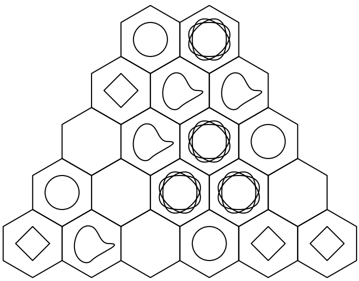
1. série

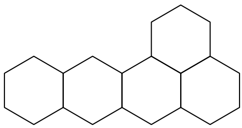
Téma: Soustředění

Datum odeslání: 10. října 2005

1. úloha (3 body)

Terka, Mirek, Martin a Tomáš společně hrají tantrix. Po skončené hře tantrixové kostičky obrátili rubem vzhůru a začali z nich skládat různé tvary. Nakonec poskládali trojúhelník beze špičky jako na obrázku vlevo. Kostičky rozdělili na pět skupin (podle čísel, která jsou napsána na rubové straně – na obrázku vyznačeno různými druhy výplně). Potom se dohodli, že si trojúhelník mezi sebe rozdělí na nějaké čtyři (souvislé) části. Každý ale chce mít z každé skupiny kostičku. Navíc všichni chtějí být originální, tedy mít jiný tvar než kdokoliv jiný a Martin by rád měl kousek stejného tvaru jako na obrázku vpravo. Pomozte Terce, Mirkovi, Martinovi a Tomášovi kostičky rozdělit.





2. úloha (3 body)

Během jedné hry si Michal, Lukáš, Aleš, Dino, Wiva a oba Honzové společně 10 minut povídali. Dino si všiml, že všichni dohromady řekli 1536 slov. Aleš zaznamenal, že toho Michal napovídal víc než všichni ostatní dohromady. Lukáš zjistil, že počet slov, které Michal řekl, je druhá mocnina přirozeného čísla. Honzové se shodli, že ciferný součet počtu slov, která Michal napovídal, se rovná sedmi. Wiva je zvídavá a ráda by zjistila, kolik slov Michal řekl. Pomozte jí tento počet zjistit.

3. úloha (3 body)

V autobuse společně na soustředění jedou Mája, Miro, Bebe, Jirka, Adam, Marek, Franta, Eman, Ondro a Petr. Každý se rád pochlubí tím, s kolika spolujezdci se zná. Franta tvrdí, že se zná se všemi, Marek tvrdí, že se zná se 6 spolujezdci, Mája, Miro, Bebe, Adam a Ondro prohlašují, že se znají se 4 spolujezdci. Petr se dvěma spolujezdci a Jirka a Eman jenom s jedním. Rozhodněte, jestli můžou mít všichni pravdu (předpokládejte, že znát se je symetrické, tj. když se Franta zná s Bebem, pak se i Bebe zná s Frantou).

4. úloha (5 bodů)

Víťa s Anšou se rozhodli, že se po soustředění vrátí z Bernartic do Prahy pěšky. Díky svému úžasnému orientačnímu smyslu ale skoro pořád bloudili. Šli tak, že vždy zvládli ujít 6 kilometrů správným směrem, a pak zabloudili. Bloudili a bloudili, a když zjistili, kde jsou, byli přesně v půli cesty z Bernartic k místu, kde se naposledy ztratili (předpokládejme, že správná cesta je zcela přímá, takže se pokaždé zorientovali uprostřed toho úseku cesty, který už ušli). A pak opět 6 kilometrů dokázali jít správným směrem, než opět začali bloudit[1]. Mohli Víťa a Anša tímto postupem někdy dojít do Prahy, která je vzdálená 130 kilometrů od Bernartic?

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Na seznamovačkách sedí n ($n \geq 6$) účastníků v kruhu[2]. Helča přichází s novou seznamovací hrou. Chce rozdělit účastníky do dvojic, ve kterých se budou seznamovat. Přitom si přeje, aby v každé dvojici byli účastníci ve vzdálenosti 3, tj. měli mezi sebou právě dva jiné účastníky. Zjistěte, pro která $n \geq 6$ se Helče dělení může povést.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Pavel se rozhodl, že uspořádá drobný turnaj ve scrabblu. Přihlásilo se mu 9 zájemců. Rozhodl se, že každou partii budou hrát tři hráči, tedy v jednom kole se budou hrát přesně tři partie. Turnaj bude mít čtyři kola. Pavel by byl moc rád, kdyby každý s každým hrál právě jednou. Rozhodněte, zda se Pavlovo přání může vyplnit[3].

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Během soustředkových večerů účastníci s oblibou tancují tučňáka. Jednoho dne se Evička, Škrečok, Zuzka, Mišo, Ondra, Mára a Jarda rozhodli tučňáka trochu vylepšit. Každý si zvolil nějaké místo. Dino a Michal střídavě hráli na kytaru sloku po sloce, přičemž první slokou začal Dino. Kdykoliv někdo dohrál sloku, někteří dva ze sedmice tanečníků si vyměnili svá místa. Když tučňák skončil, kupodivu stáli všichni na svých původních místech. Lze určit, kdo hrál poslední sloku?

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Během soustředění se na různé hry vytvářely různé skupinky účastníků. Tritas si pro zajímavost vypsal všechny skupinky, co kdy vznikly. Vypozoroval následující pravidla:

(P1) Nikdy se nestalo, že by byly S_1 a S_2 dvě různé skupinky takové, že všichni účastníci z S_1 by patřili i do S_2 (pro suchary: nechť S_1 a S_2 jsou skupinky, pokud platí $S_1 \subseteq S_2$, potom nutně $S_1 = S_2$).

(P2) Kdykoliv byly S_1 a S_2 dvě různé skupinky takové, že účastník u byl v obou skupinkách S_1 a S_2, potom existovala třetí skupinka, ve které nebyl účastník u a přitom v ní byli jen účastníci ze skupinek S_1 a S_2, ne nutně všichni (pro suchary: nechť S_1 a S_2 jsou skupinky, $S_1 \neq S_2$, $u \in S_1 \cap S_2$, potom existuje skupinka S_3 taková, že $S_3 \subseteq (S_1 \cup S_2) \setminus \{u\}$).

Pomozte Tritasovi dokázat, že už nutně platí i pravidlo:

(P) Pokud účastníci u a v byli spolu v nějaké skupince a také účastníci v a w byli dohromady v nějaké skupince, tak u a w byli spolu v nějaké skupince.

---

[1] Ze začátku tedy cesta vypadala takto: ušli 6 kilometrů, ztratili se a zorientovali se 3 kilometry daleko od Bernartic. Pak šli chvíli dobře, až došli na místo vzdálené 9 kilometrů od začátku. Potom ale opět zabloudili a zjistili, kde jsou, 4,5 kilometru od Bernartic. Pak došli do vzdálenosti $10,5$ kilometru správně, ztratili se, a tak pořád dál a dál …

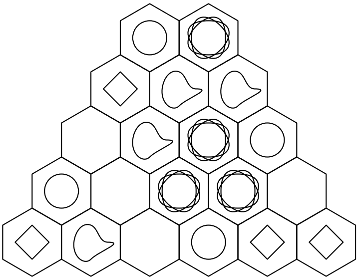
[2] Pro rýpaly na obvodu kruhu.

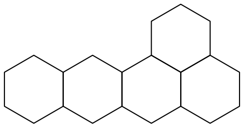
[3] Pro náročnější: Co kdyby se přihlásilo 16 zájemců, hrálo se ve čtyřech lidech na partii a dohromady bylo 5 kol? (Pro plný počet bodů stačí vyřešit první část úlohy.)

Řešení 1. série

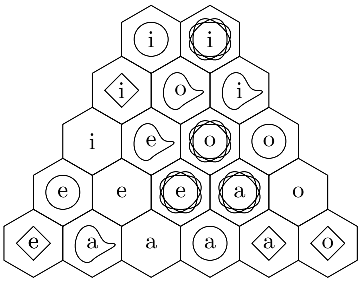
1. úloha **(154, 147, 2,86, 3,0)**

Terka, Mirek, Martin a Tomáš společně hrají tantrix. Po skončené hře tantrixové kostičky obrátili rubem vzhůru a začali z nich skládat různé tvary. Nakonec poskládali trojúhelník beze špičky jako na obrázku vlevo. Kostičky rozdělili na pět skupin (podle čísel, která jsou napsána na rubové straně – na obrázku vyznačeno různými druhy výplně). Potom se dohodli, že si trojúhelník mezi sebe rozdělí na nějaké čtyři (souvislé) části. Každý ale chce mít z každé skupiny kostičku. Navíc všichni chtějí být originální, tedy mít jiný tvar než kdokoliv jiný a Martin by rád měl kousek stejného tvaru jako na obrázku vpravo. Pomozte Terce, Mirkovi, Martinovi a Tomášovi kostičky rozdělit.





Možné řešení je znázorněno na obrázku (kostičky jsme označili podle druhého písmena ve jméně). Snadno si ověříš, že jsou splněny všechny podmínky zadání.



Poznámky k došlým řešením: Úkolem bylo najít nějaké vhodné rozdělení kostiček, což se podařilo většině řešitelů. Někteří však našli jedno řešení a tvrdili, že je jediné – což pořádně nezdůvodnili, dokonce to ani není pravda. Body jsem za to nestrhával, nicméně příště už opravovatel tak mírný být nemusí. Poučení: Tvrdím-li něco, co není na první pohled vidět, měl bych to umět obhájit.

2. úloha **(164, 162, 2,90, 3,0)**

Během jedné hry si Michal, Lukáš, Aleš, Dino, Wiva a oba Honzové společně 10 minut povídali. Dino si všiml, že všichni dohromady řekli 1536 slov. Aleš zaznamenal, že toho Michal napovídal víc než všichni ostatní dohromady. Lukáš zjistil, že počet slov, které Michal řekl, je druhá mocnina přirozeného čísla. Honzové se shodli, že ciferný součet počtu slov, která Michal napovídal, se rovná sedmi. Wiva je zvídavá a ráda by zjistila, kolik slov Michal řekl. Pomozte jí tento počet zjistit.

Víme, že Michal napovídal více než $\frac{1536}{2} = 768$ slov (řekl toho totiž více než všichni ostatní). Snadno ověříme, že mezi čísly 768 a 1536 leží pouze následující druhé mocniny přirozených čísel:

$$28^2 = 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521 = 39^2$$

Z těchto čísel má pouze jediné ciferný součet roven 7, a to 1024.

3. úloha **(143, 112, 2,36, 3,0)**

V autobuse společně na soustředění jedou Mája, Miro, Bebe, Jirka, Adam, Marek, Franta, Eman, Ondro a Petr. Každý se rád pochlubí tím, s kolika spolujezdci se zná. Franta tvrdí, že se zná se všemi, Marek tvrdí, že se zná se 6 spolujezdci, Mája, Miro, Bebe, Adam a Ondro prohlašují, že se znají se 4 spolujezdci. Petr se dvěma spolujezdci a Jirka a Eman jenom s jedním. Rozhodněte, jestli můžou mít všichni pravdu (předpokládejte, že znát se je symetrické, tj. když se Franta zná s Bebem, pak se i Bebe zná s Frantou).

Dokážeme, že všichni nemůžou mít pravdu. Pro spor nechť všichni pravdu mají. Označme d počet dvojic účastníků, kteří se navzájem znají. Započítáme-li za každého spolujezdce tolik, kolik zná ostatních spolujezdců, dostaneme $2d$ (každou dvojici máme započítanou dvakrát). Na druhou stranu, spočítáme-li tento počet přímo, dostaneme $9+6+4+4+4+4+4+2+1+1 = 39$. Nicméně 39 je liché číslo, tudíž nemůže být rovno $2d$, spor.

Poznámky k došlým řešením: Tato úloha byla velmi jednoduchá (součet stupňů vrcholů grafu je sudý), přesto se našlo nemálo řešitelů, kteří se snažili rozebrat možnosti. Bohužel ve většině případů nerozebrali úplně všechny a spokojili se s tím, že když jedna cesta nevede k cíli, potom ani žádná jiná tam nevede, což už ale nedokázali. Typicky vyloučili Frantu a následně Emana a Jirku (potud vše v pořádku), ale potom už Marka přidělili a) k pěti ostatním, kteří znají 5 lidí a nebo b) ke čtyřem z nich a k Petrovi a neuvážili druhou z variant. Takové řešení jsem nemohl považovat ani za částečné a ohodnotil jsem ho $0 + 0i$.

Proto si nejprve rozmyslete, zdali je opravdu nutné rozebírat všechny možnosti a není nějaké elegantnější řešení, a pokud přesto příklad řešíte rozborem možností je bezpodmínečně nutné otestovat všechny možnosti (nebo alespoň ty, které nejsou stejné až na označení).

4. úloha **(151, 93, 2,95, 3,0)**

Víťa s Anšou se rozhodli, že se po soustředění vrátí z Bernartic do Prahy pěšky. Díky svému úžasnému orientačnímu smyslu ale skoro pořád bloudili. Šli tak, že vždy zvládli ujít 6 kilometrů správným směrem, a pak zabloudili. Bloudili a bloudili, a když zjistili, kde jsou, byli přesně v půli cesty z Bernartic k místu, kde se naposledy ztratili (předpokládejme, že správná cesta je zcela přímá, takže se pokaždé zorientovali uprostřed toho úseku cesty, který už ušli). A pak opět 6 kilometrů dokázali jít správným směrem, než opět začali bloudit[4]. Mohli Víťa a Anša tímto postupem někdy dojít do Prahy, která je vzdálená 130 kilometrů od Bernartic?

[4] Ze začátku tedy cesta vypadala takto: ušli 6 kilometrů, ztratili se a zorientovali se 3 kilometry daleko od Bernartic. Pak šli chvíli dobře, až došli na místo vzdálené 9 kilometrů od začátku. Potom ale opět zabloudili a zjistili, kde jsou, 4,5 kilometru od Bernartic. Pak došli do vzdálenosti 10, 5 kilometru správně, ztratili se, a tak pořád dál a dál ...

Pokud Víťa s Anšou došli do Prahy, museli někdy překročit magickou hranici 100 km. Někde mezi 100 a 106 km od Bernartic se opět ztratili a když opět zjistili, kde jsou, byli mezi 50 a 53 km od Bernartic. To znamená, že se jim nikdy nepodařilo zůstat za touto magickou hranicí 100 km déle než do nejbližšího ztracení, a tedy nikdy nemohli dojít až do Prahy.

Čtenář si snadno může ověřit, že tutéž úvahu lze provést pro každý bod vzdálený od Bernartic více než 12 km.

Pro náročného čtenáře můžeme ukázat, že Víťa s Anšou se během svého putování libovolně přiblíží bodu vzdálenému 12 km od Bernartic, nikdy jej ale nepřekročí.

Nechť a_n označuje vzdálenost, na které se nacházeli, když po n-té ušli 6 km. Tedy $a_1 = 6, a_2 = 9, \dots, a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + 6$. Z toho, že

$$a_1 < 12$$

$$a_{n-1} < 12 \Rightarrow a_n < 12$$

vidíme, že pro každé n je $a_n < 12$.[5]

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.[6]. Že tato limita existuje plyne z toho, že $\{a_n\}$ je rostoucí shora omezená posloupnost (rozmysli si, že $\{a_n\}$ je rostoucí). Pak musí platit $A = \frac{A}{2} + 6$ a takové číslo A existuje jen jedno, a to číslo 12.

Poznámky k došlým řešením: Úloha byla lehká. Úplně všem řešitelům došlo, že Víťa s Anšou jsou odsouzeni k věčnému bloudění, takže body jsem rozděloval hlavně kvality důkazu této skutečnosti.

Protože úloha byla vcelku jednoduchá, trval jsem na přesném zdůvodnění všech kroků. Mnoha lidem jsem strhl dva body za „odvození" vztahu pro i-tý člen posloupnosti vzdáleností Víti a Anši pomocí prvních pár členů a tří teček. Něco takového si můžete dovolit jenom když je předcházejícího zápisu nad slunce jasné, jak vypadá obecná situace – celkem hezký byl třeba zápis pomocí řetězu zlomků:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{0+6}{2}+6}{2}\atop{\vdots} \quad +6}{2}$$

Na závěr poznámku o limitách: Prosím, pamatujte v podobných případech na české úsloví „jít s kanónem na vrabce". Limity jsou užitečné, ale asi 98% úloh v Praseti se bez znalosti limit a analýzy obejde. Používat limitu k důkazu, že $1 - \frac{1}{2^n} < 1$ je poněkud přehnané a koleduje si o záporné imaginární body.

Navíc se skoro nikdo z limitících a nekonečna sčítajících lidí neobtěžoval poznamenat, že to dělá proto, že posloupnost částečných součtů a_i je rostoucí. Často prostě prohlásil, že limita je 12 a proto Víťa s Anšou nikdy do Prahy nedojdou. Pokud by ale a_n nebyla rostoucí, věci by se mohly zkomplikovat a limita by nám nepomohla. Příklad: Geometrická řada $a_0 = 100, q = -\frac{1}{2}$. Dosazením do vzorečku dostaneme součet celé řady rovný $100\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{200}{3} \doteq 67$. Už první člen této řady je ale roven 100, což je podstatně více, než 67. Problém.

[5] Podrobný důkaz nechť čtenář provede matematickou indukcí.

[6] Tento zápis znamená: Anša s Víťou si mohou zvolit libovolnou vzdálenost ϵ a rozhodnout se dojít do bodu vzdáleného od Bernartic nejméně $A - \epsilon$ a nejvýš $A + \epsilon$. Pro každé ϵ existuje n takové, že ztratí-li se alespoň n-krát, budou těsně před každým následujícím ztracením někde ve vysněném intervalu $(A - \epsilon, A + \epsilon)$.

5. úloha (147, 110, $3{,}01$, $3{,}0$)

Na seznamovačkách sedí n ($n \geq 6$) účastníků v kruhu[7]. Helča přichází s novou seznamovací hrou. Chce rozdělit účastníky do dvojic, ve kterých se budou seznamovat. Přitom si přeje, aby v každé dvojici byli účastníci ve vzdálenosti 3, tj. měli mezi sebou právě dva jiné účastníky. Zjistěte, pro která $n \geq 6$ se Helče dělení může povést.

Má-li se dělení do dvojic Helče podařit, musí být nutně n sudé. Ukážeme naopak, že je-li $n \geq 6$ sudé, potom se jí dělení už může podařit. Nejprve si Helča očísluje účastníky čísly 1, 2, ... , n po směru hodinových ručiček. Rozlišme nyní dvě možnosti:

(i) n je dělitelné třemi. Tudíž $n = 6k$ pro nějaké $k \geq 1$ (jelikož n je sudé). Utvoří-li Helča dvojice účastníků $(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$, znamená to, že zatím správně rozdělila šest po sobě jdoucích účastníků do dvojic. Jelikož je n dělitelné šesti, může tento postup opakovat – vždy rozdělí do dvojic šestici po sobě jdoucích účastníků.

(ii) n není dělitelné třemi, tj. $n = 2l$, kde l není dělitelné třemi. V tomto případě si Helča očísluje účastníky o něco rafinovaněji. Každý účastník dostane dohromady tři čísla. Jedno číslo $i \in \{1, 2, \ldots n\}$, Helča mu ještě přiřadí čísla $n + i$ a $2n + i$. Takto použije čísla od 1 do $3n$. Nyní dá do dvojice účastníky s čísly $6t - 3$ a $6t$, pro $t \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Rozmysli si, že nikdy nedá žádného účastníka do dvou dvojic (jen jedno jeho číslo je dělitelné třemi), a tedy každý účastník musí být v nějaké dvojici – Helča vytvořila l dvojic z $n = 2l$ účastníků. Tím dostává požadované rozdělení.

6. úloha (148, 130, $4{,}42$, $5{,}0$)

Pavel se rozhodl, že uspořádá drobný turnaj ve scrabblu. Přihlásilo se mu 9 zájemců. Rozhodl se, že každou partii budou hrát tři hráči, tedy v jednom kole se budou hrát přesně tři partie. Turnaj bude mít čtyři kola. Pavel by byl moc rád, kdyby každý s každým hrál právě jednou. Rozhodněte, zda se Pavlovo přání může vyplnit[8].

Pavlovi se přání může vyplnit. Napíše si hráče do tabulky, jako je na obrázku vlevo. První kolo budou společně hrát hráči ve stejném řádku, druhé kolo ve stejném sloupci, třetí kolo budou hrát společně hráči, jimž je přiřazeno stejné písmeno podle obrázku uprostřed a čtvrté kolo se bude hrát podle pravého obrázku.

•	•	•
•	•	•
•	•	•

C	B	A
B	A	C
A	C	B

A	C	B
B	A	C
C	B	A

Sám už jistě ověříš, že takto Pavel splní vše, co chtěl.

[7] Pro rýpaly na obvodu kruhu.

[8] Pro náročnější: Co kdyby se přihlásilo 16 zájemců, hrálo se ve čtyřech lidech na partii a dohromady bylo 5 kol? (Pro plný počet bodů stačí vyřešit první část úlohy.)

7. úloha **(81, 25, 1,52, 0,0)**

Během soustředkových večerů účastníci s oblibou tancují tučňáka. Jednoho dne se Evička, Škrečok, Zuzka, Mišo, Ondra, Mára a Jarda rozhodli tučňáka trochu vylepšit. Každý si zvolil nějaké místo. Dino a Michal střídavě hráli na kytaru sloku po sloce, přičemž první slokou začal Dino. Kdykoliv někdo dohrál sloku, někteří dva ze sedmice tanečníků si vyměnili svá místa. Když tučňák skončil, kupodivu stáli všichni na svých původních místech. Lze určit, kdo hrál poslední sloku?

Mějme n účastníků tancujících tučňáka. Účastníky si očíslujeme $1, 2, \dots n$ a stejně tak si očíslujeme i místa, na kterých účastníci tančí (první účastník tančí na prvním místě, druhý na druhém a tak dále).

Označme si $\pi(k)$ pozici k-tého účastníka v nějaké chvíli. Bude nás zajímat, zda jsme schopni z funkce $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$, které se učeně říká permutace, vydedukovat, kdo hrál naposledy na kytaru.

Bude nás zajímat výraz:

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \prod_{0 \le i < j \le n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i},$$

kde velké Π značí násobení (product) přes všechna $i < j$.

Protože π je prosté a na, musí být $\operatorname{sgn}(\pi) = \pm 1$ (rozmysli si) a zajímá nás tedy jenom znaménko.

Vidíme, že pokud je π identita, tak se $\operatorname{sgn}(\pi)$ rovná jedné. Uvažme teď, co se stane se $\operatorname{sgn}(\pi)$ po odehrání jedné sloky. Dva z účastníků (označme je x a y, bez újmy na obecnosti $x < y$) si vymění místa, čímž dostaneme novou permutaci π'.

Označme si $f(i, j) = \pi(j) - \pi(i)$ a zkoumejme teď výrazy $f'(i, j) = \pi'(j) - \pi'(i)$ pro $i < j$. Pokud i, j jsou obě různá od x, y, je $f(i, j) = f'(i, j)$. Dále určitě $f'(x, y) = \pi'(y) - \pi'(x) = \pi(x) - \pi(y) = -f(x, y)$.

Pokud $i < x$, platí $f'(i, y) = \pi'(y) - \pi'(i) = \pi(x) - \pi(i) = f(i, x)$ a podobně $f'(i, x) = f(i, y)$. Proto $f'(i, y)f'(i, x) = f(i, x)f(i, y)$. Obdobně pro $j > y$ máme $f'(x, j)f(y, j) = f(y, j)f(x, j)$. Pokud je $x < k < y$, máme:

$$f'(x, k) = \pi'(k) - \pi'(x) = \pi(k) - \pi(y) = -f(k, y)$$
$$f'(k, y) = \pi'(y) - \pi'(k) = \pi(x) - \pi(k) = -f(x, k)$$
$$f'(x, k)f'(k, y) = f(x, k)f(k, y)$$

Tím jsme rozebrali všechny možnosti volby $i < j$ (každou právě jednou) a vidíme, že platí:

$$\prod_{0 \le i < j \le n} f'(i, j) = - \prod_{0 \le i < j \le n} f(i, j)$$

Potom ovšem $\operatorname{sgn}(\pi') = -\operatorname{sgn}(\pi')$. Po každé zahrané sloce tedy permutace „změní znaménko“. To ale znamená, že celkem musel být odehrán sudý počet slok, neboť počáteční i koncová permutace jsou stejné. Poslední sloku tedy určitě hrál Michal.

8. úloha **(45, 7, 0,53, 0,0)**

Během soustředění se na různé hry vytvářely různé skupinky účastníků. Tritas si pro zajímavost vypsal všechny skupinky, co kdy vznikly. Vypozoroval následující pravidla:

(P1) Nikdy se nestalo, že by byly S_1 a S_2 dvě různé skupinky takové, že všichni účastníci z S_1 by patřili i do S_2 (pro suchary: nechť S_1 a S_2 jsou skupinky, pokud platí $S_1 \subseteq S_2$, potom nutně $S_1 = S_2$).

(P2) Kdykoliv byly S_1 a S_2 dvě různé skupinky takové, že účastník u byl v obou skupinkách S_1 a S_2, potom existovala třetí skupinka, ve které nebyl účastník u a přitom v ní byli jen účastníci ze skupinek S_1 a S_2, ne nutně všichni (pro suchary: nechť S_1 a S_2 jsou skupinky, $S_1 \neq S_2$, $u \in S_1 \cap S_2$, potom existuje skupinka S_3 taková, že $S_3 \subseteq (S_1 \cup S_2) \setminus \{u\}$).
Pomozte Tritasovi dokázat, že už nutně platí i pravidlo:

(P) Pokud účastníci u a v byli spolu v nějaké skupince a také účastníci v a w byli dohromady v nějaké skupince, tak u a w byli spolu v nějaké skupince.

Nejprve pomůžeme Tritasovi dokázat, že platí následující pravidlo:

(P2') Nechť S_1, S_2 jsou dvě skupinky takové, že $S_1 \neq S_2$. Účastník u je v obou skupinkách S_1 a S_2, účastník v je ve skupince S_1, ale není v S_2. Potom existuje skupinka S taková, že účastník u je ve skupince S, účastník v v této skupince není, a přitom $S \subseteq (S_1 \cup S_2)$.

Pravidlo (P2') dokážeme sporem. Předpokládejme, že neplatí pro skupinky S_1, S_2, kde $|S_1 \cup S_2|$ je minimální[9]. Podle $(P2)$ existuje skupinka S_3 taková, že $S_3 \subset (S_1 \cup S_2) \setminus \{u\}$, avšak $v \notin S_3$. Potom u patří do $S_2 \setminus S_3$, a jelikož $S_3 \not\subseteq S_1$, existuje $w \in S_2 \cap S_3$. Navíc snadno $|S_2 \cup S_3| < |S_1 \cup S_2|$, což znamená, že pravidlo (P2') platí pro množiny S_1, S_2, $w \in S_1 \cap S_2$ a $u \in S_2 \setminus S_3$. Tedy existuje skupinka S_4 taková, že $u \in S_4 \subseteq (S_2 \cup S_3) \setminus \{g\}$. Opět, $|S_1 \cup S_4| < |S_1 \cup S_2|$, odkud použitím (P2') na S_1, S_4, $u \in S_1 \cup S_4$ a $v \in S_1 \setminus S_4$ získáme požadovanou skupinku S, což je spor s předpokladem, že S neexistuje.

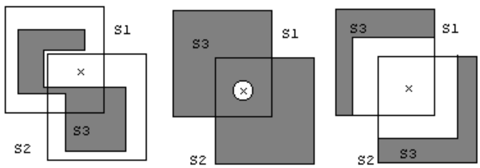
Nyní už dokážeme Tritasem navrhované pravidlo (P). Nejprve si vyberme skupinky S_1 a S_2 tak, že $u \in S_1$, $w \in S_2$ $S_1 \cup S_2 \neq \emptyset$ a $|S_1 \cup S_2|$ je minimální možné. Pro spor předpokládejme, že neexistuje skupinka obsahující u a w zároveň. Nechť $x \in S_1 \cup S_2$, podle (P2') existuje skupinka S_3, že $u \in S_3 \subseteq (S_1 \cup S_2) \setminus \{h\}$. Navíc $w \notin S_3$. Jelikož $S_3 \not\subseteq S_1$, existuje účastník $y \in S_1 \setminus S_2$, $y \in S_3$. Opět podle (P2') dostaneme skupinku S_4, že $w \in S_4 \subseteq (S_2 \cup S_3) \setminus \{y\}$. Potom $S_4 \not\subseteq S_2$ a $S_4 \cup (S_3 \setminus S_2) \neq \emptyset$. Potom také $S_1 \cap S_4 \neq \emptyset$. Ale dále $|S_1 \cup S_4| < |S_1 \cup S_2|$, což je kýžený spor s volbou S_1 a S_2.

Poznámky k došlým řešením: Většina řešitelů se dopustila jednoho z následujících neodpustitelných omylů při čtení zadání:

(i) Domnívali se, že písmenko u v podmínce $(P2)$ označuje téhož účastníka jako písmenko u ve formulaci podmínky (P). Zde mi nezbývá než připomenout, že matematikové používají písmena jako proměnné, tedy znaky, které mohou označovat libovolný prvek (v našem případě účastníka) daných vlastností. Podrobněji k tomuto tématu v části „Úvod do řešení matematických úloh“.

(ii) Nesprávně pochopili podmínku $(P2)$. Tu lze znázornit obrázkem nalevo, mnozí jí však porozuměli buďto tak, že množina $S3$, o jejíž existenci se zde hovoří, obsahuje všechny prvky z $S1$ a $S2$ kromě u, tedy že $S3 = (S1 \cup S2) \setminus \{u\}$ (obrázek uprostřed), nebo že $S3 = (S1 \cup S2) \setminus (S1 \cap S2)$ (pravý obrázek).

[9] Pro množinu A symbol $|A|$ značí počet prvků množiny A


S1
S2
S3
S1
S2
S3
S1
S2
S3
S3