1. seriálová série

Téma:	Metrické prostory
Datum odeslání:	2. ledna 2006

1. Úloha (5 bodů)

Nechť A a B jsou body v rovině se souřadnicemi $A = (2, -2)$, $B = (-1, 2)$. Nechť C_1 a C_2 jsou různé body, které mají eukleidovskou vzdálenost od bodu A rovnou 5 a od bodu B rovnou 7. Určete eukleidovskou vzdálenost bodů C_1 a C_2.

2. Úloha (5 bodů)

Nechť X je množina $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Rozhodněte, jestli funkce $\rho_1, \rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ jsou metriky. Přičemž funkce ρ_1 a ρ_2 jsou definované tabulkou:

Funkce ρ_1

ρ_1	1	2	3	4	5
1	0	2	6	4	4
2	2	0	3	2	4
3	6	3	0	2	4
4	4	2	2	0	4
5	4	4	4	4	0

Funkce ρ_2

ρ_2	1	2	3	4	5
1	0	5	6	5	3
2	5	0	5	8	4
3	6	5	0	5	3
4	5	8	5	0	4
5	3	4	3	4	0

3. Úloha (5 bodů)

Nalezněte příklad metrického prostoru, kde neexistuje střed nějaké úsečky. Tj. nalezněte metrický prostor (X, ρ) a dva body $x, y \in X$ takové, že neexistuje $s \in X$, že $\rho(x, s) = \rho(y, s) = \frac{\rho(x,y)}{2}$.

Řešení 1. seriálové série

1. úloha

Nechť A a B jsou body v rovině se souřadnicemi $A = (2, -2)$, $B = (-1, 2)$. Nechť C_1 a C_2 jsou různé body, které mají eukleidovskou vzdálenost od bodu A rovnou 5 a od bodu B rovnou 7. Určete eukleidovskou vzdálenost bodů C_1 a C_2.

Úlohu budeme řešit přímo z definice eukleidovské vzdálenosti (úlohu by šlo řešit i nějakými triky – například dvojím vyjádřením obsahu trojúhelníku ABC_1 a použitím Heronova vzorce). Omlouvám se, že je toto řešení více počítací, než jsem původně předpokládal.

Označme (x_1, y_1) souřadnice bodu C_1 a (x_2, y_2) souřadnice bodu C_2.

Nechť $i \in \{1, 2\}$. Z definice eukleidovské vzdálenosti musí platit (první rovnice je pro vzdálenost A a C_i, druhá pro B a C_i):

$$(x_i - 2)^2 + (y_i + 2)^2 = 5^2 = 25,$$

$$(x_i + 1)^2 + (y_i - 2)^2 = 7^2 = 49.$$

Odečtením první rovnice od druhé dostaneme:

$$3(2x_i - 1) - 4 \cdot 2y_i = 49 - 25 = 24,$$

Odtud je :

$$y_i = -\frac{27}{8} + \frac{3}{4}x_i. \tag{$\heartsuit$}$$

Nyní, abychom si usnadnili počítání, provedeme drobný trik. Uvědomíme si, že z ($\heartsuit$) plyne, že $y_1 - y_2 = \frac{3}{4}(x_1 - x_2)$.

A potom z definice eukleidovské vzdálenosti je

$$|C_1C_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{9}{16}\right)(x_1 - x_2)^2} = \frac{5}{4}|x_1 - x_2|.$$

Dosazením do první rovnice:

$$x_i^2 - 4x_i + 4 + \frac{9}{16}x_i^2 - \frac{33}{16}x_i + \frac{121}{64} = 25,$$

$$100x_i^2 - 388x_i - 1223 = 0.$$

Nechť $a = 100$, $b = -388$, $c = -1223$. Potom předcházející kvadratická rovnice má řešení ve tvaru

$$x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Jelikož je $C_1 \neq C_2$, musí být $x_1 \neq x_2$ (jinak by podle ($\heartsuit$) bylo i $y_1 = y_2$). Tedy bez újmy na obecnosti x_1 má plus před odmocninou a x_2 minus před odmocninou.

Potom

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \frac{\sqrt{639744}}{100} = \frac{\sqrt{2^8 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 17}}{100} = \frac{28}{25}\sqrt{51}.$$

A potom

$$|C_1C_2| = \frac{5}{4}|x_1 - x_2| = \frac{7}{5}\sqrt{51}.$$

2. úloha

Nechť X je množina $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Rozhodněte, jestli funkce $\rho_1, \rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ jsou metriky. Přičemž funkce ρ_1 a ρ_2 jsou definované tabulkou:

Funkce ρ_1

ρ_1	1	2	3	4	5
1	0	2	6	4	4
2	2	0	3	2	4
3	6	3	0	2	4
4	4	2	2	0	4
5	4	4	4	4	0

Funkce ρ_2

ρ_2	1	2	3	4	5
1	0	5	6	5	3
2	5	0	5	8	4
3	6	5	0	5	3
4	5	8	5	0	4
5	3	4	3	4	0

Dokážeme, že ρ_1 není metrika a ρ_2 je.

ρ_1 nesplňuje trojúhelníkovou nerovnost, totiž $\rho_1(1,3) = 6 > 5 = \rho_1(1,2) + \rho_1(2,3)$.

Naopak, přiřadíme-li bodům 1, 2, 3, 4, 5 souřadnice v $\mathbb{R}^2$: $1 = (0,3)$, $2 = (4,0)$, $3 = (0,-3)$, $4 = (-4,0)$ a $5 = (0,0)$, odpovídá funkce ρ_2 přesně eukleidovské vzdálenosti příslušných dvojic bodu, tedy z povídání o podprostorech plyne, že ρ_2 je metrika.

3. úloha

Nalezněte příklad metrického prostoru, kde neexistuje střed nějaké úsečky. Tj. nalezněte metrický prostor (X, ρ) a dva body $x, y \in X$ takové, že neexistuje $s \in X$, že $\rho(x,s) = \rho(y,s) = \frac{\rho(x,y)}{2}$.

Stačí uvážit dvojbodový prostor $X = \{x, y\}$ s metrikou $\rho(x,x) = \rho(y,y) = 0$ a $\rho(x,y) = = \rho(y,x) = 1$. Ověř si, že se jedná o metrický prostor. Potom neexistuje střed s úsečky xy, totiž by muselo být $\rho(x,s) = \frac{\rho(x,y)}{2} = \frac{1}{2}$. Nicméně vzdálenost $\frac{1}{2}$ k dispozici nemáme.

2. seriálová série

Téma:	Metrické prostory
Datum odeslání:	6. BŘEZNA 2006

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že pařížská metrika ze seriálu je vskutku metrikou.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nakreslete koule se středem v bodě $(1,0)$ a poloměrem 2 v $\mathbb{R}^2$ v newoyrské a v pařížské metrice. Připomeňme, že newyorskou metriku v $\mathbb{R}^2$ jsme v minulém dílu seriálu definovali jako

$$\rho_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť $X = \{(0,0)\} \cup B_{\rho_e}((0,2), 1)$ je podmnožina $\mathbb{R}^2$. Dívejme se na X jako na metrický prostor (X, ρ), kde ρ je eukleidovská metrika zúžená na množinu X. O následujících množinách A, B, C rozhodněte, zda jsou otevřené či uzavřené podmnožiny X.

(i) $A = \{(x_1, x_2) \in X | x_1 = 0\}$
(ii) $B = \{(0,0)\}$
(iii) $C = B_\rho\left((0,2), \frac{1}{2}\right)$

Řešení 2. seriálové série

4. úloha

Dokažte, že pařížská metrika ze seriálu je vskutku metrikou.

Připomeňme, že pařížská metrika na $\mathbb{R}^n$ je definovaná jako:

$$\rho_p(x, y) = \rho_e(x, y)$$

pro x, y na stejné přímce s počátkem O a

$$\rho_p(x, y) = \rho_e(x, O) + \rho_e(O, y)$$

pro x, y a O neležící na stejné přímce, kde ρ_e je eukleidovská metrika.

Abychom dokázali, že se jedná o metriku, chceme ověřit, že

(i) $\forall x, y \in X : \rho_p(x, y) \geq 0$ a navíc $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(ii) $\forall x, y \in X : \rho_p(x, y) = \rho_p(y, x)$.
(iii) $\forall x, y, z \in X : \rho_p(x, y) + \rho_p(y, z) \geq \rho_p(x, z)$.

K první podmínce poznamenejme, že nezápornost ρ_p plyne z toho, že ρ_e je metrika, tedy nezáporná. Pokud $x = y$, potom x, y a O leží na téže přímce, tedy $\rho_p(x, y) = \rho_e(x, y) = 0$. Zbývá dokázat, že pokud je $\rho_p(x, y) = 0$, potom $x = y$. Všimněme si, že podle trojúhelníkové nerovnosti je $\rho_e(x, O) + \rho_e(O, y) \geq \rho_e(x, y)$, tedy z definice pařížské metriky dostáváme, že musí platit: $\rho_p(x, y) \geq \rho_e(x, y)$. Pokud $\rho_p(x, y) = 0$, potom $\rho_e(x, y) \leq 0$, tedy $\rho_e(x, y) = 0$, a tedy $x = y$, jelikož ρ_e je metrika.

Druhá podmínka je zřejmá ze symetrie definice (eukleidovské metriky).

V třetí podmínce rozlišíme několik případů.

Pokud x, y, z a O leží na společné přímce, potom pařížská metrika odpovídá eukleidovské metrice, odkud je podmínka splněna.

Nadále předpokládejme, že x, y, z a O neleží na téže přímce. Při důkazu, že je splněna první podmínka, jsme si (až na přeznačení) odvodili nerovnost

$$\rho_p(a, b) \geq \rho_e(a, b). \qquad (\heartsuit)$$

Analogickým způsobem se z nerovnosti $\rho_e(a, O) + \rho_e(O, b) \geq \rho_e(a, b)$ odvodí, že

$$\rho_p(a, b) \leq \rho_e(a, O) + \rho_e(O, b). \qquad (\spadesuit)$$

Jelikož x, y, z a O neleží na společné přímce, musí nastat alespoň jedna ze situací: x, y a O neleží na společné přímce nebo y, z a O neleží na společné přímce.

V první situaci: $\rho_p(x, y) + \rho_p(y, z) = \rho_e(x, O) + \rho_e(O, y) + \rho_p(y, z) \geq \rho_e(x, O) + \rho_e(O, y) + \rho_e(y, z) \geq \rho_e(x, O) + \rho_e(O, z) \geq \rho_p(x, z)$.

Analogicky v druhé: $\rho_p(x, y) + \rho_p(y, z) = \rho_p(x, y) + \rho_e(y, O) + \rho_p(O, z) \geq \rho_e(x, y) + \rho_e(y, O) + \rho_e(O, z) \geq \rho_e(x, O) + \rho_e(O, z) \geq \rho_p(x, z)$.

V obou případech v první nerovnosti využíváme ($\heartsuit$), v druhé trojúhelníkovou nerovnost pro eukleidovskou metriku a ve třetí nerovnosti ($\spadesuit$).

5. úloha

Nakreslete koule se středem v bodě $(1, 0)$ a poloměrem 2 v $\mathbb{R}^2$ v newoyrské a v pařížské metrice. Připomeňme, že newyorskou metriku v $\mathbb{R}^2$ jsme v minulém dílu seriálu definovali jako

$$\rho_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Nejprve se u newyorské metriky omluvíme, za její špatné připomenutí v zadání. V tomto zadání je už správně.

Mějme bod (z_1, z_2) v $\mathbb{R}^2$. Podle definice newyorské metriky je vzdálenost bodu (z_1, z_2) od bodu $(1, 0)$ rovna $|z_1 - 1| + |z_2|$. Chceme-li nakreslit kouli se středem v bodě $(1, 0)$ a poloměrem 2 v newyorské metrice, hledáme body (z_1, z_2) takové, že

$$|z_1 - 1| + |z_2| < 2.$$

Rozebráním možností $z_1 \geq 1$, $z_1 < 1$, $z_2 \geq 0$ a $z_2 < 0$ dostaneme snadno podmínky:

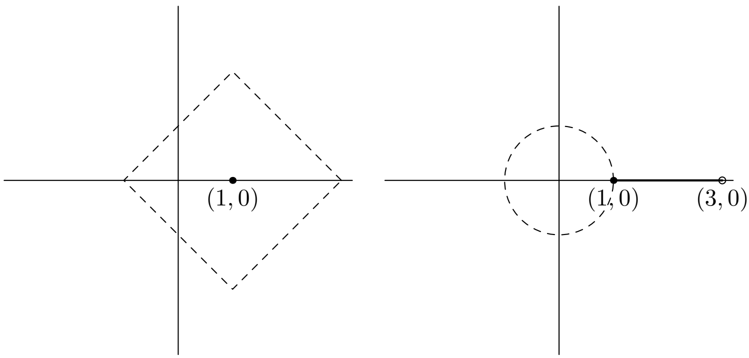
$$z_1 + z_2 < 3 | z_1 \geq 1, z_2 \geq 0,$$

$$z_1 - z_2 < 3 | z_1 \geq 1, z_2 < 0,$$

$$z_1 - z_2 > -1 | z_1 < 1, z_2 \geq 0,$$

$$z_1 + z_2 > -1 | z_1 < 1, z_2 < 0.$$

Odtud lze už obrázek snadno nakreslit jako průnik čtyř polorovin (bez hraničních přímek), podívej se na obrázek vlevo.



I u pařížské metriky budeme hledat body $z \in \mathbb{R}^2$, které mají od bodu $(1, 0)$ vzdálenost nejvýše 2. Takové body rozdělme na ty, které leží na přímce spojující počátek a $(1, 0)$ (tj. na x-ové ose), a na ostatní.

U bodů na x-ové ose tedy, splývají pařížská a eukleidovská metrika. Odtud má bod na x-ové ose vzdálenost od bodu $(1, 0)$ menší než 2 právě když jeho x-ová složka leží na intervalu $(-1, 3)$.

U bodů z mimo x-ovou osu je $\rho_p(z, (1, 0)) = \rho_e(z, (0, 0)) + \rho_e((0, 0), (1, 0)) = \rho_e(z, (0, 0)) + 1$. Tedy bod z neležící na x-ové ose má od bodu $(1, 0)$ vzdálenost menší než 2, právě když má vzdálenost menší než 1 od počátku. Odtud už snadno nakreslíme obrázek (vpravo).

6. úloha

Nechť $X = \{(0, 0)\} \cup B_{\rho_e}((0, 2), 1)$ je podmnožina $\mathbb{R}^2$. Dívejme se na X jako na metrický prostor (X, ρ), kde ρ je eukleidovská metrika zúžená na množinu X. O následujících množinách A, B, C rozhodněte, zda jsou otevřené či uzavřené podmnožiny X.

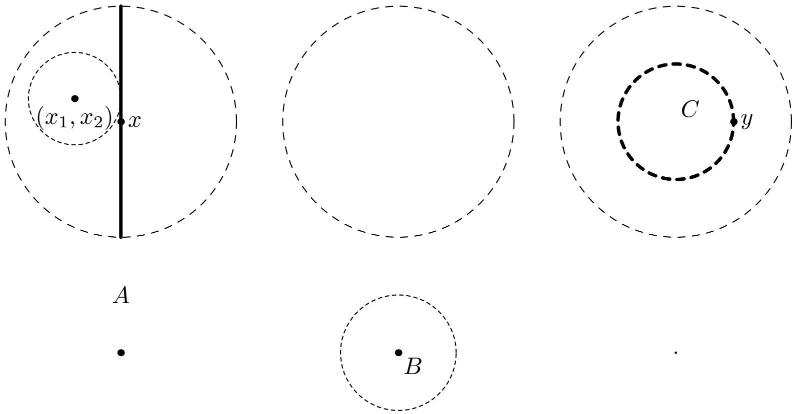
(i) $A = \{(x_1, x_2) \in X | x_1 = 0\}$

(ii) $B = \{(0, 0)\}$

(iii) $C = B_\rho\left((0, 2), \frac{1}{2}\right)$

Ukážeme, že A je uzavřená a není otevřená. B je uzavřená i otevřená. C je otevřená a není uzavřená.

Abychom ukázali, že A je uzavřená, stačí si podle definice uzavřené množiny uvědomit, že $X \setminus A$ je otevřená. Kdykoliv $(x_1, x_2) \in X \setminus A$, potom nutně $x_1 \neq 0$, odkud plyne, že celá koule se středem (x_1, x_2) a poloměrem $|x_1|$ leží v $X \setminus A$. Odtud je $X \setminus A$ otevřená.



Na druhou stranu A není otevřená, protože například k bodu $x = (0, 2)$ neexistuje koule obsahující tento bod, která by byla celá v A.

Množina B je uzavřená, jelikož se jedná o jednobodovou množinu, o kterých jsme si v seriálu zmiňovali, že jsou uzavřené.

Na druhou stranu, B je například koule se středem $(0, 0)$ a poloměrem $\frac{1}{2}$, protože žijeme jen v X! Tedy B je otevřená, o koulích jsme si v seriálu zmiňovali, že jsou otevřené.

Množina C je otevřená, protože se opět jedná o kouli.

Dokážeme, že C není uzavřená. K tomu stačí dokázat, že $X \setminus C$ není otevřená. Bod $y = (\frac{1}{2}, 2)$ leží v $X \setminus C$, ale každá koule se středem v tomto bodě zasahuje do množiny C, tedy $X \setminus C$ není otevřená.

3. seriálová série

Téma:	Metrické prostory
Datum odeslání:	15. května 2006

7. úloha (5 bodů)

Mějme metrický prostor $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou. Dokažte, že existuje indexová množina Γ a uzavřené množiny $F_\gamma; \gamma \in \Gamma$ takové, že $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma$ není uzavřená. Pokud víš[1] něco o velikostech množin, snaž se najít Γ co možná nejmenší.

[1] Pokud nic o velikostech množin nevíš, vůbec to nevadí. Plný počet bodů dostaneš i když úlohu správně vyřešíš pro libovolné Γ.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Dokažte, že funkce $\mathrm{id} : X \to X$ definovaná jako $\mathrm{id}(x) = x$ je spojitá.

9. ÚLOHA (5 BODŮ)

(a) Zobecněným neostroúhlým trojúhelníkem nazveme bod $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^6$ takový, že když označíme $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, potom buď body A, B, C leží na jedné přímce (některé můžou dokonce splývat), nebo tvoří trojúhelník, který není ostroúhlý. Dokažte, že množina všech zobecněných neostroúhlých trojúhelníků je uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^6$.

(b) Nechť $n \geq 4$. Konvexní mnohoúhelník nazveme hezký, pokud nemá žádný vnitřní úhel ostrý. Mějme dánu kružnici k v rovině. Pro n-úhelník $M = A_1A_2 \dots A_n$ s vrcholy na kružnici k označme pro $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ střed úsečky $A_{i-1}A_{i+1}$ jako S_i. Dále S_1 je střed A_nA_2 a S_n je střed $A_{n-1}A_1$. Nechť $f(M)$ je součet velikostí úseček $|A_iS_i|$, pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Mezi všemi hezkými n-úhelníky M s vrcholy na kružnici k najděte ty, které mají $f(M)$ minimální. Bez důkazu můžete předpokládat, že f je spojitá funkce (jako funkce z množiny $P \subset \mathbb{R}^{2n}$ do $\mathbb{R}$, kde body P odpovídají vrcholům hezkých n-úhelníků s vrcholy na k po souřadnicích).

Řešení 3. seriálové série

7. úloha **(43, 35, 3,19, 3,0)**

Mějme metrický prostor $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou. Dokažte, že existuje indexová množina Γ a uzavřené množiny $F_\gamma; \gamma \in \Gamma$ takové, že $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma$ není uzavřená. Pokud víš[2] něco o velikostech množin, snaž se najít Γ co možná nejmenší.

Prozradíme hlavní myšlenku, potom se budeme věnovat detailům. Najdeme nějakou množinu M, která není uzavřená (například otevřený interval $(0,1)$). Množina M je sjednocením svých bodů a ze seriálového textu víme, že body jsou uzavřené množiny. Tedy M lze napsat jako sjednocení uzavřených množin.

Pokud bys náhodou stál(a) o formální zápis, tak volíme $\Gamma = M$ a pro $\gamma \in M$ volíme $F_\gamma = \{\gamma\}$. Potom F_γ jsou uzavřené a $M = \bigcup_{\gamma \in M} F_\gamma$ uzavřená není.

Ti, kteří vědí něco o velikosti množin, nechť si rozmyslí, že množina

$$M = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$$

je spočetná (tedy nejmenší možná nekonečná) a není uzavřená (k tomu v ní chybí bod 0).

8. úloha **(12, 11, 4,42, 5,0)**

Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Dokažte, že funkce $\mathrm{id} : X \to X$ definovaná jako $\mathrm{id}(x) = x$ je spojitá.

[2] Pokud nic o velikostech množin nevíš, vůbec to nevadí. Plný počet bodů dostaneš i když úlohu správně vyřešíš pro libovolné Γ.

Spojitost nebudeme ověřovat přímo z definice, ale (trochu trikově) ji ověříme pomocí tvrzení o spojitých funkcích z textu seriálu (nicméně i z definice by bylo možné důkaz provést volbou $\delta = \varepsilon$).

Podle části (ii) tvrzení stačí ověřit:

Kdykoliv $(x_i) \to x$, potom $(\mathrm{id}(x_i)) \to \mathrm{id}(x)$.

Jenže $\mathrm{id}(x_i) = x_i$ a $\mathrm{id}(x) = x$. Tedy potřebujeme ověřit, že $(x_i) \to x$, což je přesně předpoklad, tím jsme s důkazem hotovi.

Podobný trikový důkaz lze provést z části (iii) či (iv) daného tvrzení s tím, že například $\mathrm{id}^{-1}(G) = G$.

9. úloha **(6, 4, 2,00, 2,0)**

(a) Zobecněným neostroúhlým trojúhelníkem nazveme bod $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^6$ takový, že když označíme $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, potom buď body A, B, C leží na jedné přímce (některé můžou dokonce splývat), nebo tvoří trojúhelník, který není ostroúhlý. Dokažte, že množina všech zobecněných neostroúhlých trojúhelníků je uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^6$.

(b) Nechť $n \geq 4$. Konvexní mnohoúhelník nazveme hezký, pokud nemá žádný vnitřní úhel ostrý. Mějme dánu kružnici k v rovině. Pro n-úhelník $M = A_1A_2 \dots A_n$ s vrcholy na kružnici k označme pro $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ střed úsečky $A_{i-1}A_{i+1}$ jako S_i. Dále S_1 je střed A_nA_2 a S_n je střed $A_{n-1}A_1$. Nechť $f(M)$ je součet velikostí úseček $|A_iS_i|$, pro $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Mezi všemi hezkými n-úhelníky M s vrcholy na kružnici k najděte ty, které mají $f(M)$ minimální. Bez důkazu můžete předpokládat, že f je spojitá funkce (jako funkce z množiny $P \subset \mathbb{R}^{2n}$ do $\mathbb{R}$, kde body P odpovídají vrcholům hezkých n-úhelníků s vrcholy na k po souřadnicích).

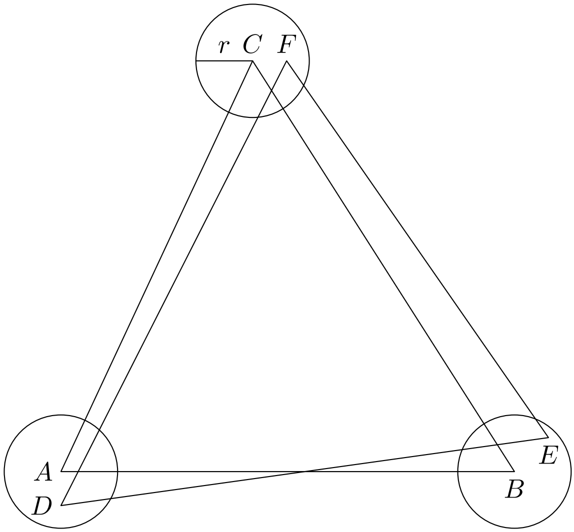
(a) Označme M množinu všech zobecněných neostroúhlých trojúhelníků a označme $G = \mathbb{R}^6 \setminus M$. Podle definice uzavřené množiny máme dokázat, že G je otevřená množina.

Mějme bod $x = (a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2) \in G$ a označme $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$. Abychom dokázali, že G je otevřená musíme dokázat, že existuje $r > 0$, že celá koule $B(x, r)$ se středem x a poloměrem r je uvnitř G.

Podle definice množiny M je ABC ostroúhlý trojúhelník (body A, B a C nesmí ani ležet na jedné přímce ani tvořit neostroúhlý trojúhelník).

Nyní důkaz dokončíme raději neformálně ve snaze, aby byl pochopitelný. Základní myšlenka je, že když dovolíme, aby se body A, B a C posunuly jen o málo (na body D, E a F), tak trojúhelník DEF stále bude ostroúhlý.

Označme α, β, $\gamma < 90°$ vnitřní úhly v trojúhelníku ABC. Zvolíme $r > 0$ dostatečně malé. Uvědomíme si, že pro takové dostatečně malé r je už celá koule $B(x, r)$ uvnitř G. Mějme $y \in B(x, r)$, $y = (d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2)$ odpovídá trojúhelníku DEF. Souřadnice bodů D, E a F se od bodů A, B a C liší o méně než r, tudíž se i vnitřní úhly δ, ε a φ nebudou příliš lišit od úhlů α, β a γ. Je-li tedy r dostatečně malé, potom jsou stále všechny úhly δ, ε, φ, vnitřní úhly trojúhelníku DEF, menší než $90°$, tedy DEF je ostroúhlý trojúhelník, odkud $y \in G$.



(b) Na začátku se za tuto úlohu omluvíme, jelikož byla původně zamýšlena o poznání lehčí; důležitou součástí mělo být pochopit část týkající se kompaktnosti a geometrická část měla být jednoduchá. Nicméně geometrická část se ukázala být těžší, než jsme původně předpokládali.

Pro celé řešení úlohy budeme předpokládat[3], že některé po sobě jdoucí vrcholy mohou v mnohoúhelníku splývat. Po tomto zobecnění bude pro nás hezkým mnohoúhelníkem takový, uvnitř něhož leží střed kružnice k (rozmysli si, že tato podmínka odpovídá podmínce „býti hezký“ pro mnohoúhelníky bez splývajících vrcholů). Jako řešení úlohy nám nakonec vyjdou pravidelné mnohoúhelníky (v nichž vrcholy nesplývají), tudíž opravdu dostaneme takové řešení, jaké požadujeme.

Jak je naznačeno v zadání úlohy, přiřadíme hezkým mnohoúhelníkům s vrcholy na k množinu $P \subset \mathbb{R}^{2n}$. Máme-li mnohoúhelník $M = A_1A_2\dots A_n$, přiřadíme[4] takovému mnohoúhelníku bod $p_M \in \mathbb{R}^{2n}$ tak, že má-li bod A_i souřadnice (x_i, y_i), potom bod p_M bude mít souřadnice $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$. Definujeme:

$$P = \{p_M | M \text{ je hezký mnohoúhelník s vrcholy na } k\}\,.$$

Definujme ještě:

$$Q = \{p_M | M \text{ je mnohoúhelník obsahující ve svém vnitřku } S\}$$

a

$$R = \{p_M | M \text{ je mnohoúhelník s vrcholy na } k\}\,.$$

Tedy $P = Q \cap R$.

[3] Tento předpoklad je nutný k tomu, aby nějaké vhodné množiny byly kompaktní.

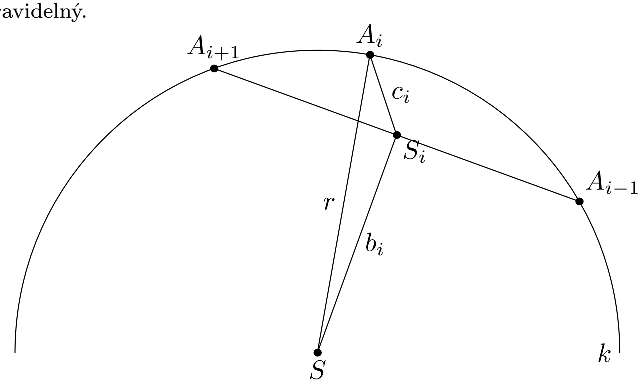
[4] Často budeme mnohoúhelník M a bod p_M ztotožňovat, abychom se neztratili ve formalismu.

Naprosto standardním způsobem (který se cvičil v části (a)) se dokáže, že Q je uzavřená množina. Přístupem stejným jako v textu seriálu (příklad o trojúhelníku maximálního obsahu) se dokáže, že R je uzavřená. Tedy i $P = Q \cap R$ je uzavřená. Množina P je samozřejmě také omezená, jelikož R je omezená (opět se použije stejný přístup jako z textu seriálu).

Nyní můžeme použít Heine-Borel-Lebesgueovu větu a dostáváme, že P je kompaktní. Podle zadaní můžeme použít, že $f : P \to \mathbb{R}$ je spojitá, odtud je i $-f$ spojitá (rozmysli si). Tedy, podle věty o kompaktnosti, $-f$ nabývá na P svého maxima, což je ale totéž jako, že f nabývá na P svého minima.

Odtud víme, že alespoň jeden hezký n-úhelník s vrcholy na K, pro něž je $f(M)$ minimální, existuje.

Nyní přijde druhá, geometrická, část úlohy. Dokážeme, že pokud je $f(M)$ minimální, potom M musí být pravidelný.



Označme S střed kružnice k a r poloměr k. Dále pro daný hezký mnohoúhelník M s vrcholy na k ještě označme $b_i = |SS_i|$ a $c_i = |S_iA_i|$. Platí tedy, že $f(M) = c_1 + c_2 + \cdots c_n$. Podle trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelníky A_iS_iS (délky úseček) platí $b_i + c_i \geq r$, neboli $c_i \geq r - b_i$. Odtud dostáváme:

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} c_i \geq n \cdot r - \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Označme ještě

$$g(M) = \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

tedy $f(M) \geq n \cdot r - g(M)$.

Nyní se budeme snažit maximalizovat g. Kvůli špatnému odhadu obtížnosti úlohy budeme ještě potřebovat, že funkce g je spojitá. Mohli bychom sem sice napsat formální důkaz, ale asi by nebyl nikomu ku prospěchu, tudíž ho vynecháme a dovolíme si předpokládat spojitost g. Potom podle věty o kompaktnosti, nabývá g na množině P svého maxima. Zbytek nám poví následující lemma:

Lemma. Nechť M je hezký mnohoúhelník s vrcholy na k. Potom $g(M)$ je maximální (na P), právě když nastane jedna z následujících dvou možností:

(i) n je liché a M je pravidelný.

(ii) n je sudé, $M = A_1A_2 \ldots A_n$ a oba mnohoúhelníky $A_1A_3A_5 \ldots A_{n-1}$ a $A_2A_4 \ldots A_n$ jsou pravidelné.

Než lemma dokážeme (důkaz zabere trochu místa), ukážeme si, jak z něho plyne tvrzení úlohy.

Předpokládejme, že M není pravidelný. Označme N pravidelný n-úhelník s vrcholy na k (podle lemmatu je pak jistě $g(N)$ maximální). Potom pokud $g(M)$ není maximální, platí:

$$f(M) \geq n \cdot r - g(M) > n \cdot r - g(N) = f(N),$$

první nerovnost jsme odvodili již dříve, druhá nerovnost plyne z toho, že $g(M)$ není maximální. Rovnost na závěr plyne z toho, že pro N pravidelný je trojúhelník SA_iS_i degenerovaný v úsečku. Pokud $g(M)$ je maximální, potom podle lemmatu (M není pravidelný) dostáváme, že n je sudé a $A_1A_3A_5\ldots A_{n-1}$ a $A_2A_4\ldots A_n$ jsou pravidelné, ale $|A_1A_2| \neq |A_2A_3|$, odkud například body A_1, S_1 a S neleží na přímce, tedy

$$f(M) > n \cdot r - g(M) = n \cdot r - g(N) = f(N).$$

V obou případech tedy platí $f(M) > f(N)$.

Tedy pokud M není pravidelný, potom $f(M)$ není minimální, odtud plyne, že řešením úlohy jsou pravidelné n-úhelníky (již dříve jsme dokázali, že řešení musí existovat).

Zbývá tedy dokázat lemma.

Víme, že maximum existuje, tudíž stačí dokázat (♡), že pokud M není tvaru podle znění lemmtu, potom lze g zvětšit, a že (♠) všechny mnohoúhelníky z bodu (ii) mají stejnou hodnotu funkce g.

Pro jednoduchost vyjadřování si mnohoúhelník M očíslujeme cyklicky modulo n, tj. bod A_k označíme ještě jako bod A_{k-n}, A_{k+n}, A_{k-2n}, A_{k+2n}, … Nyní dokážeme:

(♣) Pokud existuje A_i, že $|A_iA_{i-2}| \neq |A_iA_{i+2}|$, potom lze g zvětšit.

Bez újmy na obecnosti buď $|A_iA_{i+2}| < |A_iA_{i-2}|$. Rozlišme nyní dvě možnosti:

(A) Body A_i a A_{i-1} nesplývají.

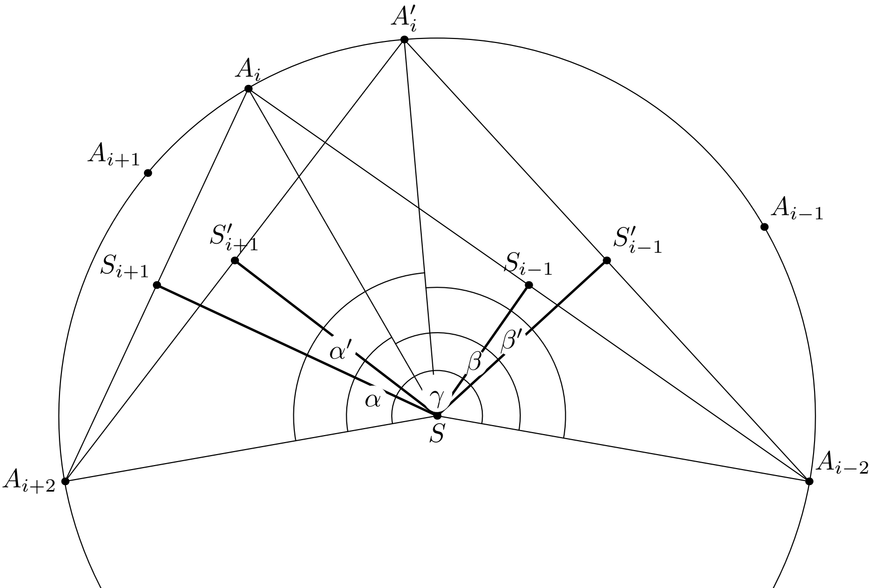
Zvolme bod A_i' mezi A_i a A_{i-1} tak, že je blíže středu oblouku $A_{i+2}A_{i-2}$ než A_i. Položme pro všechny ostatní vrcholy $A_j' = A_j$ (kde $j \neq i$) a označme $M' = A_1'A_2'\ldots A_n'$ (opět ho dále značíme cyklicky modulo n). Chceme dokázat, že $g(M') > g(M)$, neboli $g(M') - g(M) > 0$. Označme si ještě S_j' střed úsečky $A_{j-1}A_{j+1}$. Protože se M a M' liší pouze v bodě A_i a A_i', dostáváme, že $S_j = S_j'$ pro $j \neq i-1, i+1$. Nyní dostáváme:

$$g(M') - g(M) = \sum_{j=1}^{n} |SS_j'| - \sum_{j=1}^{n} |SS_j| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |SS_j'| - \left(\sum_{j\neq i-1,i+1} |SS_j'| \right) - |SS_{i-1}| - |SS_{i+1}| =$$

$$= |SS_{i-1}'| + |SS_{i+1}'| - (|SS_{i-1}| + |SS_{i+1}|).$$

Stačí tedy dokázat, že $|SS_{i-1}'| + |SS_{i+1}'| > |SS_{i-1}| + |SS_{i+1}|$.



Označme $\gamma = |\sphericalangle A_{i-2}SA_{i+2}|$, s tím, že tento úhel měříme po oblouku obsahující body A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, tedy může být i větší než $180°$ (je vždy menší než $360°$). Dále označme

$$\alpha = |\sphericalangle A_{i+2}SA_i|, \qquad \alpha' = |\sphericalangle A_{i+2}SA'_i|,$$

$$\beta = |\sphericalangle A_{i-2}SA_i|, \qquad \beta' = |\sphericalangle A_{i-2}SA'_i|,$$

kde opět dovolujeme úhly větší než $180°$. Platí tedy, že $\alpha + \beta = \gamma = \alpha' + \beta'$. Navíc platí $|\alpha - \beta| > |\alpha' - \beta'|$, jelikož A'_i je blíže středu oblouku $A_{i-2}A_{i+2}$ než A'_i. Potom podle definice goniometrických funkcí platí:

$$|SS'_{i+1}| = r\cos\frac{\alpha'}{2}, |SS'_{i-1}| = r\cos\frac{\beta'}{2},$$

$$|SS_{i+1}| = r\cos\frac{\alpha}{2}, |SS'_{i-1}| = r\cos\frac{\beta}{2}.$$

Tedy namísto $|SS'_{i-1}| + |SS'_{i+1}| > |SS_{i-1}| + |SS_{i+1}|$, stačí dokázat, že

$$r\cos\frac{\alpha'}{2} + r\cos\frac{\beta'}{2} - r\cos\frac{\alpha}{2} - \cos r\frac{\beta}{2} > 0.$$

Dokazujme tedy:

$$r\cos\frac{\alpha'}{2} + r\cos\frac{\beta'}{2} - r\cos\frac{\alpha}{2} - r\cos\frac{\beta}{2} =$$

$$= r\left(2\cos\frac{\alpha'+\beta'}{4}\cos\frac{\alpha'-\beta'}{4} - 2\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\right) =$$

$$= 2r\cos\frac{\gamma}{4}\left(\cos\frac{\alpha'-\beta'}{4} - \cos\frac{\alpha-\beta}{4}\right) > 0.$$

V rovnosti mezi prvním a druhým řádkem jsme použili součtových vzorečků pro kosinus, u dalšího řádku pak faktu, že $\alpha'+\beta' = \gamma = \alpha+\beta$. V závěrečné nerovnosti pak využíváme toho, že $\frac{\gamma}{4} < 90°$, tedy $\cos\frac{\gamma}{4} > 0$, a $4\cdot 90° > |\alpha'-\beta'| > |\alpha-\beta|$. Kosinus je totiž sudá klesající funkce na intervalu $(-90°, 90°)$, tedy výraz v závorce je také kladný.

Tím jsme dokázali potřebnou nerovnost pro část (A).

(B) Body A_i a A_{i-1} splývají.

Část (B) nebudeme dělat tak podrobně jako část (A), protože se řeší podobným způsobem. Zmíníme jen hlavní rozdíl. Pokud body A_i a A_{i-1} splývají, potom z předpokladu $|A_iA_{i+2}| < |A_iA_{i-2}|$ dostaneme, že body A_i a A_{i-2} nesplývají, tedy ani A_{i-1} a A_{i-2}. Dále odvodíme, že musí být $|A_{i-1}A_{i+1}| < |A_{i-1}A_{i-3}|$, takže můžeme použít postup analogický části (A), jen pro $i-1$ namísto i.

Tím je (♣) dokázáno.

Z (♣) už poměrně snadno plyne (♡). Důkaz (♡) provedeme nepřímo, tj. budeme předpokládat, že g nelze zvětšit a odvodíme, že je M má tvar podle lemmatu. Podle (♣) tedy pro každé i platí $|A_iA_{i+2}| = |A_{i-2}A_i|$. Pokud je n sudé, plyne tedy odtud přímo, že $A_1A_3A_5\ldots A_{n-1}$ a $A_2A_4\ldots A_n$ jsou pravidelné. Je-li n liché, potom jsou kružnice k: A_1A_3, A_3A_5, …, $A_{n-2}A_n$, A_nA_2, A_2A_4, … $A_{n-1}A_1$ stejně dlouhé tedy délka každé z nich je $2r\frac{2\pi}{n}$ (pokryjeme jimi kružnici k dvakrát), odtud už plyne, že délka každého oblouku A_iA_{i+1} je $r\frac{2\pi}{n}$ (spočítej si), tudíž jsou všechny takové oblouky stejně dlouhé a M je pravidelný.

Dokázat (♠) je jednoduché, důkaz ponecháme na Tobě.

Tím jsme dokázali lemma a vyřešili celou úlohu.