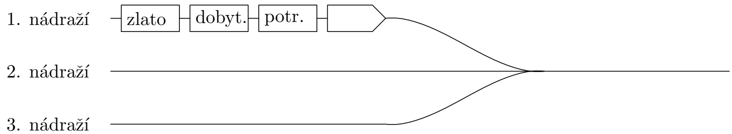
1. série

Téma: Cestování

Termín odeslání: 11. října 2004

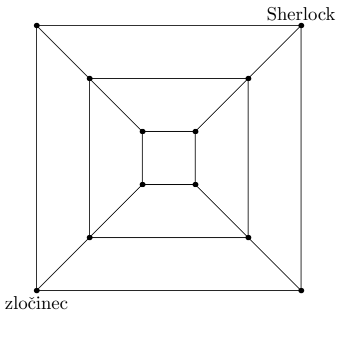
1. ÚLOHA (3 BODY)

V Tramtárii se nově buduje železniční spojení. Už byla postavena tři nádraží a tratě mezi nimi. Z prvního nádraží do druhého je potřeba přepravit náklad potravin, dobytka a zlata. Do každého nádraží je přístup pouze z jedné strany, navíc podle tramtárijských lidových zvyků musí být na každém nádraží řazeny potraviny před dobytkem, dobytek před zlatem a potraviny před zlatem[1]. Na nádražích vagóny nelze prohazovat. Zatím je dostupná pouze jedna lokomotiva (ta umí couvat), která uveze pouze jeden vagón. Poraďte tramtárijským, jak převoz nákladu uskutečnit. Schéma tramtárijské železniční sítě včetně výchozí pozice máte na následujícím obrázku.



2. ÚLOHA (3 BODY)

Detektiv Sherlock Holmes se snaží chytit neznámého zločince. Mapa okolí je nakreslena na obrázku včetně výchozí pozice Sherlocka a zločince. Sherlock se pohybuje ve dne, zločinec v noci. Jak detektiv, tak zločinec se vždy pohnou na sousední křižovatku, přitom cestu, kterou prošli, za sebou zatarasí tak, že už ji nelze opět použít. Pokud k zločinci od detektiva nepovede žádná přístupová cesta, zůstane zločinec nedopaden. Dokažte, že ať se Sherlock pohybuje jakkoliv, může se zločinec pohybovat tak, že zůstane nedopaden. Začíná se ráno, tedy první na tahu je detektiv.



3. ÚLOHA (3 BODY)

Dino se prochází po slovenských lesích, blíží se už večer, a tak hledá nějaké místo k zastanování mimo les. Má mapu a ví, kde přesně je, navíc z mapy zjistil, že les zabírá plochu S km^2. Dokažte, že mu stačí ujít $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ km, aby se s jistotou dostal z lesa ven.

[1] To z předchozích dvou pravidel ještě nevyplývá, pokud na nádraží není dobytek.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Frso se podobně jako Dino prochází po slovenských lesích, avšak mapu se mu už podařilo ztratit. Ještě si však matně pamatuje, že les se rozkládá na ploše o velikosti S km^2 a nemá žádné díry. Dokažte, že mu stačí ujít $2\sqrt{\pi S}$ km, aby se s jistotou dostal z lesa ven.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

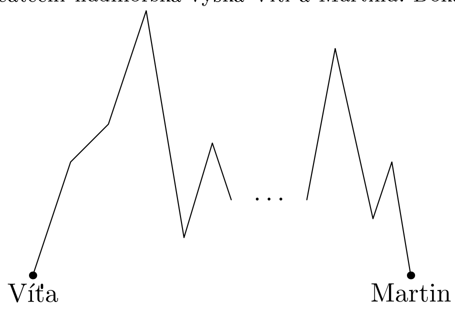
V Mnohaměstí nabízejí své služby čtyři cestovní kanceláře: A, B, C a D. V každém městě mají tyto cestovky (právě jednu) svou pobočku, přičemž každá pobočka dopravuje zákazníky z města, kde stojí, do právě jednoho (ne nutně jiného) města. Po několika letech lidé zjistili, že pokud si nejprve koupí zájezd u kanceláře A a pak (v městě, kam je dopravila kancelář A) druhý zájezd od kanceláře B, dostanou se vždy do stejného města, jako by nejprve cestovali s kanceláří C a pak s D. Dále pokud někdo jede nejprve s kanceláří C a pak B, vrátí se zpátky do výchozího místa. Podobně, jedete-li nejprve s B a pak s C, vrátíte se také do výchozího města. A do třetice se zpátky vrátí i ten, kdo cestoval nejprve s cestovkou D a pak dvakrát s kanceláří C. Určete maximální možný počet měst M takových, že pobočka kanceláře A ve městě M dopravuje do jiného města než M.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Na Sahaře je na kružnici rozmístěno n oáz (nemusí být pravidelně). Na cestu mezi oázami je potřeba mít s sebou dostatečné množství vody a jídla. Dohromady lze v oázách načerpat právě tolik zásob, kolik potřebuje jedna karavana na obejití kružnice. Dokažte, že lze vybrat oázu takovou, že z ní může karavana vyjet ve směru hodinových ručiček a objet celou kružnici, nemá-li před načerpáním zásob v této oáze k dispozici žádné zásoby. Karavana pobere libovolné množství zásob.

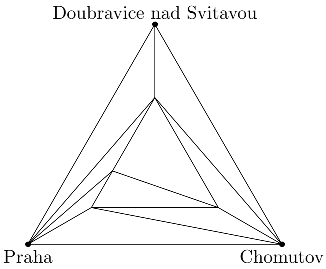
7. ÚLOHA (5 BODŮ)

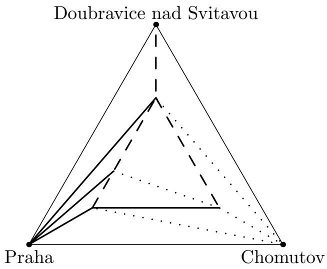
Víťa a Martin jeli na výlet do rumunských hor. Stojí na opačných stranách pohoří ve stejné nadmořské výšce a chtějí se pohybovat tak, že stále budou mít stejnou nadmořskou výšku. Cesta mezi nimi tvoří graf lineární lomené funkce (je to lomená čára). Každý bod cesty je alespoň tak vysoko jako počáteční nadmořská výška Víti a Martina. Dokažte, že se můžou setkat.



8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Ve vrcholech trojúhelníku stojí tři velká města (Praha, Chomutov a Doubravice nad Svitavou). Uvnitř trojúhelníku tvořeného městy je několik vesnic. Některé obce jsou spojeny rovnými cestami, přitom jsou spojena každá dvě města. Žádné dvě cesty se neprotínají. Navíc libovolné území je ohraničeno právě třemi cestami. Dokažte, že cesty (takové, že vedou alespoň do jedné vesnice) lze rozdělit mezi města tak, že z libovolné vesnice do libovolného města M se lze dostat pouze po cestách patřících danému městu M. Příklad oblasti a následné rozdělení cest mezi města máte na obrázku.

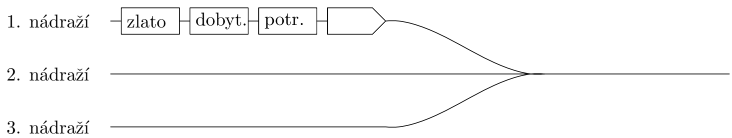




Řešení 1. série

1. úloha (182, 169, 2,79, 3,0)

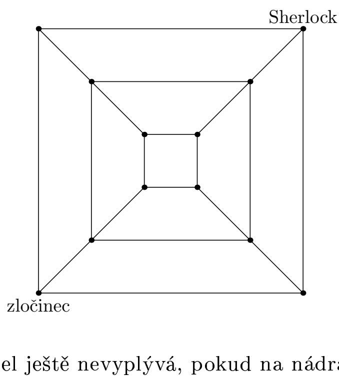
V Tramtárii se nově buduje železniční spojení. Už byla postavena tři nádraží a tratě mezi nimi. Z prvního nádraží do druhého je potřeba přepravit náklad potravin, dobytka a zlata. Do každého nádraží je přístup pouze z jedné strany, navíc podle tramtárijských lidových zvyků musí být na každém nádraží řazeny potraviny před dobytkem, dobytek před zlatem a potraviny před zlatem[2]. Na nádražích vagóny nelze prohazovat. Zatím je dostupná pouze jedna lokomotiva (ta umí couvat), která uveze pouze jeden vagón. Poraďte tramtárijským, jak převoz nákladu uskutečnit. Schéma tramtárijské železniční sítě včetně výchozí pozice máte na následujícím obrázku.



Po chvilce zkoušení přijdeme například na následující postup[3] (kresli si obrázky): Nejprve přesuneme potraviny z prvního nádraží na druhé, potom dobytek z prvního nádraží na třetí. Následně převezeme potraviny z druhého nádraží na třetí. Nyní dovezeme zlato z prvního nádraží na druhé a vzápětí potraviny z třetího na první. Nakonec už stačí přivézt dobytek z třetího nádraží na druhé a potraviny z prvního na druhé.

2. úloha (143, 108, 2,01, 2,0)

Detektiv Sherlock Holmes se snaží chytit neznámého zločince. Mapa okolí je nakreslena na obrázku včetně výchozí pozice Sherlocka a zločince. Sherlock se pohybuje ve dne, zločinec v noci. Jak detektiv, tak zločinec se vždy pohnou na sousední křižovatku, přitom cestu, kterou prošli, za sebou zatarasí tak, že už ji nelze opět použít. Pokud k zločinci od detektiva nepovede žádná přístupová cesta, zůstane zločinec nedopaden. Dokažte, že ať se Sherlock pohybuje jakkoliv, může se zločinec pohybovat tak, že zůstane nedopaden. Začíná se ráno, tedy první na tahu je detektiv.



[2]To z předchozích dvou pravidel ještě nevyplývá, pokud na nádraží není dobytek.

[3]Tento postup je nejkratší možný.

Finta spočívá v tom, že se využije, že je obrázek středově souměrný. Jelikož detektiv začíná, může se zločinec v následujícím tahu pohybovat středově souměrně vzhledem k pohybu detektiva. Takto po zločincově tahu nějaké cesty zmizí, nicméně nastane opět středově souměrná situace. Po následujícím tahu detektiva se zločinec může opět pohybovat středově souměrně a jsme opět ve středově souměrné situaci. Když se zločinec bude stále pohybovat středově souměrně, zůstane nedopaden (bude od detektiva vždy dostatečně daleko).

3. úloha (174, 87, 1,63, 1,5)

Dino se prochází po slovenských lesích, blíží se už večer, a tak hledá nějaké místo k zastanování mimo les. Má mapu a ví, kde přesně je, navíc z mapy zjistil, že les zabírá plochu S km^2. Dokažte, že mu stačí ujít $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ km, aby se s jistotou dostal z lesa ven.

Dino se chce co nejrychleji dostat z lesa. Tak jak by to asi mohl udělat? Když má mapu a ví, kde je, může se napřed podívat, kterým směrem to má nejblíž ke kraji lesa. Dokažme, že když tímto směrem půjde pořád rovně nejdéle tak dlouho, dokud neujde $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ km, dostane se ven z lesa. Co kdyby byl pořád ještě v lese? To by znamenalo, že hranice lesa je od místa, kde stál na začátku (označme je A), dál než $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ km. Potom celý kruh o středu A a poloměru r km leží uvnitř lesa. Tento kruh má obsah $\pi r^2 = \pi \frac{S}{\pi} = S$ km^2 a leží uvnitř lesa, takže obsah celého lesa je větší než S km^2. To je ale v rozporu se zadáním, podle nějž je obsah lesa roven S km^2. Dino se tedy dostal ven z lesa.

Poznámky k došlým řešením: Téměř všichni, kdo tento příklad řešili, přišli na to, že kruh s obsahem S bude nějakým způsobem v důkazu důležitý. Uvědomili jste si, že kdyby les byl kruhový, pak Dino (pokud stojí v jeho středu) musí ujít právě $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ km – tedy jde o jakýsi hraniční případ. Proč je ale tím extrémním případem kruh a proč v ostatních případech stačí Dinovi ujít méně, to se velmi těžko dokazuje, což se projevilo i na vašich řešeních. Buď jste volbu kruhového lesa jako nejobtížnějšího tvaru lesa pro Dina vůbec nezdůvodňovali, nebo jste se o to rozmanitými způsoby pokoušeli, ale … nebyl to důkaz. Občas jste dokonce zdůvodňovali vlastnostmi kruhu, které s příkladem příliš nesouvisely.

Ukázalo se, že klíčem k úspěchu bylo neřešit skutečný tvar lesa (a nemuset tak vysvětlovat, proč je který tvar pro Dina nejhorší), důkaz se pak dal provést tak, že místo, kde Dino stojí, se stalo středem kruhu o obsahu S. Pokud se les (také o obsahu S) rozkládá i mimo kruh, pak také určitě existuje místo v kruhu, kde není les (kdyby les zabíral celý kruh a ještě nějakou plochu mimo něj, pak by měl plochu větší než S, což by byl spor se zadáním). Pokud les zabírá právě kruh, pak Dinovi stačí právě $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ km, aby se dostal na jeho okraj. Jiný způsob řešení předpokládal, že Dino musí ujít více než $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ km, aby se dostal z lesa ven. Potom by měl les obsah větší než $\pi \left(\sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)^2$, tedy les by měl obsah větší než S, což odporuje zadání.

4. úloha (131, 95, 3,22, 4,0)

Frso se podobně jako Dino prochází po slovenských lesích, avšak mapu se mu už podařilo ztratit. Ještě si však matně pamatuje, že les se rozkládá na ploše o velikosti S km^2 a nemá žádné díry. Dokažte, že mu stačí ujít $2\sqrt{\pi S}$ km, aby se s jistotou dostal z lesa ven.

Představme si, že se Frsovi zachce chodit dokolečka a vydá se po obvodu kruhu o poloměru $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ km. Předpokládejme, že obešel celý kruh (ušel tedy přesně $2\pi r = 2\sqrt{\pi S}$ km) a nedostal se přitom ani jednou ven z lesa. To znamená, že celý obvod kruhu leží uvnitř lesa. Protože les nemá díry, leží i celý vnitřek tohoto kruhu v lese. Obsah kruhu je ale $\pi r^2 = \pi \frac{S}{\pi} = S$ km^2, takže obsah celého lesa je větší než S km^2, což je spor se zadáním. Frso se tudíž během své cesty někdy dostal ven z lesa.

Poznámky k došlým řešením: Došlá řešení bylo možno rozdělit do dvou skupin. Asi třetina řešitelů úlohu vůbec nevyřešila, zpravidla proto, že předpokládali, že Frso půjde rovně. Někteří pak „dokázali", že Frso z lesa vyjít nemusí (Zde chci ale podotknout, že zní-li zadání úlohy „Dokažte, že něco platí." a vy dokážete, že to neplatí, je velmi pravděpodobně chyba na vaší straně `:-(`. Opravy případných politováníhodných chyb v zadání umisťujeme na web co nejdříve.). Jiní potom určovali, jak musí les vypadat, aby Frsovi ujít $2\sqrt{\pi S}$ km rovně stačilo. To je ale jiná úloha. Doporučuji prostudovat vzorové řešení. První skupinu řešení jsem hodnotil 0-1 body podle toho, zda řešitel ukázal, že $2\sqrt{\pi S}$ je délka obvodu kruhu o obsahu S. Asi dvě třetiny řešitelů správně určily, že Frso musí jít po kružnici o poloměru $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Za to jsem dával 3 body. Důkaz, že takto opravdu vyjde z lesa, jsem hodnotil 0-2 body.

5. úloha (53, 42, 3,58, 5,0)

V Mnohaměstí nabízejí své služby čtyři cestovní kanceláře: A, B, C a D. V každém městě mají tyto cestovky (právě jednu) svou pobočku, přičemž každá pobočka dopravuje zákazníky z města, kde stojí, do právě jednoho (ne nutně jiného) města. Po několika letech lidé zjistili, že pokud si nejprve koupí zájezd u kanceláře A a pak (v městě, kam je dopravila kancelář A) druhý zájezd od kanceláře B, dostanou se vždy do stejného města, jako by nejprve cestovali s kanceláří C a pak s D. Dále pokud někdo jede nejprve s kanceláří C a pak B, vrátí se zpátky do výchozího místa. Podobně, jedete-li nejprve s B a pak s C, vrátíte se také do výchozího města. A do třetice se zpátky vrátí i ten, kdo cestoval nejprve s cestovkou D a pak dvakrát s kanceláří C. Určete maximální možný počet měst M takových, že pobočka kanceláře A ve městě M dopravuje do jiného města než M.

Označme si $A(x)$ město, do kterého vozí klienty pobočka kanceláře A ve městě x[4]. Obdobně $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ označují cíle kanceláří B, C, D.

Podle zkušeností klientů platí pro všechna města x tyto čtyři rovnosti:

$$\begin{aligned} B(A(x)) &= D(C(x)), \\ B(C(x)) &= x, \\ C(B(x)) &= x, \\ C(C(D(x))) &= x. \end{aligned}$$

Pokud platí $x = y$, kde x, y jsou nějaká města, tak také platí $A(x) = A(y)$ (Jestliže města x, y jsou stejná, tak kancelář A z nich určitě dopravuje do toho samého města.). Na obě strany rovnic můžeme „zapůsobit" libovolnou z cestovních kanceláří a dostat nové platné tvrzení o cestovkách. Této vlastnosti budeme využívat.

[4]Pozorní čtenáři zadání si mohou všimnout, že kanceláře se vlastně chovají jako funkce zobrazující množinu všech měst samu do sebe.

Vezměme rovnost $B(A(x)) = D(C(x))$. Z ní vyplývá rovnost $C(B(A(x))) = C(D(C(x)))$, kterou můžeme přepsat pomocí vztahu $C(B(x)) = x$ (za x zvolíme $A(x)$):

$$\begin{aligned} C(B(A(x))) &= C(D(C(x))),\\ A(x) &= C(D(C(x))). \end{aligned}$$

Zapůsobíme-li na obě strany rovnosti cestovní kanceláří C a použijeme rovnost $C(C(D(x))) = x$, máme

$$\begin{aligned} C(A(x)) &= C(C(D(C(x)))),\\ C(A(x)) &= C(x). \end{aligned}$$

Nyní už stačí zapůsobit na obě strany cestovní kanceláří B a využít rovnost $B(C(x)) = x$:

$$\begin{aligned} B(C(A(x))) &= B(C(x)),\\ A(x) &= x. \end{aligned}$$

Cestovní kancelář A tedy dopravuje z města x pouze do města x. Počet měst x takových, že $A(x) \neq x$, je proto vždy nula bez ohledu na celkový počet měst (který může být klidně i nekonečný).

Poznámky k došlým řešením: Většina řešitelů přišla na to, že cestovka A vždy dopravuje do výchozího města, takže město M s hledanou vlastností neexistuje. Proto bodování odráží hlavně míru přesnosti a obecnosti důkazu.

Krom algebraických řešení (podobných vzorovému) se vyskytovaly i úvahy o vhodně zvolených několika městech z Mnohaměstí a spojeních mezi nimi. Další skupina správných řešení vycházela z představy (konečného) Mnohaměstí jako několika kružnic s městy po obvodu, přičemž cestovky dopravovaly v dané kružnici buď po směru nebo proti směru hodinových ručiček.

6. úloha (96, 40, 1,96, 0,0)

Na Sahaře je na kružnici rozmístěno n oáz (nemusí být pravidelně). Na cestu mezi oázami je potřeba mít s sebou dostatečné množství vody a jídla. Dohromady lze v oázách načerpat právě tolik zásob, kolik potřebuje jedna karavana na obejití kružnice. Dokažte, že lze vybrat oázu takovou, že z ní může karavana vyjet ve směru hodinových ručiček a objet celou kružnici, nemá-li před načerpáním zásob v této oáze k dispozici žádné zásoby. Karavana pobere libovolné množství zásob.

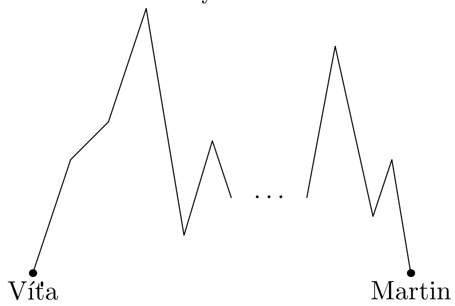
Představme si, že v libovolné z oáz je karavana K, která má obrovské zásoby jídla a vody. Tato karavana postupně (po směru hodinových ručiček) obejde všechny oázy a z každé odnese všechny zásoby, jež tam byly. Sledujme, jak se po cestě mění celková hmotnost zásob, které K nese. Ta se vždy v oáze zvýší o hmotnost zásob, které v ní byly, a na cestě mezi oázami se postupně zmenšuje. V oázách je dohromady přesně tolik zásob, kolik karavana cestou po kružnici spotřebuje, takže až se naše karavana K vrátí zpátky do počáteční oázy, bude mít stejně zásob jako na začátku. Uvažujme nyní místo, v němž byla celková hmotnost zásob nesených karavanou minimální (takové zřejmě existuje; je-li jich víc, vybereme si libovolné z nich). Hmotnost zásob se cestou mezi oázami snižuje, nejmenší je tedy těsně předtím, než karavana nabere zásoby v nějaké z oáz (značme ji O).

Dokažme, že když hledaná karavana L (tedy taková, jež na začátku nemá žádné zásoby), vyrazí z O, obejde celou kružnici. Pro spor předpokládejme, že jí na cestě mezi nějakými dvěma oázami zásoby dojdou a nemůže pokračovat dál. To ale znamená, že K za tímto místem měla méně zásob než v O, což je spor s volbou oázy O. Karavana L tedy obejde všechny oázy.

Poznámky k došlým řešením: Většina řešitelů pouze jednodušeji či složitěji dokazovala, že pokud chybí v nějaké oáze zásoby na přejití do další, pak musí jinde přebývat, a z toho usoudili, že lze najít oázu, ze které lze startovat. Za toto konstatování faktů a nepodloženou domněnku bylo 0 bodů. Pěkná řešení byla pomocí úvahy, kdy nalezneme vždy alespoň jednu oázu (A), ze které se dá dostat do následující oázy (B), a potom tento úsek „prodloužíme“ o následující úsek (z B do C) a zásoby „přesuneme“ z B do A. Takto postupujeme, až zbude jediná oáza, nebo tuto úpravu použijeme jako indukční krok. Zbylá správná řešení se podobala autorskému.

7. úloha (75, 6, 1,04, 1,0)

Víťa a Martin jeli na výlet do rumunských hor. Stojí na opačných stranách pohoří ve stejné nadmořské výšce a chtějí se pohybovat tak, že stále budou mít stejnou nadmořskou výšku. Cesta mezi nimi tvoří graf lineární lomené funkce (je to lomená čára). Každý bod cesty je alespoň tak vysoko jako počáteční nadmořská výška Víti a Martina. Dokažte, že se můžou setkat.



Napřed pohoří trochu zjednodušíme. Zlomem nazvěme takové místo, v němž se lomená čára „lomí“, tedy mění svůj sklon. Zřejmě pokud před zlomem cesta stoupala a za ním stoupá stále, můžeme tento zlom vynechat (nezáleží totiž na tom, jak prudce hory stoupají, ale jen na tom, zda stoupají nebo klesají). Podobně můžeme vynechat zlom uprostřed klesání. Také vede-li cesta mezi nějakými dvěma zlomy po rovině, můžeme tento úsek vynechat (zatímco jde jeden z kamarádů po rovině, druhý prostě počká na místě). Zabývejme se tedy dál jen takovými horami, že cesta mezi každými dvěma sousedními zlomy buď klesá, nebo stoupá a v každém zlomu mění svůj směr (to, zda stoupá či klesá). Vrcholem dále nazývejme takový zlom, že cesta před ním i za ním klesá, a obdobně údolím ten zlom, před nímž i za nímž cesta stoupá. Všechny body pohoří, jež jsou ve stejné nadmořské výšce jako nějaký vrchol nebo údolí, nazvěme významnými (za významné považujme i počáteční pozice Víti a Martina). Významných bodů je zřejmě jen konečně mnoho, očíslujme je tedy zleva $0, 1, \ldots, k$. Uspořádané dvojici významných bodů (a, b), které mají stejnou nadmořskou výšku, říkejme pozice.

Je-li $k = 0$, je situace triviální. Nechť tedy dál $k > 0$. Na začátku jsou kamarádi v pozici $(0, k)$, z ní se bezprostředně dostanou pouze do pozice $(1, k-1)$. Stejně tak pozice $(k, 0)$ sousedí jen s $(k-1, 1)$. Dokažme, že každá jiná pozice sousedí se sudým počtem pozic. Nechť jde o pozici (a, b). Rozlišíme několik možností:

a) Ani jeden z významných bodů a, b není vrchol ani údolí. To znamená, že oba chlapci jsou ve svahu a mohou se pohybovat buď dolů, nebo nahoru. Tato pozice tedy sousedí s právě dvěma pozicemi.

b) Právě jeden z významných bodů je vrchol nebo údolí. Bez újmy na obecnosti (BÚNO) nechť jde o vrchol. Kamarádi se mohou pohybovat jen dolů; ten na vrcholu si může vybrat, po které straně z kopce sejde. Opět se tedy mohou dostat do dvou pozic.

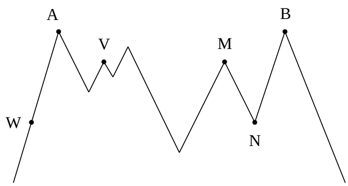
c) Jedno z uvažovaných míst je vrchol, druhé je údolí. Chlapec na vrcholu může jít jen dolů, ten v údolí zas jen nahoru, takže nemohou dojít do žádné jiné pozice :(– ovšem nula je také sudé číslo.

d) Oba významné body jsou vrcholy nebo jsou oba údolí. BÚNO nechť jde o vrcholy. Každý z chlapců si může vybrat, zda z vrcholu sejde po levém nebo pravém svahu, dohromady tudíž mají $2 \cdot 2 = 4$ možnosti, kam jít, tato pozice proto sousedí se čtyřmi pozicemi.

Znázorníme-li pozice body v rovině a spojíme-li dvě pozice čarou, právě když spolu sousedí, dostaneme graf. Uvažujme dál jen ty pozice, do kterých se dostaneme z počáteční $(0, k)$. Ty tvoří souvislý graf G. Stupněm pozice nazývejme počet pozic, které s ní sousedí. Uvědomme si, že součet stupňů všech pozic v G je sudý. Každá čára spojující dvě pozice (např. pozice A a B) je totiž započtena dvakrát – jednou ve stupni A a jednou ve stupni B. Součet stupňů je proto roven dvojnásobku počtu všech čar, takže je sudý. Počáteční pozice $(0, k)$ v G leží. Tato pozice má lichý stupeň, takže v G musí ležet nějaká další pozice lichého stupně. Jediná další pozice lichého stupně je $(k, 0)$, a proto tato pozice leží v G.

V G leží počáteční pozice i $(k, 0)$, v níž si Víťa s Martinem vyměnili místa. Můžou se tedy pohybovat tak, aby si vyměnili místa. Během tohoto pohybu se někde museli potkat, takže se jim toto setkání vždy povede.

Poznámky k došlým řešením:

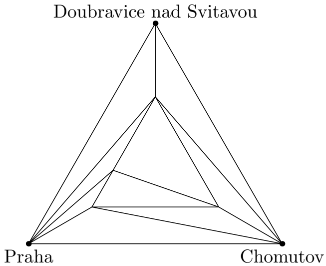


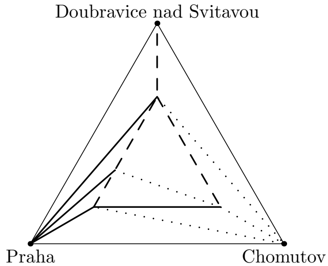
Většina řešitelů popsala nějaký způsob, jak se mají vedoucí pohybovat, aby se potkali. Často se i pokoušeli dokázat, že se jim to skutečně povede. Skoro všichni přitom v podstatě postupovali takto: „Když jeden dojde na vrchol a musí klesat, bude se ten druhý vracet a klesat s ním tak dlouho, dokud první nepřejde údolí, do nějž sešel, a nebude opět v původní nadmořské výšce. Pak zase budou chvíli stoupat a až někdo nebude moci dál, ten druhý se vrátí atd. Obdobně to udělají při sestupování do údolí, takže postupně přejdou všechny překážky a potkají se.“. Tato úvaha má bohužel jednu podstatnou vadu – občas se vrací Víťa a občas zase Martin. Přitom ale vůbec není jasné, že se nedostanou zpátky do pozice, v které už byli (může se jim to stát například v případě, že oba dojdou na stejně vysoké vrcholy a oba půjdou do údolí za nimi – to si můžeš rozmyslet třeba v situaci podle obrázku (A a B jsou stejně vysoko), půjde-li Víťa z V doleva a Martin z M vpravo, budou se po chvíli muset vrátit do situace (W, N), v níž už mohli být).

Další častou chybou bylo tvrzení, že se chlapci potkají v nějakém z nejvyšších bodů. Jak je vidět na obrázku, nemusí tomu tak být, je-li víc nejvyšších vrcholů.

8. úloha (33, 20, 1,27, 2,0)

Ve vrcholech trojúhelníku stojí tři velká města (Praha, Chomutov a Doubravice nad Svitavou). Uvnitř trojúhelníku tvořeného městy je několik vesnic. Některé obce jsou spojeny rovnými cestami, přitom jsou spojena každá dvě města. Žádné dvě cesty se neprotínají. Navíc libovolné území je ohraničeno právě třemi cestami. Dokažte, že cesty (takové, že vedou alespoň do jedné vesnice) lze rozdělit mezi města tak, že z libovolné vesnice do libovolného města M se lze dostat pouze po cestách patřících danému městu M. Příklad oblasti a následné rozdělení cest mezi města máte na obrázku.





Nejdříve upozorníme na drobnou nepřesnost v zadání. Budeme předpokládat, že se v oblasti nevyskytují izolované vesnice (nebo izolované skupiny vesnic[5]), do nich by se totiž nedalo dostat z žádného města, ani po cestách patřících jinému městu.

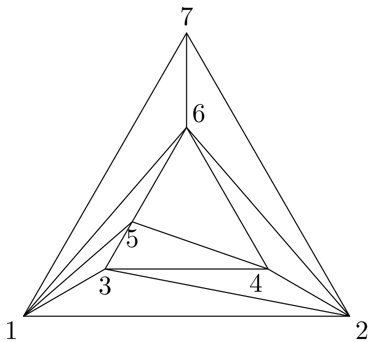
Myšlenka řešení je vhodně očíslovat obce (tedy města i vesnice). Z tohoto očíslování pak určíme, které cesty budou patřit ke kterému městu tak, aby bylo splněno zadání.

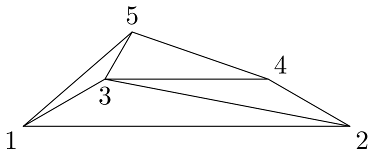
Předpokládejme, že máme n obcí, a chtějme je číslovat pomocí čísel 1, 2, ..., n. Na začátku přiřaďme čísla městům, a sice tak, že Praha bude mít číslo 1, Chomutov číslo 2 a Doubravice nad Svitavou číslo n.

Pro přehlednější vyjadřování budeme „grafem[6] obcí do i“ rozumět ty obce, jejichž číslo je menší nebo rovno i, a všechny cesty, které mezi těmito obcemi vedou. Na obrázku je vlevo nakreslen příklad rozmístění a očíslování obcí a vpravo graf obcí do 5. Navíc obec 3 je uvnitř tohoto grafu, zatímco ostatní obce jsou na hranici.

[5]Ve skutečnosti stačí předpokládat pouze, že nemáme izolované vesnice, neboť oblast, ve které by byla nějaká od měst izolovaná, ale navzájem propojená skupina vesnic, by byla ohraničena více než 3 cestami.

[6]V teorii grafů se tomuto pojmu říká graf indukovaný vrcholy 1, 2, ..., i.





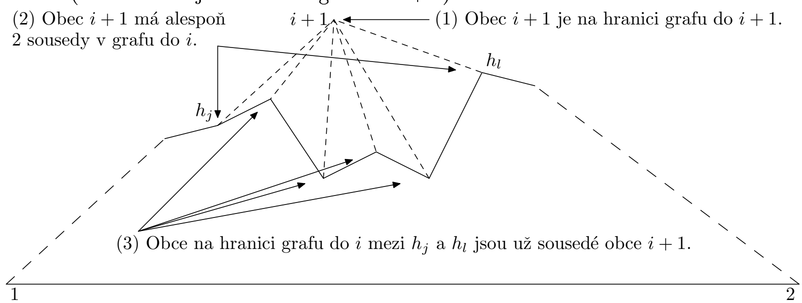
„Hraniční posloupností“ $\left\{h_j^{(i)}\right\}_{j=1}^{z}$ grafu obcí do i navíc budeme rozumět posloupnost všech obcí, které jsou na hranici začínající v obci 1 (Praze) a končící v obci 2 (Chomutově), přitom chceme, aby mezi sousedními členy posloupnosti vedla po hranici cesta. Tato posloupnost tedy závisí na zvoleném i. V případě, že i bude zřejmé (pevně dané), budeme psát jen h_j namísto $h_j^{(i)}$. Hraniční posloupností z předchozího obrázku je tedy posloupnost $h_1^{(5)} = h_1 = 1$, $h_2 = 5$, $h_3 = 4$, $h_4 = 2$.

Obce považujeme za sousední, právě když mezi nimi vede cesta.

Nyní si můžeme říci, jaké podmínky má očíslování obcí splňovat. Budeme chtít, aby pro každé $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ platilo:

(1) Obec $i+1$ je na hranici grafu do $i+1$.
(2) Obec $i+1$ má alespoň dva sousedy mezi obcemi $1, 2, \ldots, i$.
(3) Všichni sousedé obce $i+1$, jejichž čísla jsou menší nebo rovna i, tvoří interval hraniční posloupnosti grafu obcí do i, to jest existují nějaké dva indexy j, l, že obec s číslem m menším nebo rovným i je sousední obcí k $i+1$, právě když $m = h_p^{(i)}$ pro nějaké p takové, že $j \geq p \geq l$.

Obrázkem (na obrázku je naznačen graf do $i+1$):



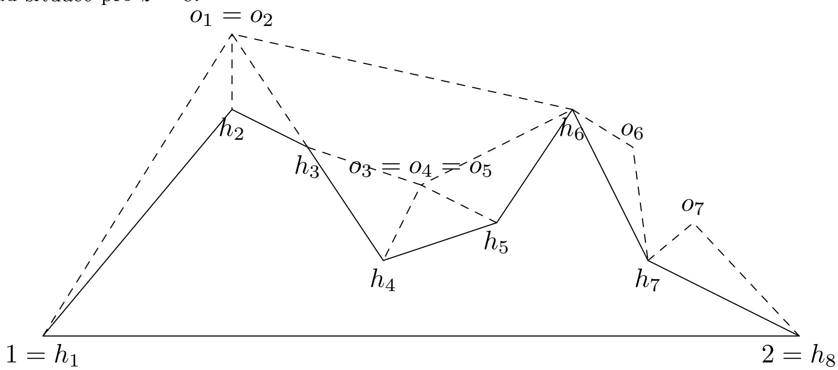
Nyní, když jsme si řekli, jaké bychom chtěli očíslování, dokážeme, že takové očíslování existuje. Důkaz nepůjde do všech detailů, aby nebyl příliš zdlouhavý, případné detaily si snadno doplníš sama/sám.

Budeme postupně vybírat obce, které mají mít čísla 3, 4, ...

Výběr obce s číslem 3 je jednoznačný – je právě jedna obec, která sousedí jak s obcí 1, tak s obcí 2. Všimni si, že jsou splněny podmínky (1), (2), (3) pro $i = 2$.

Dále budeme předpokládat, že jsme určili, které obce mají mít čísla 3, 4, …, k, a že jsou takto splněny podmínky (1), (2), (3) pro $2 \leq i \leq k-1$. Určíme obci s číslem $k+1$ tak, aby byly podmínky (1), (2), (3) splněny pro $i = k$ (všimni si, že tyto podmínky pro menší i nemůžeme porušit!).

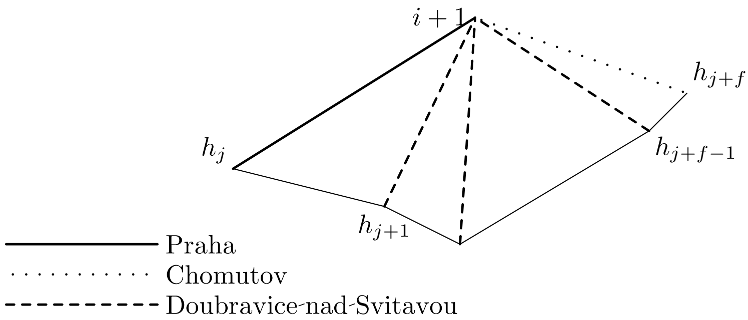
Vzpomeňme si na hraniční posloupnost $\left\{h_j^{(k)}\right\}_{j=1}^{z} = \{h_j\}_{j=1}^{z}$. Pro $j \in \{1, 2, \ldots, z-1\}$ vede cesta na hranici grafu do k mezi obcemi h_j a h_{j+1}. Jelikož každé území je ohraničeno třemi cestami, musí tato cesta společně s cestami z nějaké (jednoznačně určené) obce o_j (mimo graf do k) do obcí h_j, h_{j+1} ohraničovat nějaké území. Jsou-li všechny obce o_j pro $j \in \{1, 2, \ldots, z-1\}$ Doubravice nad Svitavou, potom si snadno rozmyslíš, že $k = n-1$ a máme vše očíslováno (zde se využije, že neexistují izolované obce). Máme tedy nějakou posloupnost $o_1, o_2, \ldots, o_{z-1}$ obcí takovou, že alespoň jedna z těchto obcí není Doubravice nad Svitavou. Na obrázku je nakreslen příklad situace pro $z = 8$.



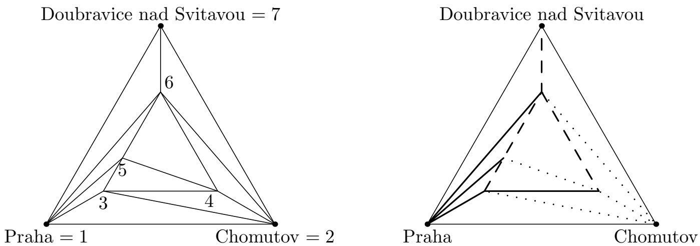
Myšlenka je, že jedna z obcí $o_1, \ldots, o_{z-1}$ bude označena číslem $k+1$. Podmínky (1) a (2) jsou splněny, ovšem kvůli podmínce (3) nelze vybrat libovolnou obci různou od Doubravice (podívej se na obrázek a obci o_1). Na druhou stranu lze najít obci takovou, že je splněna podmínka (3). Nejprve si uvědomíme, že kdykoliv je $1 \leq s < t < u < v \leq z-1$, potom nemůže nastat situace, že $o_s = o_u$, $o_t = o_v$ a $o_s \leq o_t$. Cesta z h_s přes o_s do h_u a cesta z h_t přes o_t do h_v by se totiž za této situace musely protínat, což je spor se zadáním úlohy. Z podobného důvodu se nemůže pro $1 \leq s < t < u \leq z-1$ stát, že o_t je Doubravice a $o_s = o_u$ není Doubravice. Po těchto dvou pozorováních si už snadno rozmyslíš, že podmínka (3) může být pro nějakou obci splněna. Potom tuto obci označíme číslem $k+1$. Takto postupně očíslujeme všechny vesnice tak, aby (1), (2), (3) bylo splněno.

A nyní už přijde hezčí a jednodušší část, a sice přiřazení cest městům.

Mějme obec $i+1$, ta má podle podmínky (3) všechny sousedy s číslem menším nebo rovným i jako členy $h_j, h_{j+1}, \ldots, h_{j+f}$ hraniční posloupnosti grafu do i. Podle (2) je $f \geq 1$. Cestu z obce $i+1$ do h_j přiřaďme Praze, cestu z obce $i+1$ do h_{j+f} přiřaďme Chomutovu a zbylé cesty z $i+1$ do $h_{j+1}, \ldots, h_{j+f-1}$ přiřaďme Doubravici nad Svitavou (pokud tyto cesty existují). Podívej se na obrázek.



Pro názornost si nakresleme ještě jeden obrázek – příklad očíslování a následné rozdělení cest.



Nyní už je velmi snadné například indukcí dokázat, že se z libovolného města do libovolné vesnice dostaneme, i když budeme používat pouze cesty patřící danému městu.

Nejprve provedeme důkaz indukcí podle čísla vesnice pro Prahu. Pro vesnici číslo 3 je tvrzení zřejmé – spojuje ji s Prahou cesta patřící Praze. Předpokládejme, že tvrzení platí pro vesnice s čísly menšími než i. Z vesnice i (podle toho, jak jsme cesty přiřazovali) vede buď pražská cesta přímo do Prahy, nebo do vesnice s číslem menším než i, odkud se lze podle indukčního předpokladu dostat do Prahy po cestách patřících jen Praze.

Pro Chomutov je důkaz téměř stejný.

Pro Doubravici se tvrzení dokáže indukcí pozpátku. Vesnici číslo $n-1$ spojuje s Doubravicí cesta patřící Doubravici (rozmysli si proč). Předpokládejme, že se z vesnic $n-1, n-2, \ldots, i+1$ lze dostat do Doubravice po cestách patřících Doubravici. Dokážeme tvrzení pro obec i. Podle vlastnosti 1 je obec i na hranici grafu do i. Jenže není na hranici celého území (tj. grafu do n). Tedy musí existovat w takové, že $i \leq w \leq n-1$ a že ves i je na hranici grafu do w a není na hranici grafu do $w+1$, tj. obec $w+1$ odřízla naši obec i od hranice. Jenže podle toho, jak jsme definovali cesty pro obec $w+1$, vede cesta z obce $w+1$ do obce i patřící Doubravici. Použijeme-li indukční předpoklad pro obec $w+1$, umíme se z obce i dostat přes obec $w+1$ až do Doubravice.

Poznámky k došlým řešením: Většina řešitelů se pokoušela úlohu řešit indukcí, a to postupným přidáváním vesnic a cest z nich vedoucích tak, aby v každém kroku byla všechna území trojúhelníková, přičemž vždy obarvili (tj. přiřadili nějakému z měst) jen nově přidané cesty, barvy ostatních cest neměnili. Tento postup má však jednu podstatnou vadu – nedají se jím totiž vytvořit všechny přípustné dopravní sítě. V každé takto vytvořené síti totiž existuje vesnice (ta poslední přidaná), z níž vycházejí pouze 3 nebo 4 cesty (podle toho, zda byla přidána na volné území nebo na cestu). Jenže existuje spousta dopravních sítí, v nichž z každé vesnice vede nejméně 5 cest – asi nejjednodušším příkladem je graf dvacetistěnu nakreslený do roviny.

Správný indukční krok by měl vypadat asi takto: Chceme obarvit síť s $n+1$ vesnicemi a předpokládáme, že každou síť s n vesnicemi již obarvit umíme. Vezmeme tedy vesnici, z níž vychází nejvýše 5 cest (nejprve musíme dokázat, že existuje), odebereme ji i s cestami, které z ní vycházejí a do vzniklé oblasti případně doplníme jednu nebo dvě cesty, abychom dostali síť se všemi územími trojúhelníkovými. Tato síť má jen n vesnic, tedy ji můžeme obarvit. Nakonec odebereme cesty, které jsme přidali, a vrátíme zpět vesnici a cesty, které jsme odebrali. Zbývá jen obarvit těchto maximálně 5 cest, v některých případech ještě asi bude nutné změnit barvu některých již obarvených cest. Tímto způsobem postupoval jen *Peter Černo* a nebýt několika vynechaných případů, dostal by plný počet bodů.

Úloha se však dala řešit i jinými způsoby než takovouto indukcí, ale o to se (překvapivě) nikdo nepokusil. Cesty se například daly obarvovat postupně od okraje trojúhelníka tak, že v prvním kroku se obarvily všechny hrany trojúhelníků s vrcholem v nějakém městě, v každém dalším kroku se vybrala jedna vesnice již „napojená“ na všechna města a obarvily se hrany všech trojúhelníků s vrcholem v této vesnici (zkus si rozmyslet, jak konkrétně by se cesty obarvovaly).