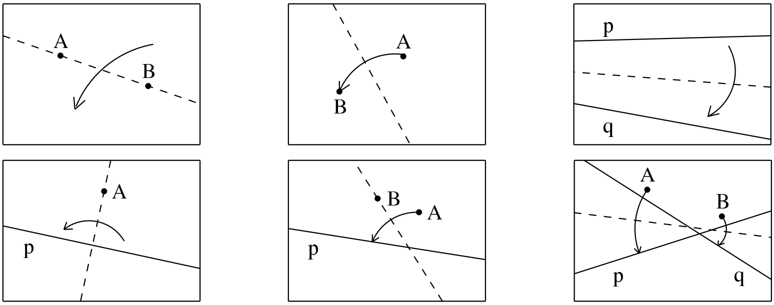
Povídání k 6. sérii

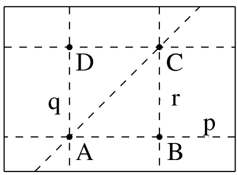
Tématem šesté série je přehýbání. Budete mít za úkol sestrojit všechno možné jen pomocí ohýbání papíru, podobně jako při origami. Ovšem protože jsme seminář matematický a ne umělecký, radši se dohodneme, jaké ohýbání bude dovolené. Určíme si šest axiomů přehýbací geometrie, tedy šest akcí, které můžeme provádět. Jaké to budou? Takové, které by člověk očekával (případně na ně časem přišel) a které šikovné ruce zvládnou. Doporučuji mít odteď při ruce kus papíru a vše si vyzkoušet. Takže axiomy:

(A1) Máme-li dány na papíře body A a B, umíme udělat přehyb, který jimi prochází (papír přehneme v přímce procházející oběma body).
(A2) Máme-li dány body A a B, umíme udělat přehyb, aby bod A ležel na bodu B (body dáme prostě na sebe a přehneme, vytvoříme tak vlastně osu úsečky AB).
(A3) Máme-li dány dvě přímky p a q, umíme udělat přehyb takový, že p bude ležet na q.
(A4) Máme-li dán bod A a přímku p, umíme udělat přehyb kolmý na p procházející A.
(A5) Máme-li dány body A a B a přímku p, umíme udělat přehyb procházející B takový, že A bude ležet na p (to už vyžaduje jistou dávku šikovnosti, přesto to proveditelné je).
(A6) Máme-li dány body A, B a přímky p, q, umíme udělat přehyb takový, že A bude ležet na p a B na q.

Pro názornost ještě axiomy v obrázcích:



Jak by mělo vypadat řešení úlohy? Zkusme si ho předvést na této úloze: Sestrojte čtverec, máte-li dány dva jeho sousední vrcholy A, B.



Jak postupovat? Podle (A1) sestrojíme přímku p procházející body A, B, dvojitou aplikací (A4) získáme kolmice na p procházející A, B, označme je po řadě q, r. Nyní podle (A3) přeložíme p na q, vzniklý přehyb (přímka proložená úhlopříčkou AC) se protne s r ve vrcholu C čtverce. Nyní už jen opět aplikujeme (A4) na přímku r a bod C a průsečík vzniklého přehybu s přímkou q bude zbývající vrchol D. Kdo přehýbal přesně, ten má čtverec `:-)`.

Možná vás napadlo, že poté, co jsme přeložili p na q, bychom mohli „obtisknout“ bod B na přímku q a získat tak bod D. Uvědomte si, že to nám žádný axiom nedovoluje! Můžeme to však snadno obejít – poté, co přeložíme p na q, necháme papír přeložený a použijeme axiom (A4) na přímku p a bod B, průsečík vzniklé kolmice a q bude bod D. Proto toto „obtiskování bodů z přímky na přímku“ můžete používat.

„Obtiskování“ bodů můžeme ještě rozšířit. Mějme přímku p a bod B mimo ni. Potom můžeme podle (A4) vytvořit kolmici na p bodem A, označme ji r. Nyní přehneme papír podle p a na přehnutý papír aplikujeme opět (A4), tentokrát na bod A a přímku r, průsečík vzniklé kolmice (tedy té neprocházející A) a r je bod B – obraz bodu A v osové souměrnosti podle p. Tuto konstrukci můžeš v řešení použít.

Z předchozího odstavce je také vidět, že je povoleno papír přehnout a takto přehnutý jej přehnout znova, nemusíte jej vracet do rozložené pozice (ale můžete).

Má-li zadaná úloha více řešení, stačí, napřehýbáte-li jedno z nich. Také nemusíte provádět diskusi počtu řešení, o tom tato série není. Dále můžete předpokládat, že se řešení na papír vejde, v našem příkladě jsme předpokládali, že se na papír vejde celý čtverec určený body A a B. Okraje papíru považujte za přímky, rohy potom za body.

Občas by se Ti mohlo hodit zvolit si na přímce libovolný bod či dva body, případně vést bodem libovolnou přímku. To nám axiomy nedovolují, ovšem ono to jde vždy obejít (máme okraje a rohy – přímky a úsečky – a umíme jistě vytvořit např. střed úsečky, takže umíme udělat bod libovolně blízko zadanému bodu uvnitř papíru (rozmysli si), chceme-li tedy vést bodem libovolnou přímku, napřehýbáme si nějaký jiný bod a použijeme (A1), chceme-li si zvolit na přímce bod, napřehýbáme si nějaké dva body mimo ni, těmi vedeme přímku podle (A1) a průsečík této přímky s původní je onen „náhodný“ bod). Proto ve svých řešeních můžete používat volbu nějaké náhodné přímky či bodu, ovšem mějte na paměti, že o takových objektech nemůžete mnoho tvrdit.

Na druhou stranu si ale dávejte pozor, abyste při konstrukcích používali jen povolené operace, tedy nic na způsob „odhadneme třetinu vzdálenosti“ a podobně, pokud zadání úlohy omezuje množinu použitelných axiomů, dodržte toto omezení. Také by vaše postupy měly být jasné, tedy když tvrdíte, že jste získali bod daných vlastností, mělo by to být z postupu vidět (nebojte se to vysvětlit, opravovatel bude radši, když dostane komentář rozsáhlý, než když nedostane komentář vůbec).

Za zmínku možná stojí i to, že mezi axiomy není nic jako „dvě různoběžky určují bod – svůj průsečík“, to je dáno tím, že se jedná o axiomy na vytváření přehybů. Tento fakt ale samozřejmě používat můžete, používal jsem ho v minulých odstavích a možná vás to ani nezarazilo.

A nakonec také pozor na to, že když si zvolíte nějaký speciální případ a pro ten napřehýbáte řešení, nemusí to ještě znamenat, že váš postup bude fungovat obecně (ve smyslu „ať je výchozí situace jakákoliv, ale taková, že se řešení vejde na papír“), je lepší se nad tím zamyslet a ujistit se, že tomu tak opravdu je. Také jako řešení neposílejte pouze zohýbaný list papíru, klidně jej přiložte, ale pouze jako přílohu k pořádně popsanému postupu (tím je myšlen takový postup, podle kterého řešení dané úlohy zručný opravovatel poskládá).

Pokud jste dočetli až sem, gratuluji, můžete se směle pustit do řešení šesté série.

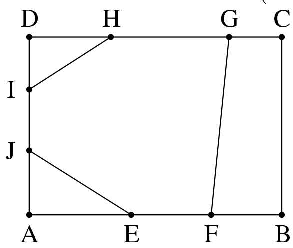
6. série

Téma: Přehýbání

Termín odeslání: 21. BŘEZNA 2005

1. ÚLOHA (3 BODY)

Nechť $ABCD$ je obdélníkový list papíru takový, že $|AB| = 29{,}7$ cm a $|BC| = 21$ cm. Nechť body E a F leží na straně AB, body G, H leží na CD, body I, J leží na DA tak, že $|AE| = 12$ cm, $|BF| = 8{,}3$ cm, $|CG| = 6{,}2$ cm, $|HD| = 9{,}6$ cm, $|DI| = 6{,}2$ cm a $|AJ| = 7{,}6$ cm. Poskládejte střed kružnice vepsané trojúhelníku určeného přímkami EJ, FG a HI.



2. ÚLOHA (3 BODY)

Obarvěme jednu stranu papíru bíle a druhou černě. Poskládání papíru nazveme vyvážené, pokud pro každý bod při pohledu shora vidíme (i skrz) stejně bílých i černých stran (příklad: přehneme obdélník napůl, máme vyvážené poskládání, přehneme obdélník na třetiny, toto poskládání vyvážené není). Jinými slovy, máme-li poskládání, je toto vyvážené v případě, že ať bodneme špendlíkem kamkoliv a pro každou vrstvu papíru, kterou špendlík prochází, si všimneme, jakou má tato vrstva barvu při pohledu shora, potom uvidíme bílou i černou stejněkrát.
Ukažte, že máme-li obdélník takový, že poměr délek jeho stran je racionální číslo, potom z tohoto obdélníku je možné poskládat čtverec tak, že toto poskládání bude vyvážené.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Nechť $v_d > 2v_b$. Dokažte, že existuje nekonvexní čtyřúhelník $ABCD$ takový, že úhel u vrcholu B je větší než $180°$, výška trojúhelníku ABC z vrcholu B je rovna v_b, výška trojúhelníku ADC z vrcholu D je rovna v_d a ze čtyřúhelníku $ABCD$ lze poskládat čtyřstěn (pozor, ať neposkládáte „placku“).

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Poskládejte rovnostranný trojúhelník, máte-li dány dva jeho vrcholy. Je-li více možností, stačí nám jedna z nich.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Je dán obdélníkový list papíru, obdélník tvořící papír označme R. Napřehýbejte **pouze pomocí axiomu (A2)** vrcholy obdélníku O takového, že O je podobný R a delší strana O má stejnou délku jako kratší strana R.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Je dán čtvercový list papíru s vrcholy čtverce A, B, C, D (v tomto pořadí). Na straně AB je dán bod X_1. Napřehýbejte všechny body X_2 na straně BC takové, aby $X_1 = X_5$ při následujícím postupu skládání: Bod X_3 je bod na straně CD takový, že když přeložíme papír podél úseček X_1X_2 a X_2X_3, potom (přeložené) přímky BX_2 a CX_2 splývají. Podobným postupem získáme bod X_4 na straně DA tak, aby po přeložení podél X_2X_3 a X_3X_4 splývaly přímky CX_3 a DX_3, a bod X_5 tak, aby po přeložení podél X_3X_4 a X_4X_5 splývaly přímky DX_4 a AX_4.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme na papíře tři body, které tvoří trojúhelník. Poskládejte čtverec o stejném obsahu, jako má trojúhelník.

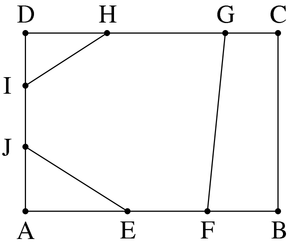
8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Napřehýbejte úhel o velikosti 20°.

Řešení 6. série

1. úloha (56, 55, 2,96, 3,0)

Nechť $ABCD$ je obdélníkový list papíru takový, že $|AB| = 29{,}7$ cm a $|BC| = 21$ cm. Nechť body E a F leží na straně AB, body G, H leží na CD, body I, J leží na DA tak, že $|AE| = 12$ cm, $|BF| = 8{,}3$ cm, $|CG| = 6{,}2$ cm, $|HD| = 9{,}6$ cm, $|DI| = 6{,}2$ cm a $|AJ| = 7{,}6$ cm. Poskládejte střed kružnice vepsané trojúhelníku určeného přímkami EJ, FG a HI.



Jak známo, střed kružnice opsané leží na osách stran. Je snadné si rozmyslet, že osa úhlu dvou přímek vznikne jejich vzájemným přeložením na sebe podle axiomu (A3). Stačí tedy například přeložit přímku IH na přímku EJ a přímku EJ na přímku FG. Průsečík těchto dvou přehybů je hledaný střed kružnice vepsané.

2. úloha (35, 33, 2,83, 3,0)

Obarvěme jednu stranu papíru bíle a druhou černě. Poskládání papíru nazveme vyvážené, pokud pro každý bod při pohledu shora vidíme (i skrz) stejně bílých i černých stran (příklad: přehneme obdélník napůl, máme vyvážené poskládání, přehneme obdélník na třetiny, toto poskládání vyvážené není). Jinými slovy, máme-li poskládání, je toto vyvážené v případě, že ať bodneme špendlíkem kamkoliv a pro každou vrstvu papíru, kterou špendlík prochází, si všimneme, jakou má tato vrstva barvu při pohledu shora, potom uvidíme bílou i černou stejněkrát.
Ukažte, že máme-li obdélník takový, že poměr délek jeho stran je racionální číslo, potom z tohoto obdélníku je možné poskládat čtverec tak, že toto poskládání bude vyvážené.

Mějme obdélník takový, že poměr $a:b$ je roven $\frac{p}{q}$, a, b jsou délky stran obdélníka. Potom také $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = x$ a rozdělíme-li stranu délky a na p dílků a stranu délky b na q dílků, dostaneme $p \cdot q$ čtverečků o straně délky x. Můžeme předpokládat, že p i q jsou sudá (zlomek nemusí být nutně v základním tvaru, můžeme čitatel i jmenovatel vynásobit dvěma). Umíme-li tedy vytvořit takovouto čtvercovou síť, je už řešení snadné. Přehneme nejprve papír podle přehybů rovnoběžných se stranou délky a, dostaneme tak obdélník o rozměrech x a a, díky tomu, že q je sudé, je toto poskládání vyvážené (rozmysli si, že v případě sudého q bude poskládání vskutku vyvážené, zatímco kdyby bylo q liché, poskládání by vyvážené nebylo – dá se to představit např. tak, že papír navíjíme na kružnici o obvodu $2x$ a poté ho „splácneme“ ve vhodném směru, sudé q odpovídá situaci, kdy jsme kružnici obtočili přesně $\frac{q}{2}$-krát, u lichého q obtočíme $\frac{q-1}{2}$-krát a ještě nám půlkružnice zbude, tato půlkružnice nám poruší vyváženost). Nyní obdélník přehneme podle přehybů rovnoběžných s b a dostaneme čtverec o straně délky x, přičemž toto poskládání bude opět vyvážené, neboť p je sudé.

Zbývá si rozmyslet, že umíme danou úsečku AB rozdělit na n shodných částí (to pak aplikujeme na strany obdélníka pro $n = p$ a $n = q$). Tato konstrukce je obdobná známému postupu s kružítkem a pravítkem. Přehneme si libovolnou přímku procházející A, na ní si vyznačíme n

shodných dílků pomocí bodů A, X_1, ..., X_n (zvolíme si X_1, X_2 bude obtisk A v osové souměrnosti podle kolmice procházející X_1, X_3 bude obtisk X_1 v osové souměrnosti podle kolmice procházející X_2, ...), přehneme přímku procházející X_n a B, k ní vedeme rovnoběžky procházející X_1, X_2, ..., X_{n-1}, jejich průsečíky s AB nám AB rozdělí na n shodných částí (rovnoběžku k přímce p procházející bodem X sestrojíme tak, že nejprve přehneme kolmici k p a potom k této kolmici přehneme kolmici procházející X).

Pokud někoho vyděsil druhý odstavec, případně mu přijde zbytečný, pak vězte, že úloha byla původně zamýšlena jako otázka existence daného poskládání, ne konkrétního provedení, tedy postup dělení úsečky na n shodných částí není potřeba.

3. úloha (19, 1, 0,68, 1,0)

Nechť $v_d > 2v_b$. Dokažte, že existuje nekonvexní čtyřúhelník $ABCD$ takový, že úhel u vrcholu B je větší než $180°$, výška trojúhelníku ABC z vrcholu B je rovna v_b, výška trojúhelníku ADC z vrcholu D je rovna v_d a ze čtyřúhelníku $ABCD$ lze poskládat čtyřstěn (pozor, ať neposkládáte „placku“).

Řešení by bylo možné napsat velmi rychle tak, že bychom přímo uvedli nějaký čtyřstěn, jehož sítí by byl čtyřúhelník daných vlastností. Nicméně budeme psát řešení o kousek zdlouhavěji, aby byl poznat postup, jak na to přijít.

Čtyřúhelník $ABCD$ budeme hledat osově souměrný podle přímky BD. Mějme nějakého kandidáta na hledaný osově souměrný čtyřúhelník $ABCD$. Označme S_{AC}, S_{AD}, S_{CD} po řadě středy úseček AC, AD, CD. S_{AC} leží mimo čtyřúhelník. Vzhledem k osové souměrnosti leží bod S_{AC} na přímce BD a je patou výšek trojúhelníků ABC, ADC z bodů B a D. Jinými slovy $v_b = |BS_{AC}|$, $v_d = |DS_{AC}|$.

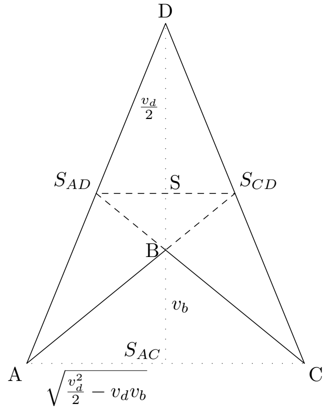
Myšlenkou řešení je, že ohneme čtyřúhelník v úsečkách $S_{AD}S_{CD}$, BS_{AD} a BS_{CD} a po ohnutí ztotožníme body A, C a D, čímž získáme hledaný čtyřstěn. Kdybychom ale čtyřúhelník volili nešikovně (například tak, že CD je kolmá na BS_{CD}), může se nám stát, že poskládáme placku, nebo dokonce neposkládáme nic.

Jeden ze způsobů, jak docílit toho, abychom poskládali opravdu čtyřstěn, je přidat si nějakou další podmínku. Například budeme chtít, aby rovina určená body S_{AD}, S_{CD} a D byla po přeskládání kolmá na rovinu určenou body S_{AD}, S_{CD} a B. Označme ještě S střed úsečky $S_{AD}S_{CD}$. Vzhledem k tomu, že $S_{AD}S_{CD}$ je střední příčka ACD, je $S \in DS_{AC}$ a platí $|DS| = |SS_{AC}| = \frac{v_d}{2}$. Z nerovnosti $v_d > 2v_b$ plyne, že bod B leží na úsečce SS_{AC} a $|SB| = |SS_{AC}| - |BS_{AC}| = \frac{v_d}{2} - v_b$.

Podmínka na kolmost rovin $S_{AD}S_{CD}B$ a $S_{AD}S_{CD}D$ je ekvivalentní s tím, že $\triangle BSD$ po přehnutí bodu D bude pravoúhlý, tj. vzdálenost B a D (po přehnutí) bude rovna $\sqrt{\frac{v_d^2}{4} + \left(\frac{v_d}{2} - v_b\right)^2}$. Tato vzdálenost má být ale zároveň i vzdáleností bodů B a C (ta se přehnutím nemění). Odtud ještě můžeme pomocí pravoúhlého trojúhelníku $BS_{AC}C$ dopočítat:

$$|S_{AC}C|^2 = |BC|^2 - |BS_{AC}|^2 = \frac{v_d^2}{4} + \left(\frac{v_d}{2} - v_b\right)^2 - v_b^2 = v_d\left(\frac{v_d}{2} - v_b\right).$$

Přitom $v_d\left(\frac{v_d}{2} - v_b\right)$ je vzhledem k podmínce ze zadání kladné číslo, tedy můžeme volit $|S_{AC}C|$ tak, aby předchozí rovnost byla splněna.



Nyní už stačí projít postup „pozpátku“. Zvolíme

$$|S_{AC}C| = |AS_{AC}| = \sqrt{v_d\left(\frac{v_d}{2} - v_b\right)}.$$

Vzhledem k tomu, že $|S_{AC}B| = v_b$ a $|S_{AC}D| = v_d$, máme už čtyřúhelník $ABCD$ jednoznačně určen. Z Pythagorovy věty dopočítáme, že $|BS|^2 + |SD|^2 = |AB|^2 = |BC|^2$. Ohneme trojúhelník $DS_{AD}S_{CD}$ podél úsečky $S_{AD}S_{CD}$ tak, aby po ohnutí byl úhel BSD pravý. Tím zaručíme, že (po ohnutí) $|BD| = |BC| = |AC|$ a přitom $|CS_{CD}| = |DS_{CD}|$, $|AS_{AD}| = |DS_{AD}|$. Tedy ohneme-li trojúhelníky CBS_{CD} a ABS_{AD} podél úseček BS_{CD} a AS_{AD}, dotvoříme jimi přesně zbývající dvě stěny čtyřstěnu.

Poznámky k došlým řešením: Úlohu se úplně nepodařilo vyřešit nikomu. Všichni sice nalezli správný postup skládání (až na jednu výjimku stejný), ale téměř nikdo se už nepozastavil nad tím, zda popsaným postupem opravdu vznikne čtyřstěn. Nutnou podmínkou úspěšnosti tohoto postupu (ohýbání podél hran EF, BE, BF, kde E, F jsou středy stran AD, CD) totiž byla platnost nerovnosti $|BD| > |AB|$, což vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník ABX ($= DBX$) ve složeném čtyřstěnu (X je zde průsečík EF a BD). V případě $|BD| = |AB|$ tak vznikne placka ve tvaru čtyřúhelníka $BFDE$, v případě $|BD| < |AB|$ se body A a D při ohýbání ani nepotkají. Ti, co si nutnost podmínky $|BD| > |AB|$ uvědomili, zase nedokázali, že existuje čtyřúhelník, který kromě zadaných podmínek splňuje i tuto dodatečnou.

4. úloha **(58, 58, 4, 71, 5, 0)**

Poskládejte rovnostranný trojúhelník, máte-li dány dva jeho vrcholy. Je-li více možností, stačí nám jedna z nich.

Označme si zadané vrcholy A a B. Doporučuji mít u sebe při čtení řešení kus papíru a ohýbání si provádět.

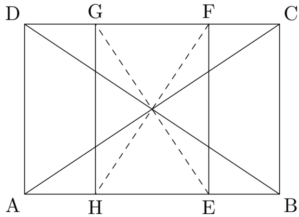
Přehněme bod A na bod B (axiom (A2)), dostaneme tak osu o úsečky AB. Podle axiomu (A5) přehneme papír tak, že přehyb bude procházet bodem A a bod B umístí na přímku o, „obtisk“ bodu B na přímce o označme C. Nyní už jen podle (A1) napřehýbáme strany AB, BC a AC. To, že je trojúhelník ABC rovnostranný, je vidět z toho, že $|AC| = |AB|$ a o je osa AB, takže ABC je rovnoramenný se základnou AB.

5. úloha (39, 37, 4,64, 5,0)

Je dán obdélníkový list papíru, obdélník tvořící papír označme R. Napřehýbejte **pouze pomocí axiomu (A2)** vrcholy obdélníku O takového, že O je podobný R a delší strana O má stejnou délku jako kratší strana R.

Označme si A, B, C, D v kladném směru vrcholy obdélníku R, navíc předpokládejme, že AB je delší strana obdélníku $R = ABCD$ (v případě, že bychom připouštěli čtverec, stačí volit $O = R$, nadále tedy předpokládejme, že R není čtverec). Označme ještě S střed $ABCD$.

Přehneme papír tak, že spojíme body A a C – axiom (A2). Dostaneme přímku, která prochází bodem S a protíná strany AB a CD po řadě v bodech E a G (rozmysli si). Podobně, přehneme-li papír spojením B a D, dostaneme přímku, která prochází S a protíná strany AB a CD v bodech F a H.



Tvrdíme, že $EFGH$ je hledaný obdélník O. Chceme teď dokázat, že $EFGH$ splňuje podmínky kladené na O. Nejprve si uvědomíme, že O je obdélník. V osové souměrnosti podle osy úsečky BC se na sebe zobrazují: B a C, A a D, AB a DC. Odtud už plyne, že osy úseček AC a BD se zobrazují na sebe (to jsou ty přímky, které jsme získali přehýbáním). Následně dostáváme, že se E zobrazuje na F a G na H. Speciálně je tedy EF kolmá na osu úsečky BC, tedy kolmá na AB, tedy kolmá na HE. Potom je ovšem úhel u vrcholu E pravý. Podobně se zdůvodní, že ostatní úhly jsou pravé.

Odtud už také plyne, že $|EF| = |BC|$ ($EBCF$ je obdélník). Dokážeme-li, že EF je delší strana $EFGH$, bude splněna podmínka, že délka delší strany O je rovna délce kratší strany R.

Nyní dokážeme, že $ABCD$ a $EFGH$ jsou podobné. Přímka EG je osa úsečky AC (tak jsme ji volili), tudíž je EG kolmé na AC. Podobně je FH kolmé na BD. Tedy úhlopříčky AC a BD svírají stejný úhel δ jako úhlopříčky EG a FH. Odtud už plyne, že obdélníky $ABCD$ a $EFGH$ jsou podobné (například úhel BAC lze vyjádřit pomocí úhlu, který svírají úhlopříčky, jako $\frac{\delta}{2}$ nebo $90^\circ - \frac{\delta}{2}$). Bez důkladnějšího argumentu ještě nevíme, v jakém pořadí vrcholů jsou obdélníky podobné, nicméně kdyby strana BC odpovídala straně EF, znamenalo by to (vzhledem k $|EF| = |BC|$), že jsou obdélníky shodné, avšak obdélník O je vlastní[1] podmnožinou R, tudíž nemůžou být shodné. Tedy strana AB musí odpovídat EF, čímž už jsou splněny všechny podmínky.

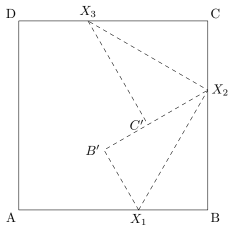
6. úloha (28, 24, 3,21, 3,5)

Je dán čtvercový list papíru s vrcholy čtverce A, B, C, D (v tomto pořadí). Na straně AB je dán bod X_1. Napřehýbejte všechny body X_2 na straně BC takové, aby $X_1 = X_5$ při následujícím postupu skládání: Bod X_3 je bod na straně CD takový, že když přeložíme papír podél úseček X_1X_2 a X_2X_3, potom (přeložené) přímky BX_2 a CX_2 splývají. Podobným postupem získáme bod X_4 na straně DA tak, aby po přeložení podél X_2X_3 a X_3X_4 splývaly přímky CX_3 a DX_3, a bod X_5 tak, aby po přeložení podél X_3X_4 a X_4X_5 splývaly přímky DX_4 a AX_4.

[1] Tj. $O \subset R$, ale $O \neq R$.

Volbě bodu X_2 takové, že po postupu skládání ze zadání vyjde $X_1 = X_5$, budeme říkat správná volba.

Nejprve si uvědomíme (♡), že je-li volba X_2 správná, potom je $X_1X_2X_3X_4$ obdélník. A naopak, je-li $X_1Y_2Y_3Y_4$ obdélník takový, že $Y_2 \in BC$, $Y_3 \in CD$, $Y_4 \in DA$. Potom volba $X_2 = Y_2$ je správná a po provedení postupu ze zadání vyjde $X_3 = Y_3$, $X_4 = Y_4$.



Mějme tedy nejprve X_2 správnou volbu. Nechť po přehnutí podél X_1X_2 se bod B zobrazí na bod B' a po přehnutí podél X_2X_3 se bod C zobrazí na bod C'. Podmínka ze zadání říká, že polopřímky X_2B' a X_2C' splývají. Odtud plyne, že $|\sphericalangle BX_2B'|+|\sphericalangle CX_2C'| = 180°$. Dále platí, že $|\sphericalangle X_1X_2B'| = \frac{|\sphericalangle BX_2B'|}{2}$ (ohýbali jsme podle přímky X_1X_2). Podobně $|\sphericalangle C'X_2X_3| = \frac{|\sphericalangle CX_2C'|}{2}$. Dohromady tedy

$$|\sphericalangle X_1X_2X_3| = |\sphericalangle X_1X_2B'| + |\sphericalangle C'X_2X_3| = \frac{|\sphericalangle BX_2B'| + |\sphericalangle CX_2C'|}{2} = \frac{180°}{2} = 90°.$$

Naprosto analogicky dokážeme, že všechny ostatní úhly čtyřúhelníku $X_1X_2X_3X_4$ jsou pravé.

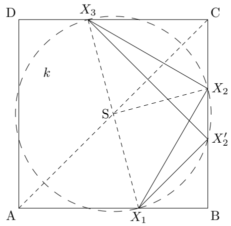
Naopak, máme-li zadaný obdélník $X_1Y_2Y_3Y_4$, zvolíme $X_2 = Y_2$. Potom z předchozí diskuze plyne, že úhel $X_1X_2X_3$ je pravý, tedy $X_3 = Y_3$. Podobně $X_2X_3X_4$ je pravý úhel a $X_4 = Y_4$. A nakonec $X_3X_4X_5$ je pravý, tedy $X_5 = X_1$ a volba $X_2 = Y_2$ byla správná.

Mějme nyní opět obdélník $X_1X_2X_3X_4$ požadovaných vlastností. Potom trojúhelníky X_1BX_2 a X_3DX_4 jsou shodné (věta usu, $|X_1X_2| = |X_3X_4|$ a úhly jsou zřejmé). Speciálně tedy $|X_1B| = |X_3D|$, takže body X_1 a X_3 jsou středově souměrné podél středu čtverce. Střed čtverce si označme S.

Bod X_2 musí ležet na Thaletově kružnici nad X_1X_3, tj. kružnici k se středem S a poloměrem $|SX_1| = |SX_3|$.

Je-li X_1 střed AB, potom se kružnice k dotýká strany BC v jejím středě a bod X_2 sestrojíme jednoduše tak, že vytvoříme osu BC (axiom A2) a bod X_2 bude tam, kde tato osa protíná BC.

Není-li X_1 střed AB, potom poloměr k je větší než $\frac{|AB|}{2}$, ale menší než $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (X_1 totiž leží na k). Tedy kružnice k protíná stranu BC ve dvou bodech X_2 a X_2'. Známe-li jeden z těchto bodů, lze snadno $X_1X_2X_3$ (resp. $X_1X_2'X_3$) doplnit na obdélník. Nechť X_2 je ten bod, který vznikne otočením X_1 podél S o 90° (takový bod určitě leží na k i na BC) a X_2' je středově souměrný s X_2 podle středu úsečky BC. Bod X_2 sestrojíme velmi jednoduše. Nejprve sestrojíme S (to je hodně jednoduché). Potom sestrojíme X_3 jako bod přímky X_1S (axiom A1). Bod X_2 je pak na ose úsečky X_1X_3 (axiom A2). Bod X_2' pak dostaneme tak, že vytvoříme přehyb kolmý na AC procházející bodem X_3 (axiom A4). Bod X_2' leží na tomto přehybu (rozmysli si, že to funguje).



Nyní jsme zjistili, jak bod X_2 (resp X_2') „musí" vypadat. Sestrojíme-li naopak X_2 (říkejme mu na chvíli Y_2) požadovaných vlastností a doplníme-li obrázek na obdélník $X_1Y_2Y_3Y_4$, potom podle (♡) je i $X_2 = Y_2$ správná volba, tedy splňuje zadání úlohy.

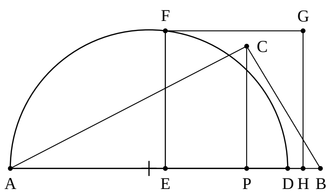
Diskuse. Je-li X_1 středem AB, má úloha jedno řešení, v ostatních případech má dvě řešení.

7. úloha (29, 27, 4,41, 5,0)

Mějme na papíře tři body, které tvoří trojúhelník. Poskládejte čtverec o stejném obsahu, jako má trojúhelník.

Nejprve teoretický rozbor. Podle Euklidovy věty o výšce platí $v_c^2 = c_a c_b$ nebo také $|AP||PB| = |CP|^2$, kde P je pata výšky z bodu C. Obsah trojúhelníka je $S = \frac{c}{2}v$. Sestrojíme osu o úsečky AB a její střed označíme E. Přeneseme výšku v na přímku AB aby navazovala na úsečku AE a koncový bod označíme D. Sestrojíme Tahletovu kružnici nad AD a její průsečík s o označíme F. Platí $\frac{|AB|}{2}v = |EF|^2$ a tedy $|EF|$ je požadovaná hrana čtverce $EFGH$ který má stejný obsah jako trojúhelník ABC.

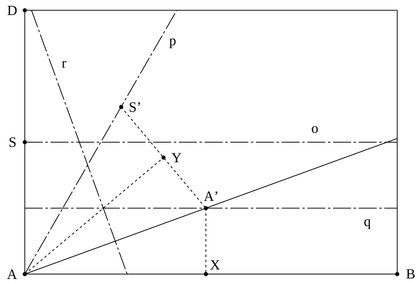
A teď k přehýbacímu řešení. Označme vrcholy trojúhelníka ABC. Napřehýbejme podle (A1) celý trojúhelník. Veďme výšku z bodu C (A4) a označme ji p. Sestrojme osu úsečky AB (A2), označme ji o a označme vzniklý průsečík E. Sestrojme kolmici na o bodem C (A4) a jejich průsečík označme C'. Přeložme nyní přímku o na přímku AB a „obtiskněme" bod C' na přímku AB (dále od A) a označme ho D. Sestrojme nyní střed AD a označme ho S (A2). Dle (A5) veďme přehyb bodem S tak, aby A ležel na q a tam ho „obtiskněme" a označme F. Nyní již máme délku hrany čtverce a ten již sestrojíme snadno. Vztyčíme kolmici nad F (A4) označíme ji x a „obtiskneme" bod E na x označme ho G a F na AB a označme ho H. Čtverec $EFGH$ má stejný obsah jako trojúhelník ABC.



8. úloha (10, 4, 1,80, 0,0)

Napřehýbejte úhel o velikosti 20°.

Tato úloha slouží k tomu, abychom si uvědomili, že axiom (A6) je velmi mocný a dovolí nám provést trisekci úhlu. Postup, který použijeme, lze provést pro obecný úhel.



Předpokládejme, že máme obvyklý papír formátu $A4$. Přeložením A na D získáme osu o úsečky AD, nyní použijeme (A5) a sestrojíme přímku p procházející A takovou, že přeložením podle p se D zobrazí na o. Tuto konstrukci známe ze čtvrté úlohy a víme, že p je osa úhlu v rovnostranném trojúhelníku, tedy $|\sphericalangle DAS'| = 30°$, tudíž $|\sphericalangle BAS'| = 60°$.

Ještě přehneme S na A a získáme osu q úsečky AS. No a nyní už jen použijeme axiom (A6) a vytvoříme přehyb r tak, aby bod A ležel na q a bod S na p, obtisky bodů na přímkách označíme A' a S'. Nyní už jen zbývá ukázat, že $|\sphericalangle BAA'| = 20°$.

K tomu jistě stačí nahlédnout, že trojúhelníky AXA', AYA' a AYS' jsou shodné. Trojúhelník ASA' je rovnoramenný, trojúhelník $A'S'A$ je jeho obrazem v osové souměrnosti podle r, proto jsou trojúhelníky AYA' a AYS' shodné. Dále trojúhelníky AYA' a AXA' mají společnou přeponu, navíc $|A'Y| = \frac{1}{2}|A'S'| = \frac{1}{2}|AS| = |A'X|$, proto jsou shodné i (pravoúhlé) trojúhelníky AXA' a AYA'. Tím je vše potřebné dokázáno.