4. série

Téma: Příběhy z menzy

Termín odeslání: 5. ledna 2004

1. úloha (3 body)

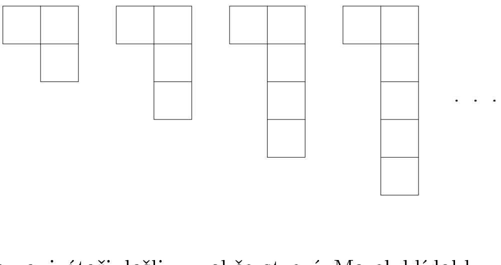
V kopcích v okolí menzy žije spousta zvířátek. Každé z nich má tři oblíbená čísla. Lišky mají své první oblíbené číslo dvojku, sovy mají v první řadě rády trojku, mazané kuny mají nejoblíbenější čtyřku, králíčci pětku a zajíčci šestku, jeleni v první řadě fandí sedmičce, norci osmičce a méďové devítce. Zvířátka jsou různobarevná. Hnědá zvířátka mají druhé oblíbené číslo dvanáctku, bílá jsou pro čtrnáctku, černá by si vybrala jako druhé číslo šestnáctku a pro zelená je druhá nejoblíbenější osmnáctka. Zvířátka jsou samozřejmě i různě velká. Malá zvířátka mají třetí oblíbené číslo malé číslo nula. Průměrně velká by volila o trochu větší desítku. Velká si vybírají už celkem velkou dvacítku. A obrovská mají třetí nejoblíbenější samozřejmě obrovskou pětadvacítku. Jedno zvířátko občas některé studenty v menze tak trochu straší. Jednou do ní zaběhlo a postrašilo tím, že součet jeho oblíbených čísel je 24. Jindy zase strašilo tím, že všechna jeho oblíbená čísla dávají stejný zbytek při dělení třemi. Které zvířátko občas postraší studenty?

2. úloha (3 body)

V menze na schůzkách organizátorů máme pěkný zvyk. Když se sejdeme, posadíme se do kruhu a začneme tleskat. Netleskáme ale jen tak. Tleskání musí mít ten správný rytmus a řád. Nejdřív tleskne Michal. Na každou další dobu tlesknou ti a jen ti, jejichž právě jeden soused na minulou dobu tlesknul. Když už nikdo netleská, schůzka může začít. Na jedné schůzce se sešlo 2^n organizátorů. Mohli někdy začít schůzovat?

3. úloha (3 body)

Na jiné schůzce si po tradičním pozdravu Martin všiml zajímavé novinky, totiž celá podlaha je pokryta dlaždičkami typu "L" (viz obrázek na konci). David hned dodal, že je to moc pěkné, protože nejen menzu, ale rovnou celou rovinu lze pokrýt těmito dlaždičkami tak, že každá je použita právě jednou. Má David s pokrýváním roviny pravdu?



4. úloha (5 bodů)

Mezitím, co si ostatní organizátoři došli pro občerstvení, Marek hlídal bundy a hrál si s drobečky na stole. Podařilo se mu je poskládat do zajímavého útvaru, kdy v okolí každého drobečku jsou právě tři jiné, které od něj mají vzdálenost 5 cm. Kolik mohlo být drobečků?

5. úloha (5 bodů)

Jelikož jsou matfyzáci líní přecházet mezi jednotlivými místnostmi menzy, vystavěli si úžasný systém mikrotramvají. Mezi každými dvěma místnostmi jezdí mikrotramvaj v právě jednom směru. Dinovi začíná cvičení až za půl hodiny, a tak ho napadlo, že volný čas může vyplnit tím, že si vybere nějakou první místnost a pak se projede mikrotramvajemi po menze tak, že každou místnost navštíví právě jednou (a nebude mezi místnostmi přecházet). Dokažte, že takový výběr cestování se Dinovi může povést, ať už mikrotramvaje jezdí jakkoliv.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Jednou si s sebou na schůzku Anša vzala velké domino. Všimla si, že její dominové kostičky zakrývají právě dvě políčka trochu zvláštní šachovnice $(2n + 1)$ krát $(2n + 1)$, na které právě Pavel s Frsem hráli šachy. Rozehraná šachová partie jí příliš nezajímala, postupně brala figurky z šachovnice a skládala na ni dominové kostičky. Nakonec zaplnila celou šachovnici až na levé dolní políčko. Honza si všiml, že s dominy lze po šachovnici posouvat tak, že každé políčko, které se od levého dolního liší v obou souřadnicích o sudé číslo, může zůstat nezakryto. Napadlo ho, že i kdyby Anša poskládala domina jinak (s levým dolním políčkem nezakrytým), bude stále platit jeho pozorování z předchozího rozestavění. Poraďte Honzovi, jak jeho nápad dokázat.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Jídelna v menze má čtvercový půdorys se šachovnicovou podlahou o n^2 polích. V každém poli šachovnice je jedno místo k sezení. Ne vždy se oběd v menze podaří uvařit podle představ studentů. Jednou, když byla menza plná, bylo pár porcí dokonce přiotrávených salmonelou. Navíc se postupně nakazovali další studenti tak, že kdykoliv měli aspoň dva sousedy (hranou, nikoli rohem) nakažené, nakazili se také. Kolik nejméně mohlo být otrávených porcí, když víme, že se nakazila celá menza?

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Poměrně nedávno se v menze opravovalo osvětlení. Elektrikáři natahali všude po menze dráty (přímky), některé dráty se občas protínaly, ale žádné tři v jednom bodě. Systém drátů byl opravdu velmi nepřehledný, mířily od stropu k podlaze, od podlahy ke stěnám, od stěn ke stěnám … Dokonce žádné tři dráty neležely v jedné rovině. Kolik dvojic drátů se nejvýše mohlo protínat?

Řešení 4. série

1. úloha
V kopcích v okolí menzy žije spousta zvířátek. Každé z nich má tři oblíbená čísla. Lišky mají své první oblíbené číslo dvojku, sovy mají v první řadě rády trojku, mazané kuny mají nejoblíbenější čtyřku, králíčci pětku a zajíčci šestku, jeleni v první řadě fandí sedmičce, norci osmičce a méďové devítce. Zvířátka jsou různobarevná. Hnědá zvířátka mají druhé oblíbené číslo dvanáctku, bílá jsou pro čtrnáctku, černá by si vybrala jako druhé číslo šestnáctku a pro zelená je druhá nejoblíbenější osmnáctka. Zvířátka jsou samozřejmě i různě velká. Malá zvířátka mají třetí oblíbené číslo malé číslo nula. Průměrně velká by volila o trochu větší desítku. Velká si vybírají už celkem velkou dvacítku. A obrovská mají třetí nejoblíbenější samozřejmě obrovskou pětadvacítku. Jedno zvířátko občas některé studenty v menze tak trochu straší. Jednou do ní zaběhlo a postrašilo tím, že součet jeho oblíbených čísel je 24. Jindy zase strašilo tím, že všechna jeho oblíbená čísla dávají stejný zbytek při dělení třemi. Které zvířátko občas postraší studenty?

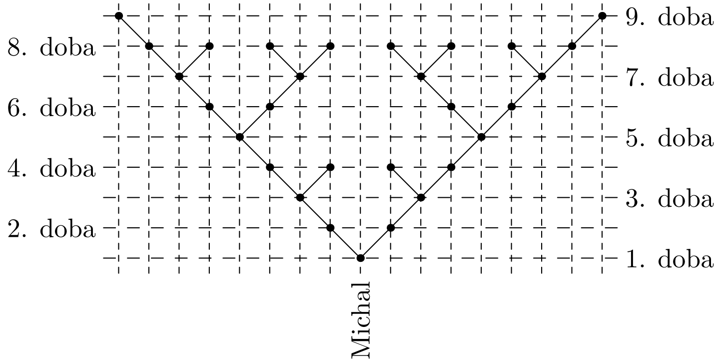
Pro přehlednost si ještě opišme, jaké může být první, druhé a třetí oblíbené číslo. První může být jedno z čísel 1, 2, ... , 9, druhé 12, 14, 16, či 18 a třetí 0, 10, 20 nebo 25. Součet prvního a druhého nejoblíbenějšího čísla je tedy alespoň 13, tedy třetí nejoblíbenější číslo nemůže být 20 ani 25, jinak by všechna tři čísla dávala dohromady více než 24. Je-li 10 třetí nejoblíbenější číslo našeho zvířátka, potom jediné možné druhé nejoblíbenější číslo dávající stejný zbytek při dělení třemi je 16, dohromady dávají 26, odkud plyne že součet všech tří čísel nemůže být 24, tedy 10 nemůže být třetí nejoblíbenější číslo. Nyní už tedy víme, že se jedná o malé zvířátko (s třetím oblíbeným číslem 0). Pro druhé oblíbené číslo, má-li dávat stejný zbytek jako nula při dělení třemi, zbývá 12 nebo 18. Bylo-li by to 12, potom je vzhledem k součtu 24 i první číslo 12, což nelze. Tedy druhé číslo je 18 a jedná se o zelené zvířátko. Odtud už plyne, že první číslo je 6 (opět součet 24). Zvířátko, které občas postraší studenty v menze, je tedy malý zelený zajíček.

Poznámky k došlým řešením: Úloha nebyla obtížná a navíc jsem ji hodnotil dost mírně, proto dostala drtivá většina řešitelů plný počet bodů. Co bych však chtěl zdůraznit, že hledané zvířátko nebyl zajíc, či zajac, ani zajačik, i když to už je bližší skutečnosti, hledané zvířátko byl Zajíček! Ovšem podstatná je i jeho velikost a barva, to je totiž plná charakterizace zvířátka, takže úplná správná odpověď je, že studenty občas postraší Malý Zelený Zajíček!

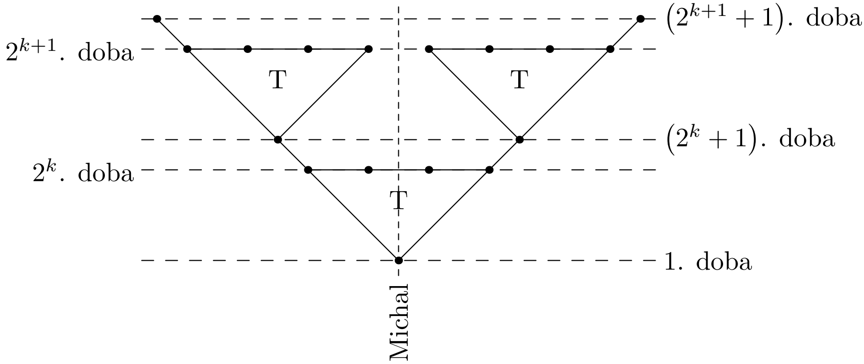
2. úloha
V menze na schůzkách organizátorů máme pěkný zvyk. Když se sejdeme, posadíme se do kruhu a začneme tleskat. Netleskáme ale jen tak. Tleskání musí mít ten správný rytmus a řád. Nejdřív tleskne Michal. Na každou další dobu tlesknou ti a jen ti, jejichž právě jeden soused na minulou dobu tlesknul. Když už nikdo netleská, schůzka může začít. Na jedné schůzce se sešlo 2^n organizátorů. Mohli někdy začít schůzovat?

Organizátoři samozřejmě sedí na obvodu kruhu, aby úloha dávala smysl (za tuto drobnou nepřesnost se omlouváme).

Pro začátek si řekněme, že vzdáleností nějakých dvou organizátorů Pepy a Tomáše budeme rozumět menší z počtu organizátorů sedících mezi Pepou a Tomášem po směru hodinových ručiček zvětšeného o jedna a počtu organizátorů sedících mezi Pepou a Tomášem proti směru hodinových ručiček zvětšeného o jedna. Tedy například dva sousední organizátoři mají vzdálenost 1, organizátoři sedící v kruhu naproti sobě mají vzdálenost 2^{n-1}.



Nakresleme si obrázek vývoje tleskání. Na x-ovou osu vyznačujme organizátory tak, že někam vyznačíme Michala a napravo od Michala dávejme postupně jemu nejbližší organizátory proti směru hodinových ručiček, nalevo od Michala dávejme postupně jemu nejbližší organizátory po směru hodinových ručiček. Na y-ovou osu značme dobu, na kterou se tleská. Puntíkem vyznačme, když nějaký organizátor na nějakou dobu tleská. Na prvním obrázku jsme ještě nějaké puntíky spojili úsečkami, aby bylo lépe vidět, jaký obrázek vzniká.



Všimněme si zajímavé vlastnosti obrázku. Pro k malá (tj. menší než $n-1$, aby obrázek nespojil svůj pravý a levý konec tím, že je na kružnici) označme "T" obrázek, který vznikne tleskáním do 2^k. doby (včetně), potom tleskáním do 2^{k+1}. doby vzniknou další dva stejné (akorát posunuté) obrázky. To funguje kvůli tomu, že se zachovává vlastnost, že na 2^i. dobu (pro každé $i < n$) všichni organizátoři, kteří mají vzdálenost od Michala lichou a menší než 2^i, tleskají (a tedy na (2^i+1). dobu (pro $i < n-1$) tleskají právě ti organizátoři, kteří mají vzdálenost od Michala 2^i. Potom už je myšlenka řešení jasná, na 2^{n-1} dobu budou tleskat všichni organizátoři, kteří mají lichou vzdálenost od Michala (tj. každý druhý organizátor), a tedy na $(2^{n-1}+1)$. dobu už nebude tleskat nikdo.

Právě jsme popsali pro přehlednost základní myšlenku, nyní zbývá myšlenku pořádně dokázat.

Pokud se Ti myšlenka zdá dostatečně průkazná a nechceš se trápit s indexy, třeba i pořádný důkaz vynechej.

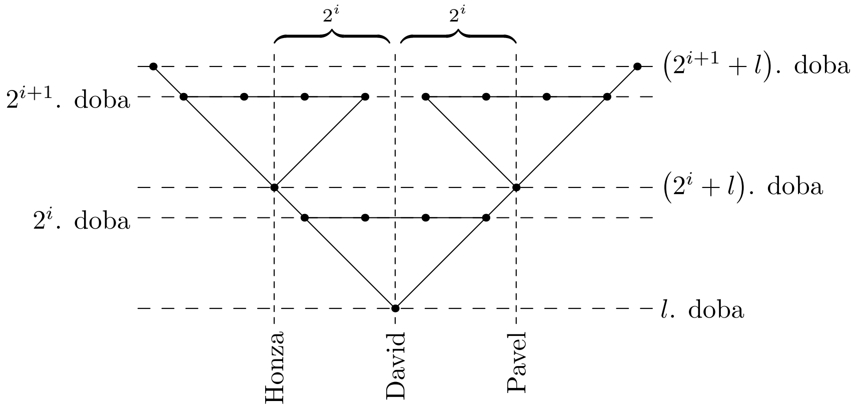
Budeme dokazovat indukcí a budeme dokazovat trochu silnější tvrzení, aby se nám indukce lépe prováděla.

Mějme dáno $l \in \mathbb{N}$ a $k < n - 1$. Tleská-li nějaký organizátor David na l. dobu a zároveň do vzdálenosti $2^{k+1} - 1$ od Davida nikdo na l. dobu netleská, potom z organizátorů, kteří mají od Davida vzdálenost menší rovnou 2^k, na $(2^k + l - 1)$. dobu tleskají právě ti, jejichž vzdálenost od Davida je lichá.

Pro $k = 1$ je tvrzení jasné.

Nadále předpokládejme, že tvrzení platí pro $k = i$ a dokazujme ho pro $k = i + 1 < n - 1$.

Všichni organizátoři tleskající na l. dobu mají vzdálenost od Davida aspoň $2^{i+2} - 1 > 2^{i+1} - 1$, tedy můžeme použít indukční předpoklad a z těch organizátorů, kteří mají od Davida vzdálenost menší nebo rovnou 2^i, na $(2^i + l - 1)$. dobu tleskají právě ti, jejichž vzdálenost od Davida je lichá. Dále si všimněme, že organizátoři, jejichž vzdálenost od Davida je $2^i + 1$, na $(2^i + l - 1)$. dobu netleskají, neboť na l. dobu byla jejich vzdálenost od nejbližšího tleskajícího organizátora větší než $2^i - 1$ (předpoklad, že do vzdálenosti $2^{i+2} - 1$ od Davida nikdo netleská) a za každou dobu se nejbližší tleskající může přiblížit nanejvýš o 1 (rozmysli si). To ale znamená podle pravidel tleskání, že na $(2^i + 1)$. dobu tleskají z těch organizátorů, co mají od Davida vzdálenost menší nebo rovnou 2^i, právě ti dva (Honza a Pavel), kteří mají vzdálenost přesně 2^i.



Vzhledem k tomu, že $i + 1 < n - 1$, mají Honza a Pavel od sebe vzdálenost $2^i + 2^i = 2^{i+1}$ (vzdálenost přes Davida je kratší než mimo Davida), tedy směrem k Davidovi se nenajde organizátor, který by od nich měl vzdálenost menší nebo rovnou $2^{i+1} - 1$ a tleskal by. Směrem od Davida se nenajde také, neboť nějaký takový Filip by měl od Davida vzdálenost větší než 2^i, ale menší než 2^{i+1}, což by znamenalo, že by Filipova vzdálenost od nejbližšího tleskajícího na l. dobu byla (z předpokladu, že na l. dobu do vzdálenosti $2^{i+2} - 1$ od Davida nikdo netleská) větší než 2^i, což je opět spor s tím, že o 2^i dob později Filip tleská. Tedy víme, že dostatečně daleko od Honzy a Pavla nikdo netleská, můžeme použít indukční předpoklad a dostaneme, že na (2^{i+1}). dobu tleskají ti, kteří mají vzdálenost od Honzy či Pavla lichou a menší nebo rovnou 2^i, což jsou ti, kteří mají od Davida vzdálenost lichou a menší rovnou 2^{i+1}, a netleskají ti, kteří mají vzdálenost od Honzy či Pavla sudou a menší nebo rovnou 2^i, což jsou ti, kteří mají od Davida vzdálenost sudou a menší rovnou 2^{i+1}, což jsme chtěli dokázat.

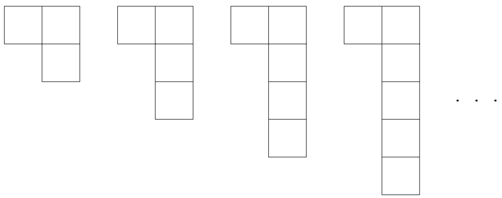
Pro $n = 1$ je řešení celé úlohy snadné, oba organizátoři se v tleskání střídají a schůzka nezačne.

Pro $n > 1$ už jen použijeme právě dokázané tvrzení pro Michala, 1. dobu a $k = n - 2$, dostaneme, že všichni, kteří mají od Michala vzdálenost lichou, na 2^{n-1}. dobu tleskají, odkud na $(2^{n-1} + 1)$. dobu netleská nikdo.

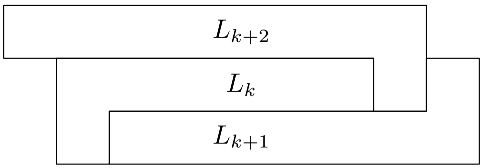
Poznámky k došlým řešením: Úlohu jsem hodnotil velmi mírně, protože přesné řešení (takové, kterému by nebylo možné sem tam něco vytknout) nebylo vůbec snadné napsat. Tedy za myšlenku řešení jsem už (většinou – pokud byla aspoň trochu průkazná) uděloval 3 body. Dva imaginární body si zasloužili *Vlado Virčík* a *Eva Černohorská*, kteří úlohu dokazovali indukcí a všimli si, že když tleská 2^n organizátorů a pozorujeme jen každého druhého organizátora, tak tleskají zcela stejně (až na nějaké opoždění), jako kdyby tleskalo jen 2^{n-1} organizátorů.

3. úloha

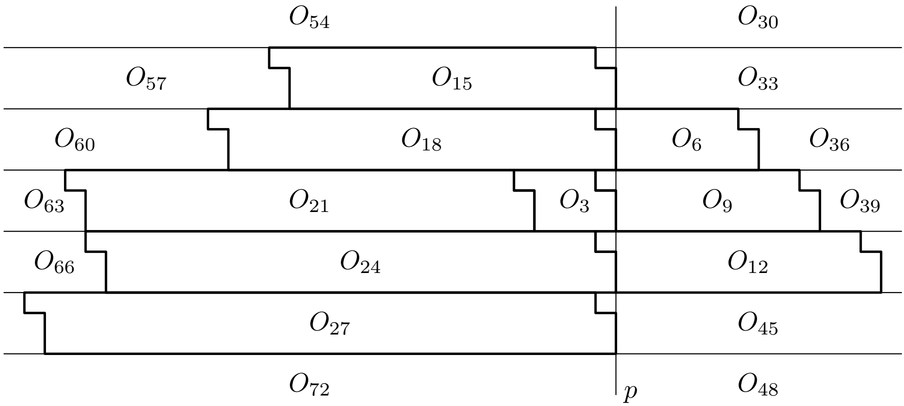
Na jiné schůzce si po tradičním pozdravu Martin všiml zajímavé novinky, totiž celá podlaha je pokryta dlaždičkami typu "L" (viz obrázek na konci). David hned dodal, že je to moc pěkné, protože nejen menzu, ale rovnou celou rovinu lze pokrýt těmito dlaždičkami tak, že každá je použita právě jednou. Má David s pokrýváním roviny pravdu?



Dokážeme, že David má pravdu, a to tak, že najdeme vhodné pokrytí roviny. Označme si L_k dlaždičku typu "L" obsahující k čtverečků. Pokrýváme tedy dlaždičkami L_3, L_4, … Nejprve si uvědomme, že pro libovolné přirozené $k \geq 3$ můžeme pomocí dlaždiček L_k, L_{k+1} a L_{k+2} pokrýt obdélník $(k+1) \times 3$ bez čtverečku v pravém horním rohu, ale naopak s čtverečkem navíc v levém horním rohu (viz obrázek). Důkaz snadno plyne z obrázku.



Označme takový pozměněný obdélník O_k. Pokud se nám rovinu podaří pokrýt útvary O_3, O_6, O_9, …, použijeme každou dlaždičku typu "L" právě jednou, hledejme tedy takové pokrytí. Rozřežme rovinu na pásy o tloušťce 3. Každý z těchto pásů lze snadno pomocí pozměněných obdélníků pokrýt, musíme však pokrývat aspoň trochu chytře, abychom zaručili, že i všechny pásy budou pokryté.



Zvolme si nějakou přímku p kolmou na pásy a nějaký z pásů označme za první. O_3 umístěme do prvního nalevo od p (viz obrázek). Potom po řadě umísťujme 3, 5, 7, … nejmenších O_k, a to vždy odshora dolu do sousedních pásů tak, že umísťujeme-li $2i-1$ obdélníků, bude i. umístěn do prvního pásu. Navíc pravidelně střídejme, jestli pozměněné obdélníky pokládáme těsně vedle nalevo nebo napravo od již položených (v případě, že v daném pásu ještě žádný položený není, pokládejme například těsně vedle p).

Uvědomíme si, že takovým způsobem už vydlaždičkujeme celou rovinu. Stačí si uvědomit, že vydlaždičkujeme každý z pásů. Mějme tedy nějaký pás se vzdáleností m od prvního. Potom vždy když pokládáme $2m+1$, $2m+3$, $2m+5$, … upravených obdélníků, položíme na tento pás nějaký z nich. To je nekonečně mnoho pozměněných obdélníků, a jelikož pravidelně střídáme pravou a levou stranu, není těžké si rozmyslet, že pás pokryjeme celý (čtvereček se vzdáleností j od přímky p nanejvýš po $2j$ krocích – alespoň j jich je na správnou stranu a každý O_k má tloušťku alespoň 1).

Poznámky k došlým řešením: V podstatě nikdo z řešitelů neprovedl pořádný důkaz toho, že svým způsobem pokryje skutečně celou rovinu. Nutno podotknout, že úloha byla poměrně těžká – tedy na tříbodovku. Z tohoto důvodu jsem dával za „pouhé“ nalezení způsobu pokrytí plný počet bodů. Všem bych ale doporučil pořádně prostudovat vzorové řešení. Častým problémem bylo také to, že někteří řešitelé nevěděli, co to znamená pokrýt celou rovinu, popř. tento pojem špatně pochopili. Opět bych se odkázal na vzorové řešení a doplňující poznámku jak zjistit, zda-li jsme pokryli skutečně celou rovinu. Pokrytí je úplné, pokud platí: Pro libovolně velký čtverec se stranami konečné délky, jenž má střed v pevném (tzn. pro všechny čtverce stejném) bodě, existuje konečný počet kroků pokrývání, po jejichž provedení bude vybraný čtverec pokrytý.

4. úloha

Mezitím, co si ostatní organizátoři došli pro občerstvení, Marek hlídal bundy a hrál si s drobečky na stole. Podařilo se mu je poskládat do zajímavého útvaru, kdy v okolí každého drobečku jsou právě tři jiné, které od něj mají vzdálenost 5 cm. Kolik mohlo být drobečků?

Předpokládejme, že na stole je aspoň jeden drobeček. Pak tedy musí být aspoň čtyři. Pro 4 drobečky ale neexistuje rozestavění vyhovující podmínkám úlohy, což dokážeme sporem. Nechť takové rozestavění existuje. Pak vzdálenost libovolné dvojice různých drobečků je 5 cm. Každá trojice drobečků tedy tvoří rovnostranný trojúhelník o straně 5 cm. Označíme-li si drobečky písmeny A, B, C, D, pak trojúhelníky ABC a ABD jsou rovnostranné, body C a D jsou různé, a tedy C je osově souměrný s D podle osy AB a vzdálenost těchto dvou bodů je $\sqrt{3} \cdot 5$ cm $\neq 5$ cm.

Drobečků tedy musí být aspoň 5. Nemůže jich být ale lichý počet, což zase dokážeme sporem: nechť existuje rozestavění lichého počtu drobečků splňující podmínky úlohy. Pak také existuje graf, jehož vrcholy jsou drobečky a hrany jsou dvojice drobečků, které mají vzdálenost 5 cm. Tento graf má lichý počet vrcholů a každý vrchol má stupeň 3 (tedy je také lichý). To je ale spor, protože součet stupňů všech vrcholů v grafu je vždy sudé číslo (dvojnásobek počtu hran).

Víme tedy, že počet drobečků musí být sudé číslo větší nebo rovno 6. Pro každé takové číslo již existuje rozmístění vyhovující zadání:

Mějme $2k$ drobečků, kde $k \geq 3$ je celé číslo. Rozdělíme je na dvě poloviny, z první sestavíme pravidelný k-úhelník o straně 5 cm a z druhé sestavíme shodný k-úhelník, který vznikne posunutím toho původního o 5 cm ve vhodném směru: existuje jen konečně směrů takových, že by posunutý k-úhelník měl společný vrchol s původním k-úhelníkem a jen konečně směrů takových, že by nějaký vrchol posunutého k-úhelníka měl od dvou vrcholů původního k-úhelníka vzdálenost 5 cm (pro libovolnou dvojici vrcholů původního k-úhelníka existují v rovině nejvýše dva různé body, které mají od obou vrcholů vzdálenost 5 cm, a dvojic vrcholů je konečně mnoho). Ze zbylých (nekonečně mnoha) směrů tedy nějaký vybereme a ve vzniklém rozmístění drobečků pak platí, že každý vrchol má právě dva sousedy ve svém k-úhelníku a právě jednoho souseda v druhém k-úhelníku (kde soused znamená drobeček vzdálený 5 cm).

Poznámky k došlým řešením: Tento príklad nebol až taký ťažký a veľa z vás ho preto malo za päť bodov. Mnohí však našli len jeden z možných počtov drobečkov a tým pádom nemohli mať veľa bodov. Našli sa dokonca aj riešitelia, ktorí rozoberali prípad pre nekonečne veľa drobečkov ale iba jeden z vás si všimol, že drobečkov mohlo byť aj nula.

5. úloha

Jelikož jsou matfyzáci líní přecházet mezi jednotlivými místnostmi menzy, vystavěli si úžasný systém mikrotramvají. Mezi každými dvěma místnostmi jezdí mikrotramvaj v právě jednom směru. Dinovi začíná cvičení až za půl hodiny, a tak ho napadlo, že volný čas může vyplnit tím, že si vybere nějakou první místnost a pak se projede mikrotramvajemi po menze tak, že každou místnost navštíví právě jednou (a nebude mezi místnostmi přecházet). Dokažte, že takový výběr cestování se Dinovi může povést, ať už mikrotramvaje jezdí jakkoliv.

Úlohu vyřešíme indukcí vzhledem k počtu místností menzy. Pro dvě a méně místností není co řešit. Předpokládejme tedy, že danou trasu lze najít pro libovolně jezdící tramvaje mezi n místnostmi, a rozhodněme, zda je tomu tak i pro $n + 1$ místností.

Mezi prvními n místnostmi se můžeme podle indukčního předpokladu projet. Bez újmy na obecnosti tramvaje jezdí z první do druhé, z druhé do třetí, ... , z $n - 1$. do n. místnosti (když ne, tak je přečíslujeme). Otázka je, zda lze vždy na tuto trasu nějak napojit naši přebytečnou $n+1$. místnost.

Pokud jede tramvaj z naší přebytečné $n+1$. místnosti do první místnosti, je vymalováno, neboť poté přejedeme z $n+1$. místnosti do první a pokračujeme po předešlé trase. Tedy se omezíme na případ, kdy tramvaje jezdí z první do $n+1$. místnosti.

Pokud tramvaje jezdí z prvé až k. místnosti do $n+1$. místnosti, ale naopak z $n+1$. místnosti do $k+1$. místnosti, jsme také hotovi, neboť potom naši trasu projedeme v pořadí místností 1, 2, $\ldots$, k, $n+1$, $k+1$, $k+2$, $\ldots$, n.

Zbývá tedy dořešit poslední případ, když tramvaje do $n+1$. místnosti pouze přijíždějí, ale neodjíždějí z ní. To je však jednoduché, místnosti projedeme přesně tak, jak jsou očíslovány – od 1 do $n+1$.

Poznámky k došlým řešením: Správná řešení byla vesměs podobna autorskému, odlišné přístupy k cíli spíše nevedly, neboť v nich řešitelé často brali za zřejmá tvrzení, která buďto zdaleka zřejmá nebyla (byla přinejmenším stejně obtížná jako úloha sama), nebo vůbec neplatila.

6. úloha

Jednou si s sebou na schůzku Anša vzala velké domino. Všimla si, že její dominové kostičky zakrývají právě dvě políčka trochu zvláštní šachovnice $(2n+1)$ krát $(2n+1)$, na které právě Pavel s Frsem hráli šachy. Rozehraná šachová partie jí příliš nezajímala, postupně brala figurky z šachovnice a skládala na ni dominové kostičky. Nakonec zaplnila celou šachovnici až na levé dolní políčko. Honza si všiml, že s dominy lze po šachovnici posouvat tak, že každé políčko, které se od levého dolního liší v obou souřadnicích o sudé číslo, může zůstat nezakryto. Napadlo ho, že i kdyby Anša poskládala domina jinak (s levým dolním políčkem nezakrytým), bude stále platit jeho pozorování z předchozího rozestavění. Poraďte Honzovi, jak jeho nápad dokázat.

Označme souřadnicemi (i,j) políčko v i-tém řádku a j-tém sloupci tak, že dolní levé políčko má souřadnice $(1,1)$. Políčka s oběma souřadnicemi lichými nazvěme černá, políčka s oběma souřadnicemi sudými šedá, ostatní bílá. Má se tedy dokázat, že při libovolném rozestavění, kdy je políčko $(1,1)$ nezakryté, lze posouváním domin odkrýt každé z ostatních černých políček.

Zvolme libovolně nějaké černé políčko $C_0=(i_0,j_0)$, které je na začátku zakryto. Domino ležící na C_0 pokrývá ještě jedno sousední bílé políčko $B_0=(i_0+a_0,j_0+b_0)$ (právě jedno z čísel a_0,b_0 je rovno 0, druhé 1 nebo -1). Označme $C_1=(i_0+2a_0,j_0+2b_0)$ (nejbližší černé políčko ve směru dominové kostky ležící na C_0). Pokud na C_1 leží domino, najdeme podobným způsobem políčko C_2, atd. Obecně pokud pro $k\ge 0$ na políčku $C_k=(i_k,j_k)$ leží domino pokrývající ještě políčko $B_k=(i_k+a_k,j_k+b_k)$, označíme $C_{k+1}=(i_k+2a_k,j_k+2b_k)$.

Pokud pro žádné přirozené k nenastane $C_k=(1,1)$, musí se někde posloupnost C_0, C_1, $\ldots$ zacyklit. Označme tedy m nejmenší přirozené číslo takové, že $C_m=C_k$ pro nějaké $k\in\{0,1,\ldots,m-1\}$. Políčka C_k, B_k, C_{k+1}, B_{k+1}, $\ldots$, C_{m-1}, B_{m-1} tedy ohraničují mnohoúhelník M_1 složený z $r_1<(2n+1)(2n+1)$ šachovnicových políček (do tohoto mnohoúhelníku se nezapočítávají políčka C_k, $\ldots$, B_{m-1}), mezi nimiž je aspoň jedno šedé (například právě jedno ze dvou šedých políček, která rohem sousedí s C_m a C_{m+1}), označme si jej S_0. Toto políčko není rohové, musí tedy být pokryto dominem, které současně pokrývá nějaké sousední bílé políčko ležící v M_1. Podobně jako posloupnost C_0, C_1, $\ldots$ sestrojme posloupnost šedých políček S_0, S_1, $\ldots$ Všechna tato políčka leží v M_1, jsou tedy pokryta dominy a posloupnost se opět zacyklí, čímž dostaneme mnohoúhelník M_2 složený z $r_2<r_1$ šachovnicových políček, mezi nimiž je aspoň jedno černé. Takto bychom postupně zkonstruovali nekonečnou posloupnost mnohoúhelníků M_1,

$M_2, \ldots$, jejichž obsahy $r_1, r_2, \ldots$ se v každém kroku zmenšují aspoň o 1, což je spor. (Ke sporu se dá dojít i jinak – například když se dokáže, že obsah r_1 mnohoúhelníku M_1 je liché číslo.)

Existuje tedy přirozené číslo k, pro které $C_k = (1, 1)$. Políčko C_0 lze odkrýt po k tazích: při p-tém tahu posuneme domino ležící na políčku C_{k-p} o jedno políčko tak, že zakryje C_{k-p+1} a odkryje C_{k-p}.

Poznámky k došlým řešením: Väčšina riešiteľov dokazovala, že každé pole ktoré Honza uvolní, musí byť od lavého dolného rohu vzdialené o párny počet riadkov i stĺpcov. Za takéto riešenie som nekompromisne udeloval 0 bodov :-(. Tak ich všetkých prosím, venujte tomu chvíľku času a uvedomte si: Je to podstatne iná úloha a podstatne lahšia úloha než dokazovať, že všetky polia ktoré sú od lavého dolného vzdialené o párny počet riadkov a stĺpcov môže Honza posúvaním domín uvolniť.

7. úloha

Jídelna v menze má čtvercový půdorys se šachovnicovou podlahou o n^2 polích. V každém poli šachovnice je jedno místo k sezení. Ne vždy se oběd v menze podaří uvařit podle představ studentů. Jednou, když byla menza plná, bylo pár porcí dokonce přiotrávených salmonelou. Navíc se postupně nakazovali další studenti tak, že kdykoliv měli aspoň dva sousedy (hranou, nikoli rohem) nakažené, nakazili se také. Kolik nejméně mohlo být otrávených porcí, když víme, že se nakazila celá menza?

Nakresleme si plán jídelny do nekonečné čtvercové sítě jako čtverec o straně délky n (každému studentovi odpovídá jedno políčko sítě). Označme k počet otrávených porcí (neboli počet nakažených studentů na začátku) a obarvěme příslušných k políček zeleně, ostatní políčka jsou bílá. Označme P počet hran, které sousedí s bílým i zeleným políčkem (P je součet obvodů všech zelených mnohoúhelníků). Musí platit $P \leq 4k$, protože každé zelené políčko přispěje do výsledného součtu maximálně 4 hranami.

Vždy, když se nakazí další student, obarvíme jemu odpovídající políčko zeleně. Přitom se číslo P nezvětší: pokud políčko před obarvením sousedilo s $k \geq 2$ zelenými políčky, ubude po jeho obarvení k hran oddělujících zelené a bílé políčko a přibude jich jen $4 - k$. Dohromady se tedy číslo P zvětší o $4 - 2k \leq 0$. Až se nakazí celá menza, bude zeleně obarven celý čtverec n krát n, číslo P tedy bude rovno $4n$. Stále bude platit $P \leq 4k$, z čehož plyne $k \geq n$, tedy na otrávení celé menzy je potřeba aspoň n otrávených porcí.

Tento počet je také postačující: například pokud jsou na začátku nakaženi všichni studenti sedící na jedné úhlopříčce čtverce (na políčkách o souřadnicích $(1, 1)i$, $(2, 2), \ldots, (n, n)$), nakazí se v prvním kroku všichni studenti na souřadnicích (i, j), kde $|i - j| = 1$ (sousedí se dvěma nakaženými studenty na souřadnicích (i, i) a (j, j)), obecně v k-tém kroku se nakazí všichni studenti na souřadnicích (i, j), kde $|i - j| = k$. Po $n - 1$ krocích tedy bude nakažená celá menza.

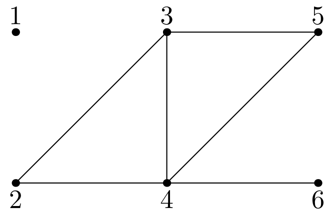
Poznámky k došlým řešením: Téměř všichni řešitelé přišli na to, že n nakažených porcí stačí na nakažení celé menzy. Za tuto (jednoduchou) část jsem uděloval 1 bod. Bylo však potřeba ještě dokázat, že menší počet nakažených porcí nestačí při libovolném počátečním rozmístění (4 body). S tím již mělo mnoho řešitelů problémy. Častá chybná argumentace spočívala v tvrzení, že optimální rozmístění pro menzu $(n + 1) \times (n + 1)$ musí vzniknout z optimálního rozmístění pro menzu $n \times n$ přidáním jedné nakažené porce, pro což neexistuje v našem případě žádný zjevný důvod. Navíc to není pravda (rozmyslete si, že existuje spousta optimálních rozmístění, které tímto způsobem nevzniknou).

8. úloha

Poměrně nedávno se v menze opravovalo osvětlení. Elektrikáři natahali všude po menze dráty (přímky), některé dráty se občas protínaly, ale žádné tři v jednom bodě. Systém drátů byl opravdu velmi nepřehledný, mířily od stropu k podlaze, od podlahy ke stěnám, od stěn ke stěnám … Dokonce žádné tři dráty neležely v jedné rovině. Kolik dvojic drátů se nejvýše mohlo protínat?

Začneme s tím, že si řekneme pár pojmů týkajících se grafů, pokud víš, co je graf, stupeň vrcholu a trojúhelník v grafu, můžeš následující dva odstavce přeskočit.

Grafem G budeme rozumět uspořádanou dvojici $G = (V, E)$, kde V budeme nazývat množinou vrcholů a E množinou hran. Po obou množinách budeme chtít, aby byly konečné. Po množině E budeme navíc chtít, aby byla podmnožinou dvojic vrcholů. Graf si tedy můžeme představovat jako nějakou množinu bodů (= vrcholů) například v rovině, přičemž nějaké dvojice vrcholů jsou spojené hranami. Aby dva vrcholy spojovalo více hran je zakázáno, stejně jako je zakázáno, aby nějaká hrana vedla z nějakého vrcholu v opět do v. Stupněm $\deg v$ vrcholu v rozumíme počet hran z vrcholu v vycházejících. Nakonec trojúhelníkem v grafu G budeme rozumět takovou trojici vrcholů u, v, w, že $\{uv\}$, $\{uw\}$ a $\{vw\}$ jsou hrany (tj. leží v množině hran).



Na obrázku je jako příklad nakreslen graf $G = (V, E)$, kde $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{\{23\}, \{24\}, \{34\}, \{35\}, \{45\}, \{46\}\}$. Tento graf obsahuje dva trojúhelníky tvořené vrcholy 234 a 345. Nakonec $\deg 1 = 0$, $\deg 2 = 2$, $\deg 3 = 3$, $\deg 4 = 4$, $\deg 5 = 2$, $\deg 6 = 1$.

Nyní si dokážeme lemma, které nám bude velmi nápomocné.

($\heartsuit$) *Graf G bez trojúhelníků s n vrcholy má nanejvýš* $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ *hran*[1].

Důkaz. Označme m počet hran. Dále označme v_1, v_2, … , v_n vrcholy grafu G a e_1, e_2, … , e_m hrany G. Nakonec pro hranu $e_k = \{v_i v_j\}$ označme $\deg e_k = \deg v_i + \deg v_j$.

Uvědomme si, že platí

$$\frac{2m}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \deg v_i}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \deg^2 v_i}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{m} \deg e_k}{n}} \leq \sqrt{\frac{mn}{n}} = \sqrt{m}. \qquad (\diamondsuit)$$

Potom dostáváme $\frac{2m}{n} \leq \sqrt{m}, \sqrt{m} \leq \frac{n}{2}$, $m \leq \frac{n^2}{4}$. Vzhledem k tomu, že m je celé, tedy platí $m \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. K úspěšnému dokončení důkazu tedy zbývá uvědomit si ($\diamondsuit$).

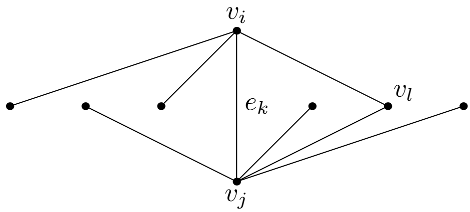
První rovnost je snadná, sčítáme-li totiž stupně všech vrcholů, můžeme si představit, že přičítáme jedničku za každou hranu, která vede do daného vrcholu, pro všechny vrcholy. Tím každou hranu započítáme dvakrát, neboť vede mezi dvěma vrcholy.

Následující nerovnost plyne přímo z nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem.

[1] Výraz $\lfloor x \rfloor$ pro x reálné značí dolní celou část čísla x, tj. největší celé číslo, které je menší nebo rovno x.

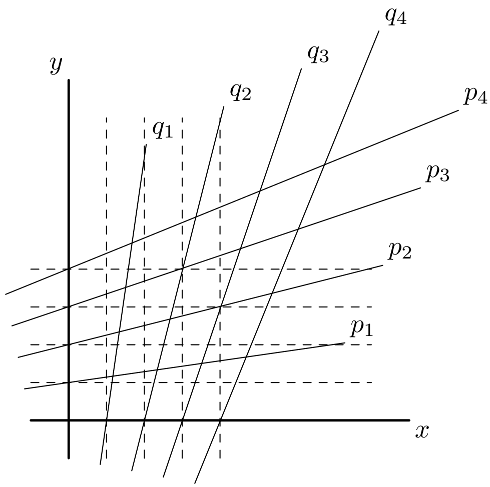
Další rovnost si uvědomíme podobným argumentem jako první rovnost. Součet druhých mocnin stupňů si totiž lze představit tak, že za každou hranu, která vede do daného vrcholu, přičteme stupeň vrcholu, pro všechny vrcholy. Za každou hranu $e_k = \{v_i v_j\}$ tedy jednou přičteme stupeň vrcholu v_i a jednou stupeň vrcholu v_j, což je přesně $\deg e_k$.

V poslední nerovnosti konečně využijeme toho, že se jedná o graf bez trojúhelníků. Chceme si uvědomit, že $\sum_{k=1}^{m} \deg e_k \leq mn$, k čemuž si stačí uvědomit, že pro každé k je $\deg e_k \leq n$. Předpokládejme, že $e_k = \{v_i v_j\}$. Nechť pro spor je $\deg v_i + \deg v_j > n$. Tedy z Dirichletova principu (vrcholů je pouze n) existuje vrchol v_l takový, že $\{v_i v_l\}$ i $\{v_j v_l\}$ jsou hrany. Zřejmě $l \neq i, l \neq j$, protože hrana nemůže vést z v_i do v_i, respektive z v_j do v_j. Jenže tím dostáváme spor s tím, že G neobsahuje trojúhelníky, $v_i v_j v_l$ je totiž trojúhelník.



Tím je důkaz (♡) ukončen.

Nyní už vyřešíme zadanou úlohu. Předpokládejme, že máme n drátů. Utvořme graf G, jehož množinou vrcholů bude množina drátů a hrany vedou mezi těmi dráty (vrcholy), které se protínají. Tento graf neobsahuje trojúhelníky. Kdyby totiž pro nějaké tři dráty d_i, d_j, d_k platilo, že se d_i a d_j protínají, d_i a d_k protínají a d_j a d_k protínají ve třech různých bodech, potom d_i, d_j a d_k leží v jedné rovině, což je spor s předpoklady úlohy. Podle (♡) má G nejvýše $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ hran, tedy nejvýše tolik dvojic drátů se může protínat.



Na druhou stranu nalezneme příklad, kde se už $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ dvojic přímek (drátů) protíná, a tím ukážeme, že $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ je hledaná hodnota. Přímky nalezneme například na grafu funkce $f(x,y) = xy$. Prvních $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ přímek označme p_1, p_2, ..., $p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, zbývajících $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ přímek označme q_1, q_2, ..., $q_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Přímku p_k nalezneme tak, že položíme $y = k$ a $z = f(x,k) = kx$, tedy $p_k = \{[x,y,z] | x \in \mathbb{R}, y = k, z = kx\}$. Přímku q_k nalezneme tak, že položíme $x = k$ a $z = f(k,y) = ky$, tedy $q_k = \{[x,y,z] | y \in \mathbb{R}, x = k, z = ky\}$. Přímky p_1, p_2, ..., $p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ jsou navzájem mimoběžné (mají různé směrnice jako funkce x a leží v rovnoběžných rovinách $y = k$), podobně q_1, q_2, ..., $q_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ jsou navzájem mimoběžné, odtud už snadno plyne, že žádné tři neleží v jedné rovině ani se žádné tři neprotínají v jednom bodě (našli bychom tam dvě mimoběžné). Na druhou stranu mají $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \left(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)$ průsečíků $f(i,j)$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ a $j \in \{1, 2, \ldots, n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Nyní už si stačí uvědomit, že $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \left(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Pro n sudé je

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) = \frac{n}{2} \left(n - \frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{4} = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor,$$

pro n liché je

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) = \frac{n-1}{2} \left(n - \frac{n-1}{2}\right) = \frac{n^2-1}{4} = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Tím je úloha vyřešena.

Poznámky k došlým řešením: Řešitele lze zhruba rozdělit do tří skupin. Řešitelé v první skupině vyřešili úlohu ze zadání a získali 5 bodů. V druhé skupině se objevili řešitelé, kteří vyřešili jinou úlohu. Totiž počítali počet možných průsečíků pro libovolné množství přímek (a vyšlo jim nekonečno). Tato úloha je výrazně lehčí (jedná se o lehčí tříbodovou úlohu), a tak řešitele mohlo napadnout, že to asi nebude správná interpretace (navíc elektrikáři budou asi těžko mít nekonečně mnoho drátů, aby měli nekonečně mnoho průsečíků). Nicméně, protože se do jisté míry jednalo i o naši chybu (počet přímek jsme neoznačili), rozhodl jsem se za taková řešení udělovat 3 body. Třetí skupinu tvořili řešitelé, kteří nevyřešili úlohu vůbec. Kuriózní bylo například řešení, ve kterém počet možných průsečíků vyšel větší než počet dvojic přímek.