou podobné.

3. úloha (3 body)

Tětivový[1] pětiúhelník má všechny úhlopříčky stejně dlouhé. Dokažte, že je pravidelný.

4. úloha (5 bodů)

Nechť BD je osa úhlu ABC v trojúhelníku ABC (bod D leží na straně AC). Označme E průsečík kružnice opsané trojúhelníku BDC a přímky AB. Dále F je průsečík kružnice opsané ABD a přímky CB. Dokažte, že $|AE| = |CF|$.

5. úloha (5 bodů)

Nechť $ABCD$ je tětivový[1] čtyřúhelník takový, že přímky AD a BC se protínají v bodě E. Označme M průsečík přímky BD a přímky vedené bodem E, která je rovnoběžná s přímkou AC. Bodem M veďme nějakou tečnu ke kružnici opsané $ABCD$ a bod dotyku označme T. Dokažte, že $|MT| = |ME|$.

6. úloha (5 bodů)

Po kružnici k běhají dva psi. Zpočátku jsou v bodech P_1 a P_2. Oba psy pozorují jejich páníčkové, kteří stojí v bodech B_1 a B_2 na kružnici k. Přímky P_1B_1 a P_2B_2 jsou různoběžné. Označme si Q_1, Q_2 polohu prvního a druhého psa v nějaký okamžik. Zjistěte množinu průsečíků přímek Q_1B_1 a Q_2B_2, oběhnou-li oba psi kružnici stejnou rychlostí a ve stejném směru (pokud bod Q_i splývá s bodem B_i, považujeme za přímku Q_iB_i tečnu ke kružnici k v tomto bodě).

7. úloha (5 bodů)

Tři kruhy K_1, K_2 a K_3 mají každý s každým společný vnější bod dotyku. Kruh K_1 má nejmenší obsah S_1. Kruhy dohromady ohraničují oblast v rovině podobnou trojúhelníku se stranami vypuklými dovnitř o obsahu S. Dokažte, že

$$S \geq \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{2} \right) S_1.$$

[1] Tětivový mnohoúhelník je takový, kterému lze opsat kružnici.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Rozhodněte, zda lze rozmístit 2005 kružnic k_1, k_2, ..., k_{2005} o poloměru 1 v rovině tak, aby byly splněny následující podmínky:

(i) k_i má společný vnější dotyk s k_{i+1}, pro $i \in \{1, 2, \dots, 2004\}$ a k_{2005} má společný vnější dotyk s k_1.

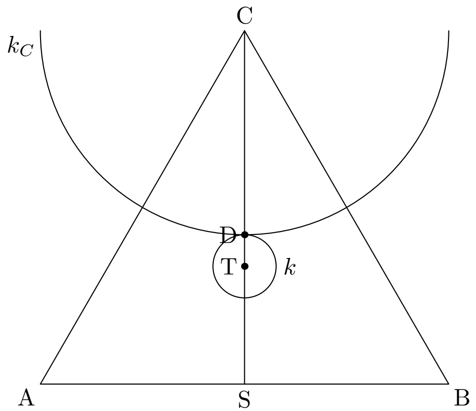
(ii) Vybereme-li libovolný bod X_1 na kružnici k_1 a označíme-li X_{i+1} obraz bodu X_i v osové souměrnosti podél osy kružnic k_i a k_{i+1} (míníme souměrnost převádějící k_i na k_{i+1}) pro $i \in \{1, 2, \dots, 2004\}$, a pokud dále označíme X_{2006} obraz bodu X_{2005} v osové souměrnosti podél osy kružnic k_{2005} a k_1, potom platí, že $X_{2006} = X_1$.

Řešení 3. série

1. úloha **(97, 87, 2,18, 2,0)**

V rovině je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně 1. Označme k_A, k_B, k_C kružnice s poloměrem $\frac{1}{2}$ a středy A, B, C. Nechť k je kružnice se středem v těžišti ABC dotýkající se všech tří kružnic k_A, k_B, k_C. Určete poloměr k.

Označme S střed strany AB. Z Pythagorovy věty plyne, že $|CS|^2 = |AC|^2 - |SA|^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Odtud je $|CS| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dále označme T těžiště trojúhelníku ABC a D společný bod dotyku k a k_C.



Jelikož těžiště dělí těžnice v poměru 1 : 2, je $|CT| = \frac{2}{3} \cdot |CS| = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Teď máme dvě možnosti – buď mají kružnice k a k_C vnější, nebo vnitřní dotyk. V prvním případě leží bod D určitě na úsečce CS, jelikož středy kružnic k a k_C jsou na této úsečce. Odtud plyne, že $|DT| = |CT| - |CD|$, $|CD|$ je poloměr k_C, který je roven $\frac{1}{2}$. Délka $|DT|$ je poloměr k, který je proto roven

$$r_1 = |DT| = |CT| - |CD| = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}.$$

Ve druhém případě leží bod D na „druhé straně“ kružnice k_C, takže poloměr r_2 je roven r_1 plus průměr k_C. Tedy:

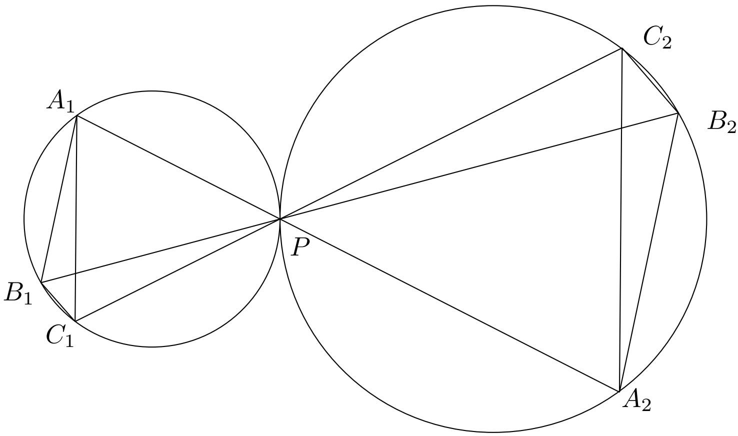
$$r_2 = |DT| + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}.$$

Úloha má tedy dvě možná řešení $r = \frac{\sqrt{3}}{3} \pm \frac{1}{2}$.

2. úloha **(89, 87, 2,93, 3,0)**

Dvě kružnice k_1 a k_2 mají společný vnější bod dotyku P. Bodem P procházejí tři navzájem různé přímky p_A, p_B, p_C protínající k_1 po řadě v bodech A_1, B_1 a C_1 (různých od P) a dále protínající k_2 po řadě v bodech A_2 , B_2 a C_2 (různých od P). Dokažte, že trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ jsou podobné.

Tato úloha šla řešit více způsoby. Mohli jste buď konstatovat, že znáte stejnolehlost, nebo nějak dopočítat úhly v trojúhelnících. Pro názornost tu ukážeme oba způsoby.



Řešení stejnolehlostí:

Je zřejmé (z vlastností stejnolehlosti), že jsou kružnice k_1 a k_2 stejnolehlé podle bodu dotyku P (určitě existuje koeficient k, který podle bodu dotyku zobrazí jednu kružnici na druhou). To znamená, že libovolný bod na kružnici k_1 se zobrazí v dané stejnolehlosti do nějakého bodu na kružnici k_2, a pro body A_1, B_1, C_1 to konkrétně znamená, že se v této stejnolehlosti zobrazí do bodů A_2, B_2, C_2. Vrcholy trojúhelníků $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ jsou stejnolehlé, tím pádem jsou stejnolehlé i tyto trojúhelníky, a protože jsou si libovolné útvary zobrazené ve stejnolehlosti podobné, je důkaz stejnolehlostí ukončen.

Poznámka: Zkrácený zápis tohoto důkazu by vypadal asi takto: Je zřejmé, že jsou trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ stejnolehlé podle stejnolehlosti se středem v P, která zobrazuje kružnici k_1 na k_2. Útvary zobrazené ve stejnolehlosti jsou podobné, proto jsou trojúhelníky také podobné.

Řešení pomocí úhlů:

V tomto důkaze se bude používat jen věta o obvodových úhlech (ta říká, že dva obvodové úhly mají nad stejnou tětivou vždy stejnou velikost), a shodnost středových úhlů. Platí tedy:

$$|\sphericalangle C_1A_1B_1| = |\sphericalangle C_1PB_1| = |\sphericalangle C_2PB_2| = |\sphericalangle C_2A_2B_2|.$$

Podobně dostaneme:

$$|\sphericalangle B_1C_1A_1| = |\sphericalangle B_1PA_1| = |\sphericalangle B_2PA_2| = |\sphericalangle B_2C_2A_2|.$$

Naše trojúhelníky mají shodné dva úhly, a jsou tedy podobné.

Poznámka: Tato úloha byla ilustrací toho, jak se dá jednoduše pracovat s úhly, a že existuje něco jako stejnolehlost, která mnohdy velice usnadní úlohu. Pokud vám obě řešení přijdou zhruba stejně namáhavá, zkuste si vzít například dva n-úhelníky vzniklé na kružnicích k_1 a k_2 stejným způsobem jako v zadání. Dokazování pomocí úhlů by už bylo docela na dlouho ...

3. úloha **(78, 51, 2,19, 3,0)**

Tětivový[2] pětiúhelník má všechny úhlopříčky stejně dlouhé. Dokažte, že je pravidelný.

Označme pětiúhelník $ABCDE$ a označme S střed kružnice jemu opsané. Díky tomu, že jsou všechny úhlopříčky stejně dlouhé, jsou trojúhelníky ASC, BSD, CSE, DSA a ESB shodné. Speciálně tedy mají shodné úhly u vrcholu S; označme velikost těchto úhlů α. Je tedy

$$\alpha = |\sphericalangle ASC| = |\sphericalangle BSD| = |\sphericalangle CSE| = |\sphericalangle DSA| = |\sphericalangle ESB|.$$

Potom ale $|\sphericalangle ASB| = 360° - |\sphericalangle BSD| - |\sphericalangle DSA| = 360° - 2\alpha$. Podobně odvodíme, že

$$|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle CSD| = |\sphericalangle DSE| = |\sphericalangle ESA| = 360° - 2\alpha.$$

To ale znamená, že pětiúhelník je pravidelný.

Poznámky k došlým řešením: Ač byla úloha vcelku jednoduchá, překvapivě velký počet řešitelů s ní měl problémy. Jen málokdo dokázal, že daný pětiúhelník má shodné strany i vnitřní úhly. Nemálo řešitelů ukázalo jen shodnost stran, což stačí vzhledem k tomu, že je pětiúhelník tětivový – tento fakt si nicméně ne každý uvědomil, uznal jsem však takové řešení každému (možná definice pravidelného n-úhelníku je, že je tětivový a má stejně dlouhé strany).

Horší to bylo v případech, kdy řešitel dokázal jen shodnost vnitřních úhlů. Ta totiž sama o sobě bez další úvahy nestačí, jako protipříklad jsem nabízel obdélník. Je tětivový, má shodné vnitřní úhly (a dokonce i stejně dlouhé úhlopříčky), přesto však pravidelný není. Stejný „protipříklad“ lze najít u šestiúhelníku, osmiúhelníku, obecně každého n-úhelníku pro sudé n. Ukázat, že u pětiúhelníku (a obecně lichoúhelníku) shodnost vnitřních úhlů stačí, je podle mne úloha srovnatelná se zadanou, za taková řešení jsem proto dával po bodu.

4. úloha **(61, 54, 4,39, 5,0)**

Nechť BD je osa úhlu ABC v trojúhelníku ABC (bod D leží na straně AC). Označme E průsečík kružnice opsané trojúhelníku BDC a přímky AB. Dále F je průsečík kružnice opsané ABD a přímky CB. Dokažte, že $|AE| = |CF|$.

Volme klasické označení stran trojúhelníku ABC. Z mocnosti bodu A ke kružnici opsané trojúhelníku BDC máme $|AE|\,c = |AD|\,b$. Podobně z mocnosti bodu C ke kružnici opsané trojúhelníku ABD dostaneme $|CF|\,a = |CD|\,b$.

[2]Tětivový mnohoúhelník je takový, kterému lze opsat kružnici.

Pokusme se vyjádřit poměr $|AD| : c$ a poměr $|CD| : a$. Pokud se nám podaří ukázat, že tyto poměry jsou stejné, máme vyhráno (viz rovnosti výše). K tomu využijeme *sinovou větu.* Z trojúhelníku ABD máme $|AD| : c = \sin(\frac{\beta}{2}) : \sin(|\sphericalangle ADB|)$ a z trojúhelníku BDC plyne $|CD| : a = \sin(\frac{\beta}{2}) : \sin(\pi - |\sphericalangle ADB|)$. A vzhledem k tomu, že $\sin(|\sphericalangle ADB|) = \sin(\pi - |\sphericalangle ADB|)$ je $|AE| = |CF|$, což bylo třeba dokázat.

Poznámky k došlým řešením: K této úloze není snad co dodat. Jen asi několik rad pro nejmenší: Funkcionální rovnice, kde na jedné straně vystupuje samostatná proměnná (v této rovnici je to na prave straně proměnná y) půjde nejspíš řešit buď vhodným dosazením, nebo soustavou rovnic s vhodným dosazením. Druhá rada: Na obou stranách je dohromady stejně hledných funkcí (na levé je $f(x{+}y){+}2f(x{-}y)$ a na pravé $3f(x)$), daná rovnice teda nepůjde řešit jen jedním dosazením, protože, co potřebujeme, je na jedné straně jen funkce a na druhé nějaké volné proměnné, a to se při stejném počtu funkcí na obou stranách dosáhnout nedá.

Právě mi mé zlaté vousy děda Vševěda napověděly, že bych měl ještě zaburácet: Bez zkoušky se neopovažujte řešení ani poslat! Jinak přeji hezký den.

5. úloha **(44, 36, 4,14, 5,0)**

Nechť $ABCD$ je tětivový[3] čtyřúhelník takový, že přímky AD a BC se protínají v bodě E. Označme M průsečík přímky BD a přímky vedené bodem E, která je rovnoběžná s přímkou AC. Bodem M veďme nějakou tečnu ke kružnici opsané $ABCD$ a bod dotyku označme T. Dokažte, že $|MT| = |ME|$.

Búno (bez újmy na obecnosti) se polopřímky AD a BC protínají v bodě E. Jinak změníme označení čtyřúhelníku $ABCD$, aby tomu tak bylo.

Všimněme si, že bod M je vždy vně kružnice k opsané čtyřúhelníku $ABCD$ (Rozmyslete si to!) Má tedy smysl mluvit o tečně MT a z mocnosti bodu M ke kružnici k vyjádřit její velikost

$$|MT|^2 = |MD|\,|MB|\,.$$

V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úhly DAC a DBC obvodové nad tětivou DC kružnice k a tedy $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DBC|$. Dále víme, že přímky AC a EM jsou rovnoběžné a tím pádem jsou úhly DAC a MED střídavé a tedy $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle MED|$. Dohromady $|\sphericalangle MED| = |\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle MBE|$. Trojúhelníky MED a MBE mají navíc společný úhel při vrcholu M a jsou proto podobné podle věty *uu*. Z podobnosti těchto trojúhelníků vyjádříme velikost $|ME|$, pomocí $|ME| : |MD| = |MB| : |ME|$, neboli

$$|ME|^2 = |MD|\,|MB|\,.$$

Porovnáme-li tento vztah s prvním, tak s ohledem na kladnost délek úseček máme $|ME| = |MT|$.

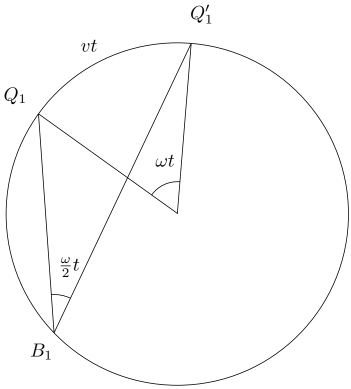
Poznámky k došlým řešením: Všechna správná řešení byla podobná autorskému. Vyskytlo se ale i několik řešení typu: „Opíšeme kružnici kolem bodu M, která prochází bodem T a vidíme, že kružnice prochází i bodem E a důkazu je hotov.“ Je třeba si uvědomit, že obrázek není důkaz. Jen si vzpomeňte na geometrické konstrukce, kdy po vlastní konstrukci následuje důkaz správnosti konstrukce.

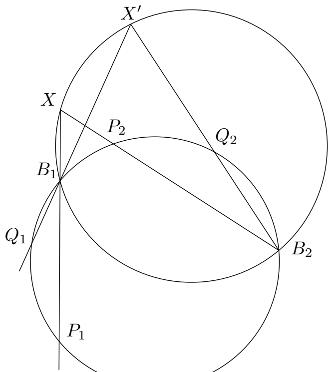
[3] Tětivový čtyřúhelník je takový, kterému lze opsat kružnici.

6. úloha (46, 38, 3, 22, 4, 0)

Po kružnici k běhají dva psi. Zpočátku jsou v bodech P_1 a P_2. Oba psy pozorují jejich páníčkové, kteří stojí v bodech B_1 a B_2 na kružnici k. Přímky P_1B_1 a P_2B_2 jsou různoběžné. Označme si Q_1, Q_2 polohu prvního a druhého psa v nějaký okamžik. Zjistěte množinu průsečíků přímek Q_1B_1 a Q_2B_2, oběhnou-li oba psi kružnici stejnou rychlostí a ve stejném směru (pokud bod Q_i splývá s bodem B_i, považujeme za přímku Q_iB_i tečnu ke kružnici k v tomto bodě).

Obvodové rychlosti v psů při oběhu odpovídá středová úhlová rychlost ω a díky větě o středovém a obvodovém úhlu jí také odpovídá úhlová rychlost otáčení $\frac{\omega}{2}$ přímek Q_iB_i(viz obr.). Přímky Q_1B_1 a Q_2B_2 se tedy otáčejí stejnou rychlostí a přímky se, díky tomu, že psi běhají ve stejném směru, otáčejí na stejnou stranu. Proto svírají stále stejný úhel. A protože nejsou rovnoběžné, je tento úhel nenulový a průsečík existuje. Nyní je potřeba rozebrat případy pro poloroviny určené přímkou B_1B_2.





Označme si X průsečík P_1B_1 a P_2B_2 a X' průsečík přímek Q_1B_1 a Q_2B_2. Je celkem zřejmé, že pro jednu polorovinu je úhel $B_1X'B_2$ stále stejný a pro druhou polorovinu je úhel $B_1X'B_2$ doplňkem do 180° k úhlu z opačné poloroviny. Množinou průsečíků X' může být tedy jen kružnice opsaná trojúhelníku B_1B_2X. Zbývá ještě ukázat, že libovolný bod X' na této kružnici umíme nějakou polohou psů dostat.

Vezměme si tedy nějaký bod Y na nalezené kružnici. Pro něj umíme jistojistě najít body Q_{1_Y}, Q_{2_Y} na původní kružnici, které ho určují. Pokud se v nějakém čase psi dostanou zároveň do poloh Q_{1_Y}, Q_{2_Y}, pak Y patří do množiny. Pro spor předpokládejme, že pro námi zvolený libovolný bod Y se psi do poloh Q_{1_Y}, Q_{2_Y} zároveň nedostanou, a když bude první pes v Q_{1_Y}, bude druhý v nějakém bodě Q_2 různém od Q_{2_Y}. Bod X' je průsečík přímek $Q_{1_Y}B_1$ a Q_2B_2, ale zároveň už víme, že musí ležet na nalezené kružnici. Průsečík nalezené kružnice a přímky Q_1YB_1 je však bod Y (pokud existuje, bereme průsečík různý od B_1), a body X,Y jsou shodné. Pak však musí být i $Q_2 = Q_{2_Y}$. Tím je důkaz ukončen.

Pozn. k důkazu: Pokud máme úlohu na množinu bodů, řešíme ji téměř vždy ve dvou částech. V první omezíme co nejvíce pomocí vlastností, které máme k dispozici, možnou množinu na nějakou „menší" určenou množinu. V tomto příkladu je to omezení na kružnici opsanou trojúhelníku B_1B_2X. Ve druhé části musíme ukázat (resp. ověřit), že všechny body námi nalezené množiny opravdu vyhovují, protože se může stát, že ještě některé body z nalezené množiny vypadnou.

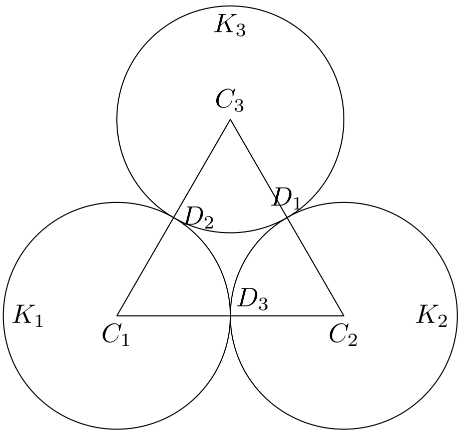
Poznámky k došlým řešením: Jak se nakonec ukázalo, byla úloha na šestou úlohu neúměrně jednoduchá a tak ji vyřešila drtivá většina řešitelů. Téměř všichni však na čtyři body. Při řešení úlohy o množině bodů je nutné množinu nejdříve omezit (v tomto případě z celé roviny na kružnici) a poté dokázat, že všechno, co jsme našli, vyhovuje (co kdyby vyhovoval jen nějaký oblouk kružnice?). To byl největší oříšek. Tak příště nezapomeňte dokazovat!

7. úloha **(32, 21, 2,53, 2,0)**

Tři kruhy K_1, K_2 a K_3 mají každý s každým společný vnější bod dotyku. Kruh K_1 má nejmenší obsah S_1. Kruhy dohromady ohraničují oblast v rovině podobnou trojúhelníku se stranami vypuklými dovnitř o obsahu S. Dokažte, že

$$S \geq \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{2}\right) S_1.$$

Označme r_1, r_2, r_3 po řadě poloměry kruhů K_1, K_2, K_3 a k_1, k_2, k_3 kružnice příslušné k těmto kruhům.



Nejprve vyřešíme situaci, kdy $r_1 = r_2 = r_3 = r$. V takovém případě $S_1 = \pi r^2$. Označme D_1, D_2 a D_3 body dotyku dvojic kružnic (k_2, k_3), (k_1, k_3) a (k_1, k_2) a ještě C_1, C_2, C_3 středy kruhů K_1, K_2, K_3. Obsah S spočítáme jako obsah trojúhelníku $C_1C_2C_3$ bez kruhových výsečí vymezených oblouky D_1D_2, D_1D_3 a D_2D_3. Obsah $C_1C_2C_3$ se snadno spočítá jako $\sqrt{3}r^2$, kruhové výseče dají dohromady výseč o poloměru r s úhlem $180°$, tedy polovinu kruhu, odkud plyne, že mají obsah $\frac{1}{2}\pi r^2$. Dohromady dostáváme

$$S = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\right) r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{2}\right) \pi r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{2}\right) S_1.$$

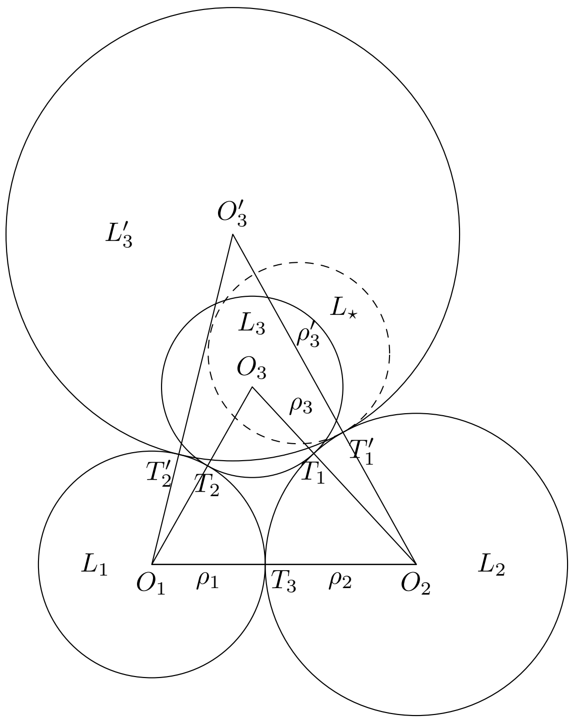
Tím je nerovnost dokázána pro případ, že $r_1 = r_2 = r_3$ (nastává dokonce rovnost).

Nyní si dokážeme pomocné tvrzení (sleduj obrázek), které nám pomůže při řešení zbytku úlohy. Mějme kruhy L_1, L_2, L_3 a L_3' takové, že dvojice kruhů (L_1, L_2), (L_1, L_3), (L_2, L_3), (L_1, L_3'), (L_2, L_3') mají vnější dotyk. Označme si po řadě ρ_1, ρ_2, ρ_3 a ρ_3' poloměry kruhů L_1, L_2,

L_3 a L_3' a předpokládejme, že $\rho_3' > \rho_3$. Označme P a P' obsah trojúhelníku podobných oblastí vymezených trojicemi kruhů (L_1, L_2, L_3) a (L_1, L_2, L_3'). Potom platí $P' > P$.

Nejprve budeme potřebovat označit nějaké body. Označme po řadě O_1, O_2, O_3 a O_3' středy kruhů L_1, L_2, L_3 a L_3'. Dále označme po řadě T_1, T_2, T_3, T_1' a T_2' společné body dotyku dvojic kruhů (k_2, k_3), (k_1, k_3), (k_1, k_2), (k_2, k_3') a (k_1, k_3'). Nakonec ještě označme po řadě α, β vnitřní úhly trojúhelníku $O_1O_2O_3$ u vrcholů O_1 a O_2 a α', β' vnitřní úhly trojúhelníku $O_1O_2O_3'$ u vrcholů O_1 a O_2.

Prvně dokážeme, že $\alpha < \alpha'$ a $\beta < \beta'$ (idea důkazu je převzata od *Marka Scholleho*). Nepřesně řečeno to pak znamená, že body T_1' a T_2' jsou na kruzích L_1 a L_2 od sebe dál než body T_1 a T_2. Nyní už k důkazu. Nechť $L_\star$ je kruh o poloměru ρ_3, který má s L_2 vnější dotyk T_1'. Kruh $L_\star$ je celý obsažen v kruhu L_3', tudíž nemá žádný společný bod s kruhem L_1. Začneme-li s kruhem $L_\star$ otáčet se středem v bodě O_2 a ve směru od O_3' k O_1, dotkne se kruhu L_1 přesně ve chvíli, kdy splyne s kruhem L_3. V tu chvíli také otočený bod T_1' splyne s T_1. Odtud plyne, že bod T_1 je vnitřním bodem trojúhelníku $O_1O_2O_3'$, a tedy $\beta < \beta'$. Analogicky se zdůvodní, že $\alpha < \alpha'$.



Odtud plyne, že se oblouky T_1T_2 (na kružnici určené L_3) a $T_1'T_2'$ (na kružnici určené L_3') neprotínají (dokonce ani nedotýkají, nicméně to by nám nevadilo), důkaz pouze naznačíme rozmysli si detaily. Pro spor předpokládejme, že se protínají, potom se musí protínat dvakrát – oblouk $T_1'T_2'$ totiž musí dvakrát protínat křivku $T_1T_2T_3T_1$ a vzhledem k podmínce $\alpha < \alpha'$, $\beta < \beta'$ neprotíná $T_1'T_2'$ oblouky T_1T_3, T_2T_3. A dále z této podmínky plyne, že $\rho_3 > \rho_3'$, to je ale spor.

Konečně, tím, že je $\alpha < \alpha'$ a $\beta < \beta'$ a oblouky T_1T_2 a $T_1'T_2'$ se neprotínají, dělí oblouk T_1T_2

oblast mezi kruhy L_1, L_2, L_3' na dvě části, přičemž jedna z nich je oblast mezi L_1, L_2 a L_3. Odtud je $P' > P$.

Nyní už úlohu snadno dokončíme. Mějme na začátku poloměry r_1, r_2 a r_3 a oblast mezi kruhy K_1, K_2 a K_3 o obsahu S. V případě, že je to potřeba, postupně zmenšíme r_2 na r_1 a r_3 na r_1 (rozmysli si, že vhodná konfigurace vždy existuje). Dostaneme tím novou oblast mezi kruhy o obsahu S'. Podle pomocného tvrzení je $S' \le S$. Na druhou stranu podle začátku řešení víme, že

$$S \ge S' = \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{2}\right) S_1,$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámky k došlým řešením: Myšlenka úlohy byla poměrně jednoduchá: kruhy o něco zmenšíme a nerovnost se nám tím nezhorší. Nicméně málokdo pořádně dokázal, že se nerovnost vskutku nezhorší, a tak plný počet bodů byl spíše výjimečný. Bod jsem strhával za chybějící důkaz, že se při zmenšení poloměru nějakého kruhu přiblíží k sobě body dotyku. Naopak jeden bod jsem dával už jen za vyřešení situace, kdy jsou všechny kruhy stejně velké, a další bod za popsání myšlenky se zmenšováním kruhů. Zajímavé řešení za plný počet bodů měl *Pavel Šalom*, který prvně vyjádřil poměr obsahů pomocí goniometrických funkcí vnitřních úhlů trojúhelníku spojujícího středy kruhů a posléze dokázal nerovnost pomocí Jensenovy nerovnosti.

8. úloha **(25, 13, 2,52, 4,0)**

Rozhodněte, zda lze rozmístit 2005 kružnic k_1, k_2, ..., k_{2005} o poloměru 1 v rovině tak, aby byly splněny následující podmínky:

(i) k_i má společný vnější dotyk s k_{i+1}, pro $i \in \{1, 2, \dots, 2004\}$ a k_{2005} má společný vnější dotyk s k_1.

(ii) Vybereme-li libovolný bod X_1 na kružnici k_1 a označíme-li X_{i+1} obraz bodu X_i v osové souměrnosti podél osy kružnic k_i a k_{i+1} (míníme souměrnost převádějící k_i na k_{i+1}) pro $i \in \{1, 2, \dots, 2004\}$, a pokud dále označíme X_{2006} obraz bodu X_{2005} v osové souměrnosti podél osy kružnic k_{2005} a k_1, potom platí, že $X_{2006} = X_1$.

Dokážeme, že takové rozmístění existovat nemůže. Budeme předpokládat, že máme rozmístění splňující podmínku (i), sporem dokážeme, že nemůže splňovat podmínku (ii).

Zvolme si libovolný bod X_1 podle zadání a nalezněme k němu bod X_{2006}. Bodem X_1 začneme točit ve směru hodinových ručiček. Z podmínek v zadání plyne, že se X_2 začne točit proti směru hodinových ručiček, X_3 po směru, X_4 proti směru, ..., X_{2006} proti směru. Vzhledem k tomu, že se X_1 a X_{2006} točí v opačných směrech, nemůžou splývat[4] pro libovolnou volbu X_1.

[4] Všimni si, že se tímto způsobem dá dokonce zdůvodnit, že existují právě dvě volby X_1 splývající s bodem X_{2006}.