# 2. série

**Téma:** Racionální a iracionální čísla

**Termín odeslání:** 3. listopadu 2003

1. úloha (3 body)

Rozhodněte, zda existuje
(a) pětiúhelník
(b) šestiúhelník
takový, že délky všech jeho úhlopříček jsou racionální.

2. úloha (3 body)

Rozhodněte, zda existují přirozená čísla $a, b, c, d, e, f$ taková, že

$$\frac{a}{d} > \frac{a+b}{d+e} \quad \text{a} \quad \frac{b+c}{e+f} > \frac{c}{f}.$$

3. úloha (3 body)

Určete, pro která $n$ existuje $n$-tice po dvou různých iracionálních čísel taková, že součin každé $k$-tice pro $k < n$ je iracionální, ale součin všech je racionální.

4. úloha (5 bodů)

Rozhodněte, zda existuje kladné iracionální číslo $a$, že $a^a$ je racionální.

5. úloha (5 bodů)

Nechť $F_n$ je podle velikosti uspořádaná konečná posloupnost všech zlomků $\frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N})$ v základním tvaru, které se nacházejí v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a pro něž platí $q \leq n$ . Např. $F_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}, F_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}, F_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}, \ldots$ Nechť $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ jsou dva sousední členy z $F_n$. Dokažte, že pak $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}$.

6. úloha (5 bodů)

Posloupnost racionálních čísel $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňuje rekurentní vztah $a_{n+1} = 2a_n^2 - 2a_n + 1$. Najděte všechna $a_0$, že existují čtyři různé indexy $r, s, t, u$ takové, že $a_r - a_s = a_t - a_u$.

7. úloha (5 bodů)

(a) Rozhodněte, pro která racionální čísla můžeme z jejich desetinného zápisu udělat číslo iracionální tak, že proházíme pozice některých cifer, přičemž smíme každou cifru nechat na původním místě, nebo ji posunout o jedno místo doprava, či doleva.
(b) Rozhodněte, jestli z desetinného zápisu libovolného iracionální čísla můžeme udělat číslo racionální tak, že proházíme pozice některých cifer, přičemž smíme každou cifru nechat na původním místě, nebo ji posunout o jedno místo doprava, či doleva.
(c) Rozhodněte, jestli z desetinného zápisu libovolného iracionální čísla můžeme udělat číslo racionální tak, že proházíme pozice některých cifer, přičemž smíme prohazovat libovolně.

8. úloha (5 bodů)

Rozhodněte, jestli existuje číslo, které není algebraické, nicméně je kořenem polynomu s algebraickými koeficienty.

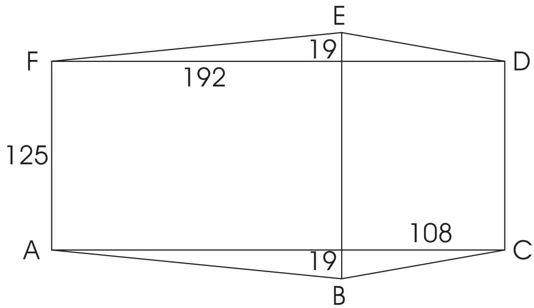
# Řešení 2. série

**1. úloha**
Rozhodněte, zda existuje
(a) pětiúhelník
(b) šestiúhelník
takový, že délky všech jeho úhlopříček jsou racionální.

V obou částech je odpověď ano.

Vyhovující pětiúhelník je velmi lehké sestrojit, stačí vzít pravidelný pětiúhelník takový, že délka jeho (jedné) úhlopříčky je 1. Pravidelný pětiúhelník má všechny úhlopříčky stejně dlouhé, tedy délka všech úhlopříček je 1, což je racionální číslo.

Po chvíli zkoušení se dá najít i vyhovující šestiúhelník. Například šestiúhelník na obrázku má délky všech úhlopříček přirozené, tedy i racionální. Rozmyslete si z Pythagorovy věty, že tomu tak skutečně je.




**2. úloha**
Rozhodněte, zda existují přirozená čísla $a, b, c, d, e, f$ taková, že

$$\frac{a}{d} > \frac{a+b}{d+e} \quad \text{a} \quad \frac{b+c}{e+f} > \frac{c}{f}.$$

Na první nejmenované české vysoké škole studuje $d + e$ studentů $(d, e > 0)$. Prvních $d$ má součet IQ roven $a = 140d$, zbývajících $e$ studentů má součet IQ roven $b = 120e$. Průměrné IQ na této škole dané výrazem $\frac{a+b}{d+e}$ je tedy někde mezi 120 a 140. Na druhé nejmenované české vysoké škole studuje $f$ studentů $(f > 0)$ a součet jejich IQ je roven $c = 100f$, průměrné IQ dané výrazem $\frac{c}{f}$ je tedy rovno 100. Náhle se $e$ studentů se součtem IQ $b = 120e$ rozhodne přestoupit z první nejmenované české vysoké školy na druhou nejmenovanou. Na první nejmenované škole potom bude průměrné IQ dané výrazem $\frac{a}{d}$ rovno 140, na druhé škole bude IQ udáno výrazem $\frac{b+c}{e+f}$ a bude někde mezi 100 a 120. Lze tedy najít čísla $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ vyhovující podmínkám zadání.

Poznámky k došlým řešením: Protože stačilo najít šest čísel, napsat je a dosadit do nerovnic, tak skoro všechna řešení byla správná. Většina řešitelů upravila zadanou soustavu na $\frac{a}{d} > \frac{b}{c} > \frac{e}{f}$ a prohlásila, že tato nerovnost má triviálně řešení. Pokud řešitel neuvedl konkrétní příklad

vyhovující i zadané nerovnosti nebo neukázal, že úpravy byly ekvivalentní, pak jsem nemohl takové řešení považovat za správné. Řešitel tímto způsobem dokázal:
1) Jestliže má původní soustava řešení, pak i upravená nerovnost má řešení.
2) Upravená nerovnost má řešení (uznával jsem za zřejmé).

Z toho ale neplyne, že zadaná nerovnost má řešení. K tomu by bylo nutné dokázat opačnou implikaci. Názorný příklad (od nejmenovaného řešitele): Zadanou soustavu jednoduše převedeme na soustavu

$$a \cdot c > b \cdot d, \qquad -c \cdot e > -b \cdot f.$$

Sečtením získáme $c \cdot (a - e) > b \cdot (d - f)$. Tato nerovnost má řešení $a = 9$, $b = 2$, $c = 5$, $d = 8$, $e = 3$, $f = 4$, které však nevyhovuje druhé zadané nerovnosti. Další častou chybou bylo násobení nerovnosti nějakým výrazem bez kontroly jeho nezápornosti.

**3. úloha**

Určete, pro která $n$ existuje $n$-tice po dvou různých iracionálních čísel taková, že součin každé $k$-tice pro $k < n$ je iracionální, ale součin všech je racionální.

Ukážeme, že takovou $n$-tici najdeme pro každé $n > 1$. Zřejmě $n = 1$ nevyhovuje, máme-li iracionální číslo, potom součin sestávající jen z něho racionální nebude. Pro $n = 2$ vezměme čísla $\sqrt{2}$ a $2\sqrt{2}$, ta jsou iracionální, různá, jejich součin je roven 4, což je racionální číslo. Pro $n > 2$ uvažujme $n - 1$ různých prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$. Jako hledanou $n$-tici vezměme čísla $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}}, \sqrt{p_1 \cdot p_2 \cdots p_{n-1}}$. Součinem všech těchto čísel dostaneme číslo $p_1 \cdot p_2 \cdots p_{n-1}$, což je číslo racionální (dokonce přirozené). Pokud ale vynásobíme členy nějaké $k$-tice pro $k < n$, je součin tvaru

$$\sqrt{p_{i_1}^2 \cdot p_{i_2}^2 \cdots p_{i_r}^2} \cdot \sqrt{p_{j_1} \cdot p_{j_2} \cdots p_{j_s}},$$

kde $\{i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s\} \subset \{1, \ldots, n-1\}$ a $s \geq 1$ ($r$ může být nulové, potom je první součin roven jedné). Druhý součin je iracionální číslo, první číslo přirozené, jejich součinem je proto číslo iracionální (rozmysli si!), tím je úloha dokázána.

**4. úloha**

Rozhodněte, zda existuje kladné iracionální číslo $a$, že $a^a$ je racionální.

Označme $f(x) = x^x$. Jak víme z povídání, funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $(0; \infty)$, tedy i na intervalu $\langle 1; 2\rangle$. Navíc $f(1) = 1$, $f(2) = 4$. Podle Darbouxovy vlastnosti tedy existuje nějaké $a \in \langle 1; 2\rangle$, že $f(a) = 2$. Zbývá ukázat, že $a$ je iracionální. Pro spor předpokládejme, že se jedná o racionální číslo, tedy $a = \frac{p}{q}$ pro $p, q$ přirozená, tedy

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}} = 2,$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{p} = 2^q.$$

Na pravé straně je celé číslo, tedy i na levé straně musí být celé číslo, což znamená, že $a = \frac{p}{q}$ je celé číslo. Jenže na intervalu $\langle 1; 2\rangle$ jsou pouze dvě celá čísla a ani pro jedno rovnost $a^a = 2$ není splněna. Dostali jsme spor, $a$ musí být iracionální.

**5. úloha**

Nechť $F_n$ je podle velikosti uspořádaná konečná posloupnost všech zlomků $\frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N})$ v základním tvaru, které se nacházejí v intervalu $\langle 0,1\rangle$ a pro něž platí $q \leq n$ . Např. $F_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}, F_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}, F_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}, \ldots$ Nechť $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ jsou dva sousední členy z $F_n$. Dokažte, že pak $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}$.

**Tvrzení.** Nechť $k$ je největší společný dělitel čísel $a$ a $b$. Potom existují celá čísla $x$, $y$ taková, že $k = bx - ay$.

Toto tvrzení je snadné nahlédnout z Eukleidova algoritmu pro hledání největšího společného dělitele, který nám dá také návod, jak taková čísla najít.

Protože $a$, $b$ v naší úloze jsou nesoudělná, existují celá čísla $x$, $y$ taková, že

$$bx - ay = 1 \tag{1}$$

a přitom

$$n - b < y \leq n. \tag{2}$$

(Máme-li dvojici $(x, y)$ splňující rovnici (1), splňuje ji i každá dvojice tvaru $(x + ka, y + kb)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.) Čísla $x$, $y$ jsou nesoudělná, $y \geq n - b + 1 \geq 1$ a úpravou (1) dostaneme

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{1}{by}, \tag{3}$$

tedy $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} \leq \frac{a+1}{b} \leq 1$ (poslední nerovnost plyne z toho, že $\frac{a}{b}$ není největší zlomek v $F_n$). Vidíme tedy, že $\frac{x}{y}$ je prvek $F_n$ a platí $\frac{x}{y} \geq \frac{c}{d}$. Dokážeme, že platí rovnost. Kdyby totiž $\frac{x}{y} > \frac{c}{d}$, tak $\frac{x}{y} - \frac{c}{d} \geq \frac{1}{yd}$, podobně $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{bd}$, a tedy $\frac{x}{y} - \frac{a}{b} \geq \frac{b+y}{bdy}$ a podle (3) $\frac{1}{by} \geq \frac{b+y}{bdy}$, z toho podle (2) plyne $d \geq b + y > n$, což je spor s tím, že $\frac{c}{d}$ je prvkem $F_n$. Z rovnosti $\frac{x}{y} = \frac{c}{d}$ plyne $x = c$, $y = d$ (oba zlomky jsou v základním tvaru), takže z (3) již dostáváme požadovanou rovnost.

### 6. úloha

Posloupnost racionálních čísel $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňuje rekurentní vztah $a_{n+1} = 2a_n^2 - 2a_n + 1$. Najděte všechna $a_0$, že existují čtyři různé indexy $r, s, t, u$ takové, že $a_r - a_s = a_t - a_u$.

Přepišme si rovnost ze zadání jako $a_r + a_u = a_s + a_t$. Nechť $a_0 = \frac{p}{q}$ je zlomek v základním tvaru, rozebereme postupně několik možností, které nám pokryjí všechna racionální čísla.

První možnost je, že $q > 1$ a existuje liché prvočíslo $l$ dělící $q$. Potom $q$ je možno psát ve tvaru $q = x \cdot l^k$, přičemž $l$ nedělí $x$. Podívejme se na $a_1$.

$$a_1 = 2a_0^2 - 2a_0 + 1 = 2(\frac{p}{q})^2 - 2\frac{p}{q} + 1 = \frac{2p^2 - 2pq + q^2}{q^2} = \frac{P}{Q}.$$

Protože $l$ dělí $q$ ale ne $p$, dostáváme, že l nedělí $P$. Proto v zápise $a_1$ jakožto zlomku v základním tvaru bude v rozkladu jmenovatele $l$ v mocnině $2k$. Nyní můžeme provést stejnou úvahu, ale začneme od $a_1$, indukcí tak dostaneme, že v zápise $a_i$ bude ve jmenovateli $l$ v mocnině $2^i k$. Pokud bychom nyní měli čtyři různé členy takové, že součet dvou je roven součtu zbylých, po vynásobení nejmenším společným násobkem příslušných jmenovatelů bychom dostali rovnost, v níž by se vyskytovaly tři členy dělitelné $l$ a jeden $l$ nedělitelný (ten odpovídá členu s největším indexem), což ovšem není možné, číslo dělitelné $l$ se jistě nemůže rovnat číslu nedělitelnému $l$.

Nechť je nyní $q = 2^k$, $k > 1$. Potom z toho, že $p$ je liché, plyne, že $P$ je rovno dvojnásobku lichého čísla. Z toho plyne, že po vykrácení dvěma nám ve jmenovateli $a_1$ zůstane $2^{2k-1}$. Opět indukcí bychom dostali, že jmenovatel $a_i$ je tvaru $2^{2^i k-(2^i-1)}$, pokud si napíšeme požadovanou rovnost a provedeme stejnou úvahu jako minule, dostaneme, že se sudé číslo má rovnat lichému, opět spor.

Zbývají případy, kdy $q = 1$ nebo $q = 2$. Nechť $a_0$ je kladné. Podívejme se, kdy je $a_{n+1} > 2a_n$. Podle definice to znamená $2a_n^2 - 2a_n + 1 > 2a_n$, tedy $2a_n^2 - 4a_n + 1 > 0$. Vyřešíme-li tuto nerovnici, dostáváme podmínku $a_n > 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Je-li tedy $a_0 \geq 2$, je každý člen posloupnosti větší než dvojnásobek předchozího. To také znamená, že v požadované rovnosti je na jedné straně člen větší než součet členů na druhé straně, přičtením kladného čísla se nerovnost nezmění, rovnost proto nemůže nastat.

Je-li $a_0$ záporné, snadno vyřešením nerovnice $2a_0^2 - 2a_0 + 1 > 2$ zjistíme, že následující členy jsou kladné větší než 2 (uvažujeme už jen čísla tvaru $-\frac{k}{2}$, $k \in \mathbb{N}$). Také není problém zjistit, že, $|a_0| < a_1$ – vyřešíme $-a_0 < 2a_0^2 - 2a_0 + 1$. Podíváme-li se na požadovanou rovnost, musí se v ní vyskytnout $a_0$, jinak můžeme provést úvahy z minulého odstavce. Pokud ale máme $a_0 + a_u = a_s + a_t$, BÚNO $u > s > t$ ($u$ musí být vzhledem k monotonii největší), rovnost si přepíšeme na $a_u = a_s + a_t + |a_0|$. Je ale

$$a_u > 2a_s > a_s + 2a_t > a_s + a_t + |a_0|.$$

Rovnost tedy opět nemůže nastat.

Pro $a_0 = \frac{3}{2}$ je $a_1 = \frac{5}{2}$ a můžeme sledovat stejné úvahy jako v případě $a_0 \geq 2$.

Zbývají možnosti $a_0 = 0, \frac{1}{2}, 1$. Snadno se ověří, že ve všech třech případech je posloupnost nejvýše od druhého členu konstantní, potřebné indexy proto určitě najdeme (např. $r = 2$, $s = 3$, $t = 4$, $u = 5$).

Poznámky k došlým řešením: Úloha se skládala ze dvou částí – najít všechny vyhovující hodnoty $a_0$ a ukázat, že další již neexistují. S první částí si většina řešitelů poradila, na hodnoty šlo přijít prostým zkoušením, s druhou částí už to bylo horší, elegantní bylo zavést si vhodnou substituci a zkoumat racionální kořeny polynomu s celočíselnými koeficienty.

**7. úloha**

(a) Rozhodněte, pro která racionální čísla můžeme z jejich desetinného zápisu udělat číslo iracionální tak, že proházíme pozice některých cifer, přičemž smíme každou cifru nechat na původním místě, nebo ji posunout o jedno místo doprava, či doleva.

(b) Rozhodněte, jestli z desetinného zápisu libovolného iracionální čísla můžeme udělat číslo racionální tak, že proházíme pozice některých cifer, přičemž smíme každou cifru nechat na původním místě, nebo ji posunout o jedno místo doprava, či doleva.

(c) Rozhodněte, jestli z desetinného zápisu libovolného iracionální čísla můžeme udělat číslo racionální tak, že proházíme pozice některých cifer, přičemž smíme prohazovat libovolně.

a) Mějme nějaké takové číslo $n$. Můžeme předpokládat, že je nezáporné, jinak ho pronásobíme $-1$ a provádíme analogické úvahy. Zapišme $n$ ve tvaru desetinného rozvoje. Tedy

$$n = z + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3} + \cdots,$$

kde $z$ je nějaké celé číslo (celá část) a $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, pro $i \in \mathbb{N}$. Protože se jedná o racionální číslo, musí mít desetinný zápis periodický. Zajímejme se tedy, jestli je možné tento zápis přeskládat na neperiodický.

Jsou-li všechna $a_i$ od nějakého indexu $k$ (tedy pro $i \geq k$) stejná, potom přeskládávání od $i \geq k + 1$ nic nemění, tedy periodicity se nemůžeme zbavit a číslo nelze přeskládat.

Neexistuje-li index $k$, že by $a_i$ pro $i \geq k$ byla všechna stejná, ukážeme, že číslo $n$ můžeme přeskládat na iracionální. Nejprve nalezněme index $l$, od kterého je posloupnost $\{a_i\}_{i=l}^{\infty}$ periodická, takový index existuje, protože číslo $n$ je racionální. Označme $p \geq 2$ délku periody (například nejkratší). Víme, že všechna čísla nejsou stejná, tedy existuje nějaké $m \geq l$ takové, že $a_m \neq a_{m+1}$. Z periodicity plyne, že $a_m = a_{m+jp}$, $a_{m+1} = a_{m+jp+1}$ pro každé přirozené $j$. Nyní si zvolme jakoukoliv neperiodickou posloupnost $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ nul a jedniček, například $c_i = 1$, pokud $i$ je druhou mocninou přirozeného čísla, a $c_i = 0$, pokud $i$ není druhou mocninou přirozeného čísla (rozmyslete si, že tato posloupnost není periodická). Nyní prohazujme cifry $n$ podle následujícího klíče. Cifry $a_{m+jp}$ a $a_{m+jp+1}$ prohoďme, právě když $c_j = 1$. Ostatní cifry nechejme na místě. Označme $b_i$ cifru takto vzniklého čísla v místě, kde byla cifra $a_i$. Zbývá dokázat, že takto vzniklé číslo je iracionální, tedy že nemá periodický desetinný rozvoj. Pro spor předpokládejme, že existuje $r$, že posloupnost$\{b_i\}_{i=r}^{\infty}$ je periodická s periodou $q$. Vyberme si $t = m + jp$ nějaké takové číslo, že $t \geq r$. Potom $b_{t+ap+ipq} = b_{t+ap}$ pro $i$ přirozené, $a$ celé nezáporné. Rozepišme ještě jako $b_{m+jp+ap+ipq} = b_{m+jp+ap}$. To, ale znamená, že $c_{a+j+iq} = 0$, právě když $c_{a+j} = 0$, neboli $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ je od členu $j$ periodická s periodou $q$. To je spor s volbou posloupnosti $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$.

b) Snadno sestrojíme příklad iracionálního čísla, které není možné přeskládat na racionální. Například číslo

$$n = c_1 10^{-1} + c_2 10^{-2} + c_3 10^{-3} + \cdots,$$

kde za $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ dosadíme posloupnost z části a), tedy $c_i = 1$, pokud $i$ je druhou mocninou přirozeného čísla a $c_i = 0$, pokud $i$ není druhou mocninou přirozeného čísla. Dokážeme, že po žádném přeházení splňujícím podmínky zadání nezískáme racionální číslo. Proházejme tedy cifry na číslo

$$n' = d_1 10^{-1} + d_2 10^{-2} + d_3 10^{-3} + \cdots.$$

Nejprve si všimněme (♡), že pokud pro nějaké $i, k \in \mathbb{N}$ platí $k^2 + 1 < i < (k+1)^2 - 1$, potom je $d_i = 0$. Čísla $c_{i-1}$, $c_i$, $c_{i+1}$ jsou totiž všechna nuly.

Nyní pro spor předpokládejme, že existuje $r$, že $\{d_i\}_{i=r}^{\infty}$ je periodická s periodou $p$. Označme $m = \max(2, p, r)$. Potom všechny čísla $d_i$ pro $i \in \{m^2 + 2, m^2 + 3, \ldots (m+1)^2 - 2\}$ jsou podle (♡) nulová. To je alespoň $p$ po sobě následujících členů posloupnosti s indexy většími než $r$, z periodicity tedy plyne, že už všechna další $d_i$ (pro $i \geq (m+1)^2 - 1$) jsou nulová. Jenže cifra $c_{(m+1)^2} = 1$ byla přehozena na jednu z cifer $d_{(m+1)^2-1}, d_{(m+1)^2}, d_{(m+1)^2+1}$, což je spor s tím, že všechny tyto tři cifry jsou nulové.

c) V tomto případě už odpověď zní ano. Opět předpokládejme (stejně jako v části a)), že se jedná o nezáporné číslo, opět ho zapišme ve tvaru

$$n = z + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3} + \cdots,$$

kde $z$ je nějaké celé číslo (celá část) a $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, pro $i \in \mathbb{N}$. Označme pro $j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ $A_j = \{i | a_i = j\}$. Tedy, řečeno slovy, $A_j$ je množina takových indexů $i$, že cifra $a_i$ je rovna hodnotě $j$. Tyto množiny mohou být buď konečné, nebo nekonečné, přičemž alespoň jedna je nekonečná (každý index totiž leží v právě jedné z množin a indexů je nekonečně mnoho). Číslo $n$ přeskládejme na $n'$ následovně. Zachovejme $z$. Na prvních několik desetinných míst dejme všechna $a_i$ taková, že $i \in A_j$, kde $A_j$ je konečná. Takových $i$ je jen konečně mnoho, tedy všechna taková $a_i$ můžeme dát na začátek. Nyní nám už zbyly jen $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ nekonečné. Postupně skládejme zbytek čísla $n'$ z cifer $a_{i_{1,1}}, a_{i_{1,2}}, \ldots, a_{i_{1,k}}, a_{i_{2,1}}, a_{i_{2,2}}, \ldots, a_{i_{2,k}}, a_{i_{3,1}}, \ldots$, kde $i_{l,m}$ je $l$. nejmenší index z množiny $A_{j_m}$. Je snadné si uvědomit, že každý index použijeme právě jednou a že tímto postupem utvoříme racionální číslo. Periodický rozvoj má periodu $k$.

Poznámky k došlým řešením: Řešení přišlo poměrně mnoho, avšak jen málo z nich bylo zcela správně.

Největším kamenem úrazu byla část a). Řešitelé většinou popsali postup, jak cifry racionálního čísla (s periodou obsahující alespoň dvě různé cifry) popřehazovat, avšak málo z nich skutečně dokázalo, že vzniklé číslo je iracionální. Za chybějící důkaz jsem strhával 1 bod. Někteří se dokonce ani nezabývali tím, jestli přehazované cifry jsou různé (například perioda 223 – ti, kteří přehazovali první dvě cifry některých period, iracionální číslo nezískají).

Další častá chyba se objevovala v části c). Určitá skupina řešitelů se snažila některé cifry z přesouvaného iracionálního čísla umístit na konec. Jenže tento postup nemusí být korektní například ve chvíli, kdy má dané iracionální číslo nekonečně mnoho dvojek a trojek, potom trojky nelze umístit na konec (a utvořit tím periodu), protože by před trojkami mohlo být pouze konečně mnoho dvojek!

Úlohu jsem hodnotil 2 body za část a), po 1,5 bodu za části b) a c). Poloviny jsem zaokrouhloval nahoru.

**8. úloha**

Rozhodněte, jestli existuje číslo, které není algebraické, nicméně je kořenem polynomu s algebraickými koeficienty.

Budeme dokazovat, že takové číslo neexistuje, nejprve se domluvme na nějakém značení.

Nechť $a$ je reálné číslo, označme

$$\mathbb{Q}[a] = \left\{ y | \exists n \in \mathbb{N}_0, \exists q_0, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}; y = q_n a^n + q_{n-1} a^{n-1} + \dots + q_1 a + q_0 \right\}.$$

Tedy $\mathbb{Q}[a]$ je množina takových čísel $y$, která lze získat dosazením $a$ do nějakého polynomu s racionálními koeficienty.

Podobně značme

$$\mathbb{Q}[a_0, a_1, \dots, a_m] = \Bigg\{ y | \exists n_0, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}_0, \exists q_{0,0,\dots 0,0}, q_{0,0,\dots 0,1}, \dots, q_{n_0,n_1,\dots n_m} \in \mathbb{Q};$$

$$y = \sum_{i_0=0}^{n_0} \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=0}^{n_m} q_{i_0,i_1,\dots,i_m} a_0^{i_0} a_1^{i_1} \cdots a_m^{i_m} \Bigg\}.$$

Tedy $\mathbb{Q}[a_0, a_1, \dots, a_m]$ je množina takových čísel $y$, která lze získat dosazením $a_0$, $a_1$, … , $a_m$ do nějakého polynomu $m$ proměnných s racionálními koeficienty.

Dále mějme $M \subset \mathbb{R}$, stupněm[1] $M$ (značme $\deg M$) rozumějme nejmenší takové $n \in N_0$, že existují $x_0$, $x_1$, … , $x_{n-1} \in \mathbb{R}$, že každé $m \in M$ lze zapsat jako $m = q_0 x_0 + q_1 x_1 + \dots + q_{n_1} x_{n-1}$, kde $q_i$ jsou nějaká racionální čísla. Čísla $x_0$, $x_1$, … , $x_{n-1}$ nazvěme čísly generujícími $M$. V případě, že takové $n$ neexistuje, řekněme, že $M$ má stupeň nekonečno. Rozmyslete si, že pokud $N \subset M \subset \mathbb{R}$, pak $\deg N \leq \deg M$.

Nakonec pro $a \in \mathbb{R}$ stupněm $a$ rozumějme stupeň množiny $\mathbb{Q}[a]$.

**Lemma.** ($\heartsuit$) *Je-li* $\deg a < \infty$, *potom je* $a$ *algebraické.*

[1] Pokud znáš pojem vektorový prostor, resp. lineární obal, dodejme, že stupeň $M$ je dimenze lineárního obalu $M$ jako vektorového prostoru nad $\mathbb{Q}$ (lineární obal je nejmenší vektorový prostor obsahující $M$).

*Důkaz.* Víme tedy, že $\deg a = d < \infty$, označme $x_0, x_1, \dots, x_{d-1}$ čísla generující $\mathbb{Q}[a]$. Z definice $\mathbb{Q}[a]$ plyne, že čísla $a^0, a^1, a^2, \dots, a^d$ náleží množině $\mathbb{Q}[a]$. Tedy existují čísla $q_{i,j} \in \mathbb{Q}$ pro $i \in \{0, 1, \dots, d\}$, $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, že platí

$$a^0 = q_{0,0}x_0 + q_{0,1}x_1 + \cdots q_{0,d-1}x_{d-1},$$

$$a^1 = q_{1,0}x_0 + q_{1,1}x_1 + \cdots q_{1,d-1}x_{d-1},$$

$$\vdots$$

$$a^d = q_{d,0}x_0 + q_{d,1}x_1 + \cdots q_{d,d-1}x_{d-1}.$$

Nyní si rozmyslete, že matematickou indukcí podle $d$ lze snadno dokázat, že máme-li nějakou takovouto soustavu $d+1$ rovnic o $d$ neznámých, potom existují $p_0, p_1, \dots, p_d \in \mathbb{Q}$, ne všechna nulová, že

$$p_0a^0 + p_1a^1 + \cdots + p_da^d = 0.$$

Jenže to přesně znamená, že číslo $a$ je algebraické. Tím je lemma ($\heartsuit$) dokázáno.

Nyní se už pustíme do řešení úlohy. Mějme $a$ kořen polynomu s algebraickými koeficienty. Tedy existuje $m$ a existují $b_0, b_1, \dots, b_m$ algebraická taková, že

$$b_ma^m + b_{m-1}a^{m-1} + \cdots + b_1a + b_0 = 0.$$

Neboli

$$b_ma^m = -b_{m-1}a^{m-1} - \cdots - b_1a - b_0. \tag{$\diamondsuit$}$$

Dokazujeme, že $a$ je algebraické, stačí tedy dokázat, že $\deg a < \infty$. Zbytek potom plyne z ($\heartsuit$).

Je $\deg a = \deg \mathbb{Q}[a]$. Nejprve si uvědomme, že $\mathbb{Q}[a] \subset \mathbb{Q}[b_0, b_1, \dots, b_m, a]$. Máme-li $y \in \mathbb{Q}[a]$, potom zřejmě $y \in \mathbb{Q}[b_0, b_1, \dots, b_m, a]$, když dosadíme $n_0 = n_1 = \cdots = n_m = 0$. Odtud stačí dokázat, že $\deg \mathbb{Q}[b_0, b_1, \dots, b_m, a] < \infty$.

Protože $b_i$ je algebraické, existuje $m_i$ a existují $p_{i,0}, p_{i,1}, \dots, p_{i,m_i}$ taková, že

$$p_{i,m_i}b_i^{m_i} + p_{i,m_i-1}b_i^{m_i-1} + \cdots + p_{i,1}b_i + p_{i,0} = 0.$$

Neboli

$$p_{i,m_i}b_i^{m_i} = -p_{i,m_i-1}b_i^{m_i-1} - \cdots - p_{i,1}b_i - p_{i,0}. \tag{$\clubsuit$}$$

Chceme-li dokazovat, že $\deg \mathbb{Q}[b_0, b_1, \dots, b_m, a] < \infty$, nalezněme tedy vhodné $n$ a vhodná $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$. Vhodné $n$ je například $n = m_0m_1 \cdots m_{m-1}m_mm$. Tedy $(m+2)$-tic $(i_0, i_1, \dots i_m, i)$, kde $i_j \in \{0, 1, \dots, m_j - 1\}$ a $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ je přesně $n$, tedy $x_i$ můžeme indexovat těmito $(m+2)$-ticemi. Volme $x_{(i_0, i_1, \dots, i_m, i)} = b_0^{i_0}b_1^{i_1} \cdots b_m^{i_m}a^i$. Nyní dokážeme, že každé $y \in \mathbb{Q}[b_0, b_1, \dots, b_m, a]$ lze zapsat jako

$$y = \sum_{i_0=0}^{m_0-1} \sum_{i_1=0}^{m_1-1} \cdots \sum_{i_m=0}^{m_m-1} \sum_{i=0}^{m-1} q_{(i_0, i_1, \dots, i_m, i)} b_0^{i_0} b_1^{i_1} \cdots b_m^{i_m} a^i =$$

$$= \sum_{i_0=0}^{m_0-1} \sum_{i_1=0}^{m_1-1} \cdots \sum_{i_m=0}^{m_m-1} \sum_{i=0}^{m-1} q_{(i_0, i_1, \dots, i_m, i)} x_{(i_0, i_1, \dots i_m, i)}.$$

Z definice $\mathbb{Q}[b_0, b_1, \dots, b_m, a]$ plyne, že existuji $n_0$, $n_1$, $\dots$, $n_m$, $n$, že

$$y = \sum_{i_0=0}^{n_0} \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=0}^{n_m} \sum_{i=0}^{n} q_{(i_0,i_1,\dots,i_m,i)} b_0^{i_0} b_1^{i_1} \cdots b_m^{i_m} a^i.$$

Nyní proveďme postup o $m+2$ krocích, na konci tohoto postupu dostaneme $y$ v požadovaném tvaru.

V prvním kroku se podívejme, jestli $n > m-1$, v případě, že ano, nahrazujme podle ($\diamondsuit$) výrazy $a^i$, kde $i > m-1$. Tím dostaneme výrazy, kde se $a$ objevuje v nižším stupni. Není těžké si rozmyslet, že konečným opakováním tohoto postupu dostaneme výrazy, kde $a$ má stupeň nejvýše $m-1$. Potom pokračujme do 2. kroku.

V $j$. kroku se pro $m+2 \geq j \geq 2$ podívejme, jestli $n_{m+2-j} > m_{m+2-j} - 1$, v případě, že ano, nahrazujme podle ($\clubsuit$) výrazy $b_{m+2-j}^{i_{m+2-j}}$, kde $i_{m+2-j} > m_{m+2-j} - 1$. Tím dostaneme výrazy, kde se $b_{m+2-j}^i$ objevuje v nižším stupni, stupně $b_k$ pro $k \neq m+2-j$ ani stupně $a$ se přitom nemění! Není těžké si rozmyslet, že konečným opakováním tohoto postupu dostaneme výrazy, kde $b_{m+2-j}$ má stupeň $m_{m+2-j} - 1$. Potom pokračujme do $(j+1)$. kroku pro $j < m+2$, nebo skončeme.

Takto po provedení všech těchto kroků dostaneme výraz pro $y$, kde stupňe $b_k$ jsou omezeny $m_k - 1$, resp. stupně $a$ jsou omezeny $m-1$. Tedy dostaneme $y$ v požadovaném tvaru

$$y = \sum_{i_0=0}^{m_0-1} \sum_{i_1=0}^{m_1-1} \cdots \sum_{i_m=0}^{m_m-1} \sum_{i=0}^{m-1} q_{(i_0,i_1,\dots,i_m,i)} b_0^{i_0} b_1^{i_1} \cdots b_m^{i_m} a^i.$$

Odtud je $\deg \mathbb{Q}[b_0, b_1, \dots, b_m, a] < \infty$ a úloha je vyřešena.