✉ *Korespondenční seminář, KAM MFF UK, Malostranské náměstí 25, 118 00 Praha 1* ✉

6. série

Téma: Korbelářovy identity

Termín odeslání: 10. BŘEZNA 2003

1. ÚLOHA
Nechť $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost přirozených čísel. Ukažte, že každé přirozené n splňuje rovnost:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i+j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i+j}.$$

2. ÚLOHA
Ukažte, že pro každé přirozené n je následující rovnost splněna:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k}.$$

3. ÚLOHA
Ukažte, že pro libovolné n přirozené je hodnota součtu

$$\sum_{i=0}^{n} 4^i 9^{n-i} \binom{2n}{2i}$$

rovna výrazu $\frac{5^{2n}+1}{2}$.

4. ÚLOHA
Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla m, n taková, že $m \leq n$, platí

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n}{m-k} = \binom{2n}{m}.$$

5. ÚLOHA
Dokažte, že pro libovolné přirozené n je splněna rovnost

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n}{n+1}.$$

6. ÚLOHA
Pro obecné přirozené n vyjádřete polynom v proměnné x

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x-k)^n \binom{n}{k}$$

v co nejjednodušším tvaru.

7. Úloha

Pro libovolné přirozené n ukažte, že

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \binom{n}{3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

8. Úloha

Ukažte, že pro přirozená čísla d, r taková, že $d > 2r$, platí

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{d}{j}\binom{d-r-j-1}{r-j} = \frac{2^r}{r!}\prod_{k=0}^{r-1}(d-2k-1).$$

Řešení 6. série

1. úloha

Nechť $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost přirozených čísel. Ukažte, že každé přirozené n splňuje rovnost:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i+j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i+j}\,.$$

Uvažujme čtvercovou tabulku o n sloupcích a n řádcích. Pole v k. řádku a l. sloupci značme (k,l). Z tabulky vyškrtejme ta pole (k,l), pro něž je $k-l \geq 1$. Zbude nám tedy trojúhelníková tabulka. Do nevyškrtaných polí (k,l) napišme hodnotu a_{k+l}. Spočítejme součet všech hodnot napsaných v tabulce.

Nejprve tuto hodnotu počítejme po řádcích. V i. řádku zůstala nevyškrtána ta pole (i,j), pro která je $i-j \leq 0$, neboli $j \geq i$. Tedy (protože $j \leq n$) součet hodnot v i. řádku je:

$$\sum_{j=i}^{n} a_{i+j}\,.$$

Sečteme-li tyto hodnoty přes všechny řádky, dostáváme součet hodnot v tabulce:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i+j}\,.$$

Nadále počítejme součet všech hodnot v tabulce po sloupcích. V i. řádku zůstala nevyškrtána ta pole (j,i), pro která je $j-i \leq 0$, neboli $j \leq i$. Tedy součet hodnot v i. sloupci je:

$$\sum_{j=1}^{i} a_{i+j}\,.$$

Sečteme-li tyto hodnoty přes všechny sloupce, dostáváme součet hodnot v tabulce:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i+j}\,.$$

Oba výrazy uvedené v zadání jsou tedy součtem všech hodnot v tabulce, proto se musí rovnat.

Poznámky k došlým řešením: Myslím, že řešitelé všech špatných řešení (celkem 5) si nezkusili rozepsat sumy pro nějaká malá n. Například pro $n=4$ vyjde

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i}^{4} a_{i+j} = a_2 + a_3 + 2*a_4 + 2*a_5 + 2*a_6 + a_7 + a_8 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{i} a_{i+j}\,.$$

Pak je zřejmé, že koeficient u a_{2n} není n, u a_5 není 3 a u a_{n+1} není n. Zároveň nebudu tvrdit, že rovnost obecně neplatí, když pro $n = 4$ platí. Toto je dobrý způsob, jak se vyhnout zbytečným chybám. Ostatní řešitelé dostali plný počet bodů.

2. úloha

Ukažte, že pro každé přirozené n je následující rovnost splněna:

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k}.$$

První možnost, jak úlohu vyřešit, je využít binomickou větu. Je

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i},$$
$$0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} (-1)^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}.$$

Nyní tyto rovnosti nejdříve sečteme a potom odečteme, čímž dostaneme rovnosti

$$2^n = 2 \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k},$$
$$2^n = 2 \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1}.$$

Protože se rovnají levé strany, rovnají se i pravé strany a po vydělení dvěma dostáváme požadovanou rovnost.

Úlohu lze však řešit i názorněji bez binomické věty. Nejprve si uvědomme, že na levé straně rovnosti máme počet všech podmnožin liché velikosti n-prvkové množiny a na pravé počet všech podmnožin sudé velikosti téže množiny. Vezměme si jeden prvek, označme ho a. Nyní všechny podmnožiny „spárujeme" tak, že do dvojice dáme ty, které se liší právě o prvek a (tedy mají stejné prvky, jen jedna obsahuje navíc prvek a). Vidíme, že každé podmnožině jsme přiřadili právě jedno „dvojče" (neboť jsme z ní buď ubrali nebo do ní přidali a, čímž jsme jí jednoznačně určili „partnera"), navíc v každé dvojici je jedna podmnožina sudé velikosti a jedna podmnožina liché velikosti (neboť se liší právě o jeden prvek), ukázali jsme tak, že podmnožin sudé velikosti je stejně jak podmnožin liché velikosti, což nám přesně říká dokazovaná rovnost.

Poznámky k došlým řešením: Úloha byla velmi snadná, většina řešitelů využila binomickou větu nebo důkaz matematickou indukcí a obdržela plný počet bodů. Několik řešitelů pouze přepsalo zadání úlohy do jiného tvaru a tvrdili, že to je známé tvrzení. Ano, je tomu tak, ale úkolem bylo ho **dokázat**.

3. úloha

Ukažte, že pro libovolné n přirozené je hodnota součtu

$$\sum_{i=0}^{n} 4^i 9^{n-i} \binom{2n}{2i}$$

rovna výrazu $\frac{5^{2n}+1}{2}$.

Nejprve se chceme řešitelům omluvit. Při předávání úlohy došlo k jakémusi šumu, a tak se tato úloha objevila v komentářích s nesprávným zadáním. Na internetu byla velmi brzo opravena. Zde už je napsáno správné zadání.

Když si uvědomíme, že $5 = 3 + 2$ a $1 = 3 - 2$, je již úloha vpodstatě vyřešena. Potom totiž

$$5^{2n} = (3+2)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} 2^j 3^{2n-j} \binom{2n}{j},$$

$$1 = 1^{2n} = (3-2)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j 2^j 3^{2n-j} \binom{2n}{j},$$

Když tyto dva výrazy sečteme, členy součtu se sudým j se sečtou, členy s lichým j se odečtou, označíme-li $j = 2i$, dostaneme tak:

$$5^{2n} + 1 = 2 \sum_{i=0}^{n} 2^{2i} 3^{2n-2i} \binom{2n}{2i} = 2 \sum_{i=0}^{n} 4^i 9^{n-i} \binom{2n}{2i}.$$

Po vydělení dvěma dostaneme požadovanou rovnost.

Poznámky k došlým řešením: Několik řešitelů ukázalo, že původní tvrzení neplatí, tím, že dosadili $n = 1$. Vhledem k nejasnosti zadání jsem za taková řešení udělovala plný počet bodů, ačkoliv si myslím, že bylo v silách řešitelů zformulovat správné tvrzení a dokázat ho. Chválím ty, kteří to udělali, případně se podívali na stránky semináře, kde našli opravené řešení.

4. úloha

Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla m, n taková, že $m \le n$, platí

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \binom{n}{m-k} = \binom{2n}{m}.$$

Představme si, že máme $2n$ kuliček a chceme z nich vybrat právě m. Potom všech možných m-tic je $\binom{2n}{m}$. Výběr ale můžeme provést i jinak. Rozdělme si kuličky na dvě hromádky po n kusech. Nyní můžeme vybrat z první hromádky 0 kuliček a z druhé m, takových možností je $\binom{n}{0}\binom{n}{m}$, můžeme ale také z první hromádky vybrat 1 kuličku a z druhé $m-1$, to nám dává $\binom{n}{1}\binom{n}{m-1}$ možností, takto můžeme pokračovat až k možnosti, kdy z první hromádky vybereme m kuliček a z druhé 0. Protože jsme tímto získali všechny možnosti, jak z oněch dvou hromádek vybrat m kuliček, sečtením těchto součinů dostaneme počet všech možností výběru. Vidíme, že tento součet je právě levá strana dokazované rovnosti. Ukázali jsme, že obě strany udávají počet m-tic na $2n$-prvkové množině, určitě se tedy rovnají.

Poznámky k došlým řešením: Většina řešení byla správně. Vedle myšlenky vzorového řešení se vyskytla poměrně častá alternativa podívat se na koeficient u x^m na stranách rovnosti $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, uvedení obou možností jsem ocenil $+i$.

5. úloha

Dokažte, že pro libovolné přirozené n je splněna rovnost

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n}{n+1}.$$

Nejprve využijeme rovnost z 2. úlohy, kde místo n dosadíme $n+1$ a odečteme levou stranu, dostáváme rovnost

$$\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\binom{n+1}{j} = 0,$$

nebo můžeme opět využít binomickou větu a rozpis

$$0 = (1-1)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} 1^k(-1)^{n-k}\binom{n+1}{k}.$$

Nyní postupně upravujme výraz ze zadání této úlohy:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}n!}{(k+1)!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(n+1)!}{(n+1)(k+1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=2}^{n+1}(-1)^j\binom{n+1}{j} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(-1+(n+1)+\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\binom{n+1}{j}\right) = \frac{1}{n+1}(-1+(n+1)+0) = \frac{n}{n+1},$$

kde jsme v závěru dosadili výše odvozenou rovnost.

Poznámky k došlým řešením: Ako sa ukázalo, tak táto úloha vám nerobila väčšie problémy (aspoň nie tým čo ju poslali), stačilo sa tam totiž iba trochu pohrať s nejakými sumami a nájsť tam jednu binomickú vetu a bolo, takže najmä preto to skoro všetci mali za päť …

6. úloha

Pro obecné přirozené n vyjádřete polynom v proměnné x

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x-k)^n\binom{n}{k}$$

v co nejjednodušším tvaru.

Pro účely řešení si označme $q_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x-k)^m\binom{n}{k}$ pro $0 \leq m < n$. Nejprve odvodíme rekurentní vyjádření pro $q_{n,m}(x)$ a pak spočteme polynom $q_{n,n}(x) = p_n(x)$.

Pro $n, m \geq 1$ máme

$$q_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x-k)(x-k)^{m-1}\binom{n}{k}i =$$

$$= x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x-k)^{m-1}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k(x-k)^{m-1}\binom{n}{k} =$$

$$= xq_{n,m-1}(x) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k n(x-k)^{m-1}\binom{n-1}{k-1} =$$

$$= xq_{n,m-1}(x) - n\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l(x-1-l)^{m-1}\binom{n-1}{l} = xq_{n,m-1}(x) - nq_{n-1,m_1}(x-1).$$

Nechť $n > 0$, pak snadno nahlédneme (např. s využitím 2. úlohy), že $q_{n,0} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$. Z toho s využitím rekurze postupně pro $0 \leq m < n$ vychází

$$q_{n,0}(x) = q_{n,1}(x) = \cdots = q_{n,n-1}(x) = 0.$$

Avšak

$$p_n(x) = q_{n,n}(x) = nq_{n-1,n-1}(x-1) = \cdots = n!q_{0,0}(x-n) = n!.$$

Všimněte si, že na proměnné x vlastně vůbec nezáleží.

7. úloha
Pro libovolné přirozené n ukažte, že

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{3}]} \binom{n}{3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

První řešení. Tato úloha má hezké řešení vyžívajících komplexních čísel, nejprve však ukažme řešení, které lze vymyslet, pokud nám někdo ukáže jen výsledek sumy.

Dohodněme se, že v případě $m > n$ nebo $n < 0$ budeme brát binomické koeficienty $\binom{n}{m}$ nulové, a tedy základní vztah pro součty $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$ platí. Takto můžeme vzít indexy v sumách od 1 do n a netrápit se mezemi.

Dále budeme potřebovat následující goniometrický vzorec:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

který se snadno odvodí ze součtových vzorců pro funkci kosinus ve výrazu $\cos(x+y) - \cos(x-y)$.

Hlavní myšlenkou je nejprve nalézt obdobné vztahy pro součty

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+1} \quad \text{a} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+2}$$

a následně dokázat všechny vztahy matematickou indukcí. Zkusme tedy zatím předpokládat, že dokazovaný vztah platí, a odvodíme výše uvedené vztahy.

Bez újmy na obecnosti můžeme navíc předpokládat, že mají tvar $\frac{1}{3}\left(2^n + 2a_n\right)$ a $\frac{1}{3}\left(2^n + 2b_n\right)$.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{3k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{3k} + \binom{n}{3k+2}\right),$$

$$\frac{1}{3}\left(2^{n+1} + 2\cos\frac{(n+1)\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(2^n + 2b_n\right),$$

$$b_n = \cos\frac{(n+1)\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3} = -\sin\left(\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{(n+2)\pi}{3},$$

kde v prvním řádku jsme využili vztahu $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{3k+2}$. Analogicky

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{3k+2} = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{3k+2} + \binom{n}{3k+1}\right),$$

$$\frac{1}{3}\left(2^{n+1} + 2\cos\frac{(n+3)\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n+2))\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(2^n + a_n\right),$$

$$a_n = \cos\frac{(n+3)\pi}{3} - \cos\frac{(n+2)\pi}{3} = -\sin\left(\frac{(n+2)\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{(n+4)\pi}{3}.$$

Nyní již je vše připravené k důkazu, který provedeme matematickou indukcí.

Pro $n = 0$ jsou vzorce v pořádku, neboť $\binom{0}{0} = 1 = \frac{1}{3}\left(2^0 + \cos\frac{0\pi}{3}\right)$, $0 = \frac{1}{3}\left(2^0 + \cos\frac{4\pi}{3}\right)$ a $0 = \frac{1}{3}\left(2^0 + \cos\frac{2\pi}{3}\right)$.

Předpokládejme, že jsme vztahy dokázali pro $n = m$, dokažme je pro $n = m + 1$. Vzorce pro $\sum_{k=0}^{n}\binom{m+1}{3k}$ a $\sum_{k=0}^{n}\binom{m+1}{3k+2}$ se dokáží stejně jak v předchozí části, přičemž využijeme jejich platnost pro $n = m$.

Zbývá dokázat poslední vztah:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+1}{3k+1} = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{m}{3k+1} + \binom{m}{3k}\right),$$

$$\frac{1}{3}\left(2^{n+1} + 2\cos\frac{(n+5)\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n+4))\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right),$$

$$\cos\frac{(n+5)\pi}{3} - \cos\frac{(n+4)\pi}{3} = -\sin(\frac{(n+4)\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{n\pi}{3}.$$

A tím je důkaz hotov.

Druhé řešení. K řešení využijeme nějaké základní vlastnosti komplexních čísel. Nejprve řešme rovnici $x^3 = 1$. Tu lze upravit na tvar $(x^2 + x + 1)(x - 1) = 0$. Snadno spočítáme kořeny kvadratické rovnice, které jsou:

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Třetí kořen je pak $x_3 = 1$. Využitím Moivreovy věty nebo přímým spočítáním snadno zjistíme, že $x_2 = x_1^2, 1 = x_3 = x_1^3$. Odtud plyne, že $x_1^{3k+i} = x_1^i$. Nyní si z binomické věty (a použitím předchozího vztahu) vyjádřeme:

$$(1 + x_1)^n = \binom{n}{0} + x_1\binom{n}{1} + x_1^2\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots$$

$$(1 + x_1^2)^n = \binom{n}{0} + x_1^2\binom{n}{1} + x_1\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots$$

$$(1 + 1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots.$$

Sečtením dostáváme, že

$$(1 + x_1)^n + (1 + x_1^2)^n + 2^n = 3\binom{n}{0} + (1 + x_1 + x_1^2)\binom{n}{1} + (1 + x_1 + x_1^2)\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots =$$

$$= 3\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots\right).$$

Při poslední úpravě jsme využili právě vlastnosti, že x_1 je řešením kvadratické rovnice $x^2+x+1 = 0$.

Odtud je

$$\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots\right) = \frac{(1 + x_1)^n + (1 + x_1^2)^n + 2^n}{3} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n + 2^n}{3} =$$

$$= \frac{(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)^n + (\cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ))^n + 2^n}{3} =$$

$$= \frac{\cos n60^\circ + i\sin n60^\circ + \cos(-n60^\circ) + i\sin(-n60^\circ) + 2^n}{3} = \frac{2^n + 2\cos(n60^\circ)}{3}.$$

Což je právě to, co jsme chtěli dokázat (v předposlední úpravě jsme využili Moivreovy věty).

8. úloha

Ukažte, že pro přirozená čísla d, r taková, že $d > 2r$, platí

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{d}{j} \binom{d-r-j-1}{r-j} = \frac{2^r}{r!} \prod_{k=0}^{r-1} (d-2k-1).$$

Nejprve si trochu poupravíme výraz na levé straně:

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{d}{j} \binom{d-r-j-1}{r-j} = \sum_{j=0}^{r} \frac{d!(d-r-j-1)!}{(d-j)!j!(d-2r-1)!(r-j)!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} \frac{r!d!(d-r-j-1)!}{r!(d-j)!j!(d-2r-1)!(r-j)!} =$$

$$= \frac{d!}{r!(d-2r-1)!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \frac{(d-r-j-1)!}{(d-j)!} =$$

$$= \frac{d(d-1)(d-2)\cdots(d-2r)}{r!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \frac{1}{(d-j)(d-j-1)\cdots(d-r-j)}.$$

Potom si poupravíme výraz na straně pravé:

$$\frac{2^r}{r!} \prod_{k=0}^{r-1} (d-2k-1) = \frac{2^r d(d-1)(d-2)\cdots(d-2r)}{r!d(d-2)(d-4)\cdots(d-2r)}.$$

Odtud vidíme, že stačí dokázat:

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \frac{1}{(d-j)(d-j-1)\cdots(d-r-j)} = \frac{2^r}{d(d-2)(d-4)\cdots(d-2r)}.$$

Nyní si povíme něco o parciálních zlomcích. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots x_n$ navzájem různá reálná čísla a je-li $Q(x)$ polynom stupně menšího než n, potom existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1, A_2, \ldots A_n$ taková, že

$$\frac{Q(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}.$$

(Rovnost chápeme jako rovnost výrazů, nastává pro všechny hodnoty, pro něž jsou oba výrazy definovány.) Výraz $\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}$ se nazývá rozklad výrazu $\frac{Q(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}$ na parciální zlomky.

Důkaz zde uvádět nebudeme, není příliš těžký, zvídavý čtenář si ho jistě sám odvodí (náznak důkazu plyne z následujících úvah).

Nyní se zabývejme tím, jak určit hodnoty $A_1, A_2, \dots, A_n$. Platí-li:

$$\frac{Q(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n},$$

potom:

$$\frac{Q(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)} =$$

$$= \frac{A_1(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) + A_2(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}$$

$$\frac{+\cdots + A_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}.$$

První možnost je výrazy v čitateli na pravé straně roznásobit. Dostaneme tak polynom, který musí být roven polynomu $Q(x)$, čím dostaneme n rovnic pro n neznámých $A_1, A_2, \dots, A_n$. Tento způsob je poněkud zdlouhavý. Další možnost je uvědomit si, že má-li být výraz v čitatelích rovný pro všechna $x \neq x_1, x_2 \cdots x_n$ (tedy pro nekonečně mnoho x), musí být rovný už pro všechna reálná x (polynomy stupně n shodující se v $n+1$ hodnotách jsou nutně identické, neboť jejich rozdíl je polynom stupně nejvýše n mající $n+1$ kořenů, tedy nulový polynom). Speciálně dostáváme, že rovnost čitatelů musí nastat i pro $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dosadíme-li (do čitatelů) tyto hodnoty, dostáváme:

$$Q(x_i) = A_i(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n),$$

$$A_i = \frac{Q(x_i)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},$$

což je o něco jednodušší způsob, jak určit A_i.

Nyní tohoto povídání využijeme pro naši úlohu. Rozložme nejprve $\frac{1}{(d-j)(d-j-1)\cdots(d-r-j)}$ na parciální zlomky (všimněte si, že $j, j+1, \dots, j+r$ jsou různá čísla). Máme

$$\frac{1}{(d-j)(d-j-1)\cdots(d-r-j)} = \sum_{i=0}^{r} \frac{A_i}{d-j-i},$$

kde dosazením do dříve odvozeného vzorce (zde Q je jednotkový polynom)

$$A_i = \frac{1}{i!(-1)^{r-i}(r-i)!}.$$

Dále podobným způsobem rozložme $\frac{1}{d(d-2)(d-4)\cdots(d-2r)}$ na parciální zlomky. Dostáváme

$$\frac{1}{d(d-2)(d-4)\cdots(d-2r)} = \sum_{i=0}^{r} \frac{B_i}{d-2i},$$

kde

$$B_i = \frac{1}{2^i(i!)(-2)^{r-i}(r-i)!} = \frac{1}{(-1)^{r-i}2^r i!(r-i)!}.$$

Nyní se vraťme k rovnosti kterou máme dokázat.

$$\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\frac{1}{(d-j)(d-j-1)\cdots(d-r-j)}=\frac{2^r}{d(d-2)(d-4)\cdots(d-2r)}.$$

Upravujme:

$$\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\frac{1}{(d-j)(d-j-1)\cdots(d-r-j)}=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\sum_{i=0}^{r}\frac{\frac{1}{i!(-1)^{r-i}(r-i)!}}{d-i-j}=$$

$$=\frac{1}{r!}\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{j}\binom{r}{i}\frac{1}{d-i-j}=\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{2r}\sum_{i,j\in\{1,2,\dots r\},i+j=k}(-1)^{r-i}\binom{r}{j}\binom{r}{i}\frac{1}{d-i-j}.$$

V poslední úpravě jsme neudělali nic jiného, než že namísto sečtení výrazu přes všechna i, j jsme výraz sečetli přes všechna i, j s pevným součtem k přes všechny možné součty k. Nakonec upravíme na tvar:

$$\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{2r}\sum_{i,j\in\{1,2,\dots r\},i+j=k}(-1)^{r-i}\binom{r}{j}\binom{r}{i}\frac{1}{d-i-j}=$$

$$=\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{2r}\sum_{i,j\in\{1,2,\dots r\},i+j=k}(-1)^{r-i}\binom{r}{j}\binom{r}{i}\frac{1}{d-k}=$$

$$=\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{2r}\frac{1}{d-k}\sum_{i,j\in\{1,2,\dots r\},i+j=k}(-1)^{r-i}\binom{r}{j}\binom{r}{i}.$$

Výraz na levé straně dokazované nerovnosti také rozložíme na parciální zlomky a budeme dále upravovat:

$$\frac{2^r}{d(d-2)(d-4)\cdots(d-2r)}=2^r\sum_{i=0}^{r}\frac{\frac{1}{(-1)^{r-i}2^r i!(r-i)!}}{d-2i}=$$

$$=\frac{1}{r!}\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\frac{\binom{r}{i}}{d-2i}=\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{2r}\frac{1}{d-k}V(k),$$

kde

$$V(k)=0$$

pro k liché a

$$V(k)=(-1)^{r-\frac{k}{2}}\binom{r}{\frac{k}{2}}$$

pro k sudé.

Srovnáním upravených výrazů vidíme, že stačí dokázat, že

$$V(k)=\sum_{i,j\in\{1,2,\dots r\},i+j=k}(-1)^{r-i}\binom{r}{j}\binom{r}{i}.$$

To už je ovšem velmi snadné. Mějme polynom $P(x) = (x^2-1)^r = (x-1)^r(x+1)^r$. Zkoumejme, jaký má tento polynom koeficient u výrazu x^k pro $k \in \{0,1,\dots 2r\}$. Pomocí binomické věty dostáváme

$$P(x) = (x^2-1)^r = \sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}x^{2i},$$

odkud je zřejmé, že koeficient u x^k je $V(k)$.

Na druhou stranu (opět za pomoci binomické věty)

$$P(x) = (x-1)^r(x+1)^r = \left(\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}x^j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}x^i\binom{r}{j}x^j = \sum_{k=0}^{2r}x^k \sum_{i,j\in\{1,2,\dots r\},i+j=k}(-1)^{r-i}\binom{r}{j}\binom{r}{i},$$

neboli koeficient u x^k je

$$\sum_{i,j\in\{1,2,\dots r\},i+j=k}(-1)^{r-i}\binom{r}{j}\binom{r}{i},$$

odtud plyne požadovaná rovnost:

$$V(k) = \sum_{i,j\in\{1,2,\dots r\},i+j=k}(-1)^{r-i}\binom{r}{j}\binom{r}{i},$$

čímž je celá úloha dokázána.

Poznámky k došlým řešením: Přišla pouze tři řešení, na druhou stranu byla všechna správně. Těšil jsem se, že úlohu někdo vyřeší krásnou kombinatorickou úvahou, nestalo se tak, a tak všechna řešení byla svým přístupem podobná autorskému.