✉ *Korespondenční seminář, KAM MFF UK, Malostranské náměstí 25, 118 00 Praha 1* ✉

# 3. série

**Téma:** Optimalizace

**Termín odeslání:** 9. PROSINCE 2002

1. ÚLOHA (3 BODY)

Dino řečený Líný dostal zálusk na princeznu, musí ale nejdříve zabít tři draky. První má 666 hlav, druhý 333 hlav a třetí 670 hlav. Navíc pokud usekne hlavu prvnímu, naroste nová druhému, pokud druhému, naroste nová třetímu a pokud třetímu, naroste nová prvnímu. Aby měl Dino vůbec nějakou šanci, ve chvíli, kdy už drak nemá žádnou hlavu, je mrtvý a nové hlavy mu dále nenarůstají. Poraďte Dinovi optimální strategii, jak proti drakům bojovat, tedy takovou, aby musel sekat co nejméněkrát.

2. ÚLOHA (3 BODY)

V Trianglánii, kde se všechny plochy měří v trojúhelnících, vypukla zlatá horečka. Divoký Tribill objevil velká ložiska cenného kovu a chce si zabrat co největší pozemek. Má však k dispozici jen plot o délce 600 metrů. Poraďte Tribillovi optimální využití plotu, tedy takové, aby jím ohraničil trojúhelníkové území o co největším obsahu.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Martin hraje hru, v níž si volí reálné číslo $p$ a následně získá tolik bodů, kolik činí součet všech řešení rovnice $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x = p$ v reálných číslech. Poraďte Martinovi všechny optimální volby $p$, tedy takové, při nichž získá maximální možný počet bodů.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Při pokusu o loupež v obchodním domě Všechnomáme bylo zadrženo a následně usvědčeno $n$ zlodějů. Soudce však neví, co chtěli ukrást, nemůže tedy spravedlivě rozhodnout, jak je potrestat. Nakonec vymyslel tento postup: Zloději se mohou nejdříve poradit, potom každý řekne kladné reálné číslo ($i$-tý zloděj řekne číslo $x_i$). Soudce určí hodnotu výrazu

$$\log_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - \frac{1}{n} \log_n (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)$$

a to bude počet měsíců, které každý ze zlodějů stráví ve vězení. Poraďte lupičům optimální čísla, která mají soudci sdělit, tedy taková, že ve vězení stráví nejmenší možný počet měsíců.

Pro suchary: Pro dané přirozené $n$ nalezněte kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ taková, aby výraz

$$\log_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - \frac{1}{n} \log_n (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)$$

byl nejmenší možný.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Farmář Pavel vlastní obrovský čtvercový pozemek rozdělený na $n \times n$ menších políček, kde $n$ je dvojciferné přirozené číslo (při leteckém pohledu tedy vypadá jako šachovnice $n \times n$). Pavel se nachází na levém horním políčku a chtěl by postupně projít všechna políčka a podívat se, jak se na kterém daří rostlinám, jež tam zasadil. Má k dispozici superrychlé vznášedlo, které má ovšem pár nevýhod. Umí létat pouze ve svislém a vodorovném směru a nepřeletí více než dvě políčka (je-li tedy Pavel na políčku $(1, 1)$ a letí vodorovně, dostane se na jeden let nejdále na políčko $(4, 1)$), potom musí přistát a doplnit palivo. Navíc, protože je vznášedlo superrychlé, vždy přeletí alespoň jedno políčko (tedy není možné přeletět hned na políčko sousední). Poraďte Pavlovi optimální cestu, jak svůj pozemek proletět na co nejmenší počet přeletů tak, aby se vrátil na výchozí políčko.

Pro suchary: Jak projít šachovnici o rozměrech $n \times n$, kde $n$ je dvojciferné přirozené, a vrátit se na výchozí pole, můžete-li skákat pouze vodorovně a svisle ob jedno či ob dvě pole, tak, aby počet provedených skoků byl co nejmenší?

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Ve městě Nemajserádi v Popudlivé ulici stojí osamocená budova se čtvercovým půdorysem. Ve třetím patře sídlí zástupci velkých mezinárodních společností Antipatie, Paranoia a Top Secret, jelikož jeden druhému nevěří, chtějí mít od sebe co největší vzdálenosti. Nalezněte (alespoň jedno) jejich optimální rozmístění, aby minimální ze vzdáleností libovolných dvou byla co největší. V pátem patře sídlí zástupci menších firem Averze, Introvert, Já & Já, Odpor a Samotáři. Ani ti si vzájemně nevěří, a tak opět chtějí, aby minimální ze vzdáleností libovolných dvou byla co největší. Konečně v šestém patře sídlí drobní obchodníci pan Bručoun, pan Háklivec, paní Nepřívětivá, pan Odpudivý, slečna Plachá a pan Protivný. I ti po vás chtějí, abyste je po čtvercové místnosti rozmístili tak, že minimální vzdálenost jakýchkoliv dvou bude co největší.

Pro suchary: Umístěte do čtverce postupně tři, pět a šest bodů tak, aby vždy vzdálenost nejbližších dvou byla maximální možná.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Luboš si náhodně zvolí celé číslo od 1 do $K$ a chce je sdělit Dinovi. Jejich prostředník Martin však souhlasil pouze s následujícím postupem: Nejdříve donese Lubošovi šachovnici o rozměrech $8 \times 8$, jejíž některá políčka jsou obarvena bíle a ostatní černě (libovolným způsobem). Luboš si vybere jedno políčko, jehož barvu změní. Poté Martin donese šachovnici Dinovi a ten si ji může prohlédnout. Najděte optimální $K$, tedy největší možné takové, aby Dino vždy mohl určit, které číslo si Luboš myslel, pokud se předem domluví na strategii.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Je dán trojúhelník $ABC$, uvnitř něj volme bod $H$. Průsečíky přímek $AH$, $BH$, $CH$ po řadě se stranami $BC$, $CA$, $AB$ označme po řadě $D$, $E$, $F$. Dále označme $a$, $b$, $c$ délky úseček $BC$, $CA$, $AB$ a $s$ polovinu obvodu trojúhelníka $ABC$. Určete optimální polohu bodu $H$, pro kterou je výraz

$$\frac{|AH|(s-b)(s-c)}{|DH|(s-a)} + \frac{|BH|(s-a)(s-c)}{|EH|(s-b)} + \frac{|CH|(s-a)(s-b)}{|FH|(s-c)}$$

minimální.

# Řešení 3. série

**1. úloha** (73, 65, 2.00, 3.0)

Dino řečený Líný dostal zálusk na princeznu, musí ale nejdříve zabít tři draky. První má 666 hlav, druhý 333 hlav a třetí 670 hlav. Navíc pokud usekne hlavu prvnímu, naroste nová druhému, pokud druhému, naroste nová třetímu a pokud třetímu, naroste nová prvnímu. Aby měl Dino vůbec nějakou šanci, ve chvíli, kdy už drak nemá žádnou hlavu, je mrtvý a nové hlavy mu dále nenarůstají. Poraďte Dinovi optimální strategii, jak proti drakům bojovat, tedy takovou, aby musel sekat co nejméněkrát.

Na začátku sekání mají draci celkově 1669 hlav. Aby vůbec nějaké hlavy mohly začít ubývat a jen se nepřemisťovaly, je třeba, aby některý drak neměl žádnou hlavu, na tom pak nebudou další přibývat, když je "předchozímu" budeme sekat. Proto musíme zbavit nějakého draka všech hlav, což se nám jistě podaří nejrychleji, když budeme sekat hlavy tomu drakovi, který jich má nejméně. Minimálně tedy potřebujeme 333 seknutí, abychom druhého draka zbavili všech hlav, a potom dalších 1669 seknutí, abychom usekli všechny hlavy, přesněji nejdříve usekneme všech 666 hlav prvnímu drakovi a poté 1003 třetímu (původních 670 plus 333, jež „přijal" od druhého). Celkově tedy potřebuje Dino 2002 seknutí.

Poznámky k došlým řešením: Řešení úlohy se mělo skládat z návrhu konkrétního postupu a důkazu, že tento je nejlepší. To si někteří řešitelé neuvědomili, takže zatímco onu optimální strategii popsali všichni (1 bod), u druhé části jsem se setkal se vším od úplného ignorování (+0 bodů) přes různá mlhavá odůvodnění (cca +1 bod) až po nezvratné důkazy (+2 body).

Dost řešitelů odůvodňovalo optimalitu postupu průběžně s jeho popisem, což rozhodně na přehlednosti nepřidalo. Nejhezčí (podle mě) řešení je takové:

1) Potřebuji nejméně 2002 seků, protože … (důkaz).
2) Na 2002 seků to jde takhle … (postup).

**2. úloha** (63, 35, 1.00, 2.0)

V Trianglánii, kde se všechny plochy měří v trojúhelnících, vypukla zlatá horečka. Divoký Tribill objevil velká ložiska cenného kovu a chce si zabrat co největší pozemek. Má však k dispozici jen plot o délce 600 metrů. Poraďte Tribillovi optimální využití plotu, tedy takové, aby jím ohraničil trojúhelníkové území o co největším obsahu.

V řešení vzužijeme několika faktů. Předně Heronova vzorce: Jsou-li $a$, $b$, $c$ strany trojuhelnika a $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, pak pro jeho obsah platí $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Další, co se nám bude hodit, je $AG$-nerovnost: Pro nezáporná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ platí

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

přičemž rovnost nástává v případě, kdy jsou všechna čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ stejná.

Budeme-li nyní chtít maximalizovat obsah trojúhelníka, je to jistě totéž jako maximalizovat jeho druhou mocninu, tedy podle Heronova vzorce výraz $s(s-a)(s-b)(s-c)$, přičemž máme dáno $s = 300m$. Je

$$s(s-a)(s-b)(s-c) \le s\left(\frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c)\right)^3 = \frac{s^4}{27},$$

přičemž jsme použili $AG$-nerovnost (umocněnou na třetí) na čísla $(s-a)$, $(s-b)$, $(s-c)$ (která jsou kladná, neboť strana trojúhelníka je menší než polovina jeho obvodu). Máme ale na pravé straně konstantu, našli jsme tedy maximální možnou hodnotu obsahu Tribillova pozemku, této se podle $AG$-nerovnosti dosáhne v případě $s-a=s-b=s-c$, tedy $a=b=c$, optimálním vyuzitím plotu bude proto rovnostranný trojúhelník, v Tribillově případě se stranou délky 200 metrů.

Poznámky k došlým řešením: Hodně řešitelům jsem strhl imaginární bod za jednu z těchto dvou chyb: Použili $AG$-nerovnost, ale nenapsali, že jsou splněny předpoklady – všechny členy musí být nezáporné. Hledali globální maximum nějaké funkce pomocí derivace, kterou položili rovnu nule. Kořen rovnice bez důkazu prohlásili za globální maximum.

**3. úloha** (28, 16, 1.00, 2.0)

Martin hraje hru, v níž si volí reálné číslo $p$ a následně získá tolik bodů, kolik činí součet všech řešení rovnice $x^4-4x^3+5x^2-2x=p$ v reálných číslech. Poraďte Martinovi všechny optimální volby $p$, tedy takové, při nichž získá maximální možný počet bodů.

Výraz na levé straně nejprve upravíme:

$$x^4-4x^3+5x^2-2x=x^2(x^2-4x+4)+x^2-2x=x^2(x-2)^2+x(x-2)$$

$$=x(x-2)(x^2-2x+1)=(x-1)^2x(x-2)=(x-1)^2(x^2-2x+1-1)=$$

$$=(x-1)^4-(x-1)^2.$$

Odtud je patrno, že je-li $x$ řešením rovnice

$$(x-1)^4-(x-1)^2=p,$$

potom je

$$((2-x)-1)^4-((2-x)-1)^2=p,$$

tedy i $2-x$ je řešením. Funkce $2-x$ je prostá, čím pro různá $x$ dostáváme i různá $2-x$. Má-li tedy rovnice $k$ řešení: $x_1, x_2, \cdots x_k$, potom jsou výrazy $2-x_1, 2-x_2, \cdots, 2-x_k$ řešeními. Tyto výrazy jsou různé, je jich $k$, čili množina $\{2-x_1, 2-x_2, \cdots, 2-x_k\}$ je shodná s množinou $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$. Označme $s$ součet všech řešení, potom

$$2s=s+s=x_1+x_2+\cdots x_k+(2-x_1)+(2-x_2)+\cdots+(2-x_k)=$$

$$=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{k}=2k.$$

Odtud $s=k$, a tak se Martinovi vyplatí volit $p$ tak, aby byl počet řešení maximální.

Zkoumejme tedy, kolik může mít

$$(x-1)^4-(x-1)^2-p=0$$

řešení. Proveďme substituci $y=(x-1)^2$. Dostáváme:

$$y^2-y-p=0.$$

Tato kvadratická rovnice má řešení:

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4p}}{2}$$

Abychom měli maximální počet řešení, potřebujeme ze vztahu $y = (x-1)^2$, aby tyto dva výrazy byly dva různé kladné výrazy. V první řadě tedy (výraz pod odmocninou musí být definován a kladný (pro nulu bychom nedostali různé výrazy $y_1$, $y_2$)): $1 + 4p > 0 \Leftrightarrow p > -\frac{1}{4}$. Dále

$$\frac{1 + \sqrt{1+4p}}{2} > 0,$$

což platí vždy, neboť součet dvou kladných výrazů je kladný. A naposledy

$$\frac{1 - \sqrt{1+4p}}{2} > 0$$

$$1 > \sqrt{1+4p}.$$

Výrazy jsou kladné, čili je můžeme umocnit:

$$1 > 1 + 4p$$

$$p < 0.$$

Pro $p \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ má tedy rovnice maximální možný počet řešení (a to 4), pro jiná $p$ méně, tím pádem se Martinovi vyplatí volit libovolné $p$ z intervalu $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$.

Poznámky k došlým řešením: Objevily se v zásadě dva přístupy: buď přímo vypočítat kořeny rovnice s parametrem (to skutečně šlo!), nebo zjistit průběh polynomu a s využitím symetrie určit součty reálných kořenů. Žádný originálnější přístup se nenašel, tedy taktéž žádné kladné imaginární body. Na některé řešitele bych apeloval, aby grafy, které při řešení zásadním způsobem využívají, komentovali (pokud používají různé intuitivní vlastnosti, zde např. polynomů), případně provedli alespoň nástin výpočtů nezbytných ke konstrukci grafu. Zde spočívalo vlastně jediné úskalí úlohy.

**4. úloha** (34, 27, 3.00, 5.0)

Při pokusu o loupež v obchodním domě Všechnomáme bylo zadrženo a následně usvědčeno $n$ zlodějů. Soudce však neví, co chtěli ukrást, nemůže tedy spravedlivě rozhodnout, jak je potrestat. Nakonec vymyslel tento postup: Zloději se mohou nejdříve poradit, potom každý řekne kladné reálné číslo ($i$-tý zloděj řekne číslo $x_i$). Soudce určí hodnotu výrazu

$$\log_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - \frac{1}{n} \log_n (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)$$

a to bude počet měsíců, které každý ze zlodějů stráví ve vězení. Poraďte lupičům optimální čísla, která mají soudci sdělit, tedy taková, že ve vězení stráví nejmenší možný počet měsíců.

Pro suchary: Pro dané přirozené $n$ nalezněte kladná čísla $x_1$, $x_2$, … , $x_n$ taková, aby výraz

$$\log_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - \frac{1}{n} \log_n (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)$$

byl nejmenší možný.

Zloději jsou alespoň dva (jinak výraz v zadání nedává smysl - tedy soudce by si tento výraz jistě nevymyslel). Nejprve dokážeme, že zloději ve vězení stráví alespoň měsíc, tedy, že

$$\log_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - \frac{1}{n} \log_n (x_1 x_2 \cdots x_n) \geq 1.$$

Uvědomme si, že uvnitř logaritmů, které budeme upravovat, jsou vždy kladné výrazy, tedy úpravy jsou korektní. Výraz upravíme na ekvivalentní tvar:

$$\log_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - \log_n n \geq \frac{1}{n} \log_n (x_1 x_2 \cdots x_n),$$

což je totéž jako

$$\log_n \left( \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right) \geq \log_n \left( \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \right).$$

Logaritmy mají základ $n > 1$, jsou tedy rostoucí a lze je odstranit při zachování nerovnosti. Dostáváme tak známou AG-nerovnost:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

která platí pro libovolná kladná $x_1$, $x_2$, ... , $x_n$.

Díky tomu, že všechny úpravy byly ekvivalentní, je tvrzení, že zloději budou ve vězení alespoň měsíc, dokázáno. Právě měsíc stráví ve vězení tehdy, když nastane rovnost v původním výrazu, což vzhledem k ekvivalentnosti úprav znamená, že nastane rovnost v AG-nerovnosti, kterážto nastává, pokud jsou všechna $x_i$ shodná. Zloději tedy stráví ve vězení měsíc právě tehdy, když všichni sdělí soudci totéž číslo.

**5. úloha** (11, 8, 3.00, 5.0)

Farmář Pavel vlastní obrovský čtvercový pozemek rozdělený na $n \times n$ menších políček, kde $n$ je dvojciferné přirozené číslo (při leteckém pohledu tedy vypadá jako šachovnice $n \times n$). Pavel se nachází na levém horním políčku a chtěl by postupně projít všechna políčka a podívat se, jak se na kterém daří rostlinám, jež tam zasadil. Má k dispozici superrychlé vznášedlo, které má ovšem pár nevýhod. Umí létat pouze ve svislém a vodorovném směru a nepřeletí více než dvě políčka (je-li tedy Pavel na políčku $(1, 1)$ a letí vodorovně, dostane se na jeden let nejdále na políčko $(4, 1)$), potom musí přistát a doplnit palivo. Navíc, protože je vznášedlo superrychlé, vždy přeletí alespoň jedno políčko (tedy není možné přeletět hned na políčko sousední). Poraďte Pavlovi optimální cestu, jak svůj pozemek proletět na co nejmenší počet přeletů tak, aby se vrátil na výchozí políčko.

Pro suchary: Jak projít šachovnici o rozměrech $n \times n$, kde $n$ je dvojciferné přirozené, a vrátit se na výchozí pole, můžete-li skákat pouze vodorovně a svisle ob jedno či ob dvě pole, tak, aby počet provedených skoků byl co nejmenší?

Mějme dáno libovolné pevné $n > 9$. Ukážeme, že Pavel může pozemek proletět tak, že každé políčko navštíví právě jednou a posledním přeletem se vrátí na výchozí pole (tím bude zaručeno, že počet přeletů bude nejmenší možný). Zaveďme si souřadnicový systém políček tak, že při leteckém pohledu má levé horní souřadnice $(1, 1)$ a pravé dolní $(n, n)$, kde první souřadnice znamená směr svislý a druhá vodorovný. Pavel tedy začíná na políčku $(1, 1)$. V řešení využijeme několik lemmat.

**Lemma.** *Pro $n = 9$ umíme proskákat řádek o $n$ políčkách tak, že začneme na prvním, skončíme na druhém a každé navštívíme právě jednou.*

*Důkaz.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 2 | 8 | 3 | 5 | 7 | 4 | 6 |

**Lemma.** *Pro $n > 9$ umíme proskákat řádek o $n$ políčkách tak, že začneme na prvním, skončíme na posledním a každé navštívíme právě jednou.*

*Důkaz.*

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 10$: | 1 | 4 | 2 | 5 | 3 | 8 | 6 | 9 | 7 | 10 | | | | |
| $n = 11$: | 1 | 3 | 5 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 7 | 9 | 11 | | | |
| $n = 12$: | 1 | 5 | 2 | 4 | 6 | 3 | 7 | 10 | 8 | 11 | 9 | 12 | | |
| $n = 13$: | 1 | 5 | 2 | 4 | 6 | 3 | 7 | 11 | 8 | 10 | 12 | 9 | 13 | |
| $n = 14$: | 1 | 4 | 2 | 5 | 3 | 8 | 6 | 9 | 7 | 12 | 10 | 13 | 11 | 14 |

Větší $n$ vzniknou z některého z předchozích případů přičtením vhodného násobku pěti, tedy když pokračujeme těmito sekvencemi: | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 | 5 |, kde políčko označené 0 vždy splývá s předchozím posledním.

**Lemma.** *Pro liché $n > 9$ umíme proskákat řádek o $n$ políčkách tak, že začneme na předposledním, skončíme na posledním a každé navštívíme právě jednou.*

*Důkaz.* Pro $n = 11$ máme postup | 5 | 7 | 4 | 6 | 8 | 3 | 9 | 2 | 10 | 1 | 11 |. Nyní můžeme tuto sekvenci prodlužovat tak, že přidáme na konec dvě políčka, z předposledního skočíme na původní předposlední a z původního posledního na poslední (tak se dostal případ $n = 11$ z $n = 9$). Dostaneme tak tedy postupy pro všechna lichá čísla větší než 9.

Proskákání pro $n$ políček z prvních dvou lemmat budeme značit $P_n$, opačný postup (tedy od posledního k prvnímu) $P^n$, cestu z posledního lemmatu $Q^n$.

Nyní již k samotnému skákání. Mějme tedy pevné $n$. Budeme procházet první řádek podle $P_n$. Přitom po každém skoku projdeme celý sloupec až na dolní políčko, v sudých sloupcích podle $P_{n-1}$, v lichých podle $P^{n-1}$. Tedy skočíme podle $P_n$ z $(1,1)$ na $(1,a)$, v tomto sloupci podle $P_{n-1}$ na $(n-1,a)$ (pro $n = 10$ je $P_{n-1} = P_9$ výjimka, neboť cílové pole není poslední, avšak to nám, jak uvidíme, nevadí), pokračujeme v řádku podle $P_n$ na $(n-1,b)$, v tomto sloupci podle $P^{n-1}$ na $(1,b)$, …

Je-li $n$ sudé, po proskákání předposledního sloupce (podle $P_n$) skočíme do posledního sloupce a ocitneme se na pozici $(n,1)$ (a neboť 10 je sudé číslo, výjimečnost $P_9$ nám opravdu nevadila). Nyní nám nic nebrání proskákat poslední sloupec podle $P_n$, dolní řádek podle $P^n$ a první sloupec podle $P^n$ zpět na výchozí pole. Je také vidět, proč jsme si nechávali poslední sloupec volný – abychom měli „únikovou cestu“.

V případě lichého $n$ se ocitneme v posledním sloupci na pozici $(n-1,n)$. Proto použijeme $Q^n$ pro proskákání tohoto sloupce a potom opět přes poslední řádek a první sloupec doskáčeme na start.

Poznámky k došlým řešením: Téměř všechna správná řešení používala myšlenku, jež je využita i ve vzorovém řešení, jelikož je oproti autorově původní snazší ji zapsat. *František Konopecký* zvolil zajímavý přístup, kdy ukázal, jak proskákat některé malé „elementární“ šachovnice, a z nich vhodným napojováním vytvořil proskákání celé šachovnice.

**6. úloha** (34, 6, 0.00, 1.0)

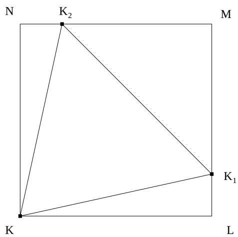
Ve městě Nemajserádi v Popudlivé ulici stojí osamocená budova se čtvercovým půdorysem. Ve třetím patře sídlí zástupci velkých mezinárodních společností Antipatie, Paranoia a Top Secret, jelikož jeden druhému nevěří, chtějí mít od sebe co největší vzdálenosti. Nalezněte (alespoň jedno) jejich optimální rozmístění, aby minimální ze vzdáleností libovolných dvou byla co největší. V pátem patře sídlí zástupci menších firem Averze, Introvert, Já & Já, Odpor a Samotáři. Ani ti si vzájemně nevěří, a tak opět chtějí, aby minimální ze vzdáleností libovolných dvou byla co největší. Konečně v šestém patře sídlí drobní obchodníci pan Bručoun, pan Háklivec, paní Nepřívětivá, pan Odpudivý, slečna Plachá a pan Protivný. I ti po vás chtějí, abyste je po čtvercové místnosti rozmístili tak, že minimální vzdálenost jakýchkoliv dvou bude co největší.

Pro suchary: Umístěte do čtverce postupně tři, pět a šest bodů tak, aby vždy vzdálenost nejbližších dvou byla maximální možná.

Rohy místnosti označíme $K$, $L$, $M$, $N$ ($K$ a $M$ jsou protější).

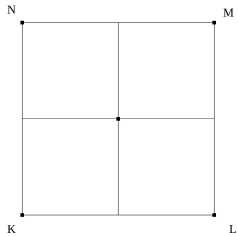
Začněme ve třetím patře. Označme $K_1 \in LM$, $K_2 \in MN$ body takové, že $|\sphericalangle LKK_1| = |\sphericalangle NKK_2| = 15°$.

Potom z osové souměrnosti podle přímky $KM$ je $|KK_1| = |KK_2|$, dále $|\sphericalangle K_1KK_2| = 60°$, tedy trojúhelník $KK_1K_2$ je rovnostranný, označme $k = |KK_1|$. Dokážeme, že rozmístění firem v bodech $K$, $K_1$, $K_2$ je optimální.




Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme lepší rozmístění. Nejprve si uvědomme, že můžeme předpokládat, že v onom lepším rozmístění je u každé strany čtvercové podstavy umístěna alespoň jedna firma. Máme-li totiž lepší rozmístění, kde tomu tak není, můžeme postupně ke každé straně (u které žádná firma není) přisunout k ní nejbližší firmu (z bodu $F_1$ do bodu $F_1'$) (je-li více nejbližších, vybereme jednu libovolnou), žádná vzdálenost se tím nezmenší (vzdálenosti mezi neposouvanými firmami se nezmění, vzdálenost mezi posouvanou firmou $F_1'$ a neposouvanou firmou (v bodě $F_i$) se zvětší, což lze nahlédnout například z toho, že v tupoúhlém trojúhelníku $F_iF_1'F_1$ je proti tupému úhlu $F_iF_1F_1'$ nejdelší strana (tři body na úsečce považujeme za speciální případ tupoúhlého trojúhelníku)). V každé ze čtyř stran čtvercové podstavy je tedy nějaká firma, firmy jsou tři, tedy některá ($F_1$) je u dvou stran neboli v rohu. BÚNO (bez újmy na obecnosti) v rohu $K$. Je-li další firma v rohu, potom existují dvě firmy mající mezi sebou vzdálenost menší rovnou $|KL| < k$ (jsou-li v sousedních rozích, je to zřejmé, jsou-li v protějších rozích, kruhy se středy v těchto rozích a poloměry $|KL|$ pokryjí celý čtverec, tedy už nelze umístit třetí firmu tak, že od nějaké nebude blíže než $|KL|$), spor. Není-li další firma v rohu, potom jedna firma ($F_2$) je umístěna na $LM$ a jedna firma ($F_3$) je umístěna na $MN$. Je-li $F_2 \in LK_1$, potom $|F_1F_2| \leq k$, spor. Je-li $F_3 \in NK_2$, potom $|F_1F_3| \leq k$, spor. Zbývá už jen případ, kdy $F_2 \in K_1M$, $F_3 \in K_2M$, potom ale $|F_2F_3| \leq k$, spor (zde by bylo možno zdůvodnit i $|F_2F_3| < k$, ale není to potřeba).

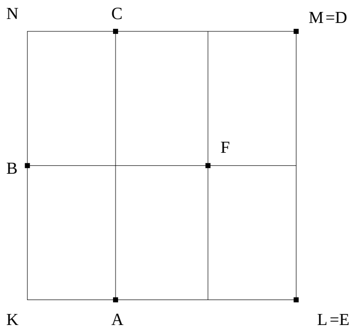
V pátém patře je situace o něco snazší. Rozdělme čtverec (osami jeho stran) na čtyři menší čtverečky o straně $\frac{1}{2}$. Každý takový čtvereček lze do kružnice s průměrem $|KL|\frac{\sqrt{2}}{2}$, tedy vzdálenost libovolných dvou firem uvnitř čtverečku je menší nebo rovna $|KL|\frac{\sqrt{2}}{2}$. Čtverečky jsou čtyři, a tedy dvě z firem jsou v témže čtverečku, čím je i minimum vzdáleností dvojic firem menší nebo rovno $|KL|\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pokud však firmy umístíme do vrcholů čtverce $KLMN$ a do jeho středu, budou všechny vzdálenosti větší nebo rovny $|KL|\frac{\sqrt{2}}{2}$, čímž je toto rozmístění optimální.




Nakonec se pusťme do řešení situace v šestém patře.

Pro začátek bych se chtěl vám, řešitelům, omluvit, neboť úloha byla o něco těžší, než jsme původně předpokládali. Při řešení této třetí části zkombinujeme předchozí dva přístupy a přidáme k nim ještě něco navíc. Pro pohodlnější zápis označme postupně pana Bručouna, pana Háklivce, paní Nepřívětivou, pana Odpudivého, slečnu Plachou a pana Protivného písmeny $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$.

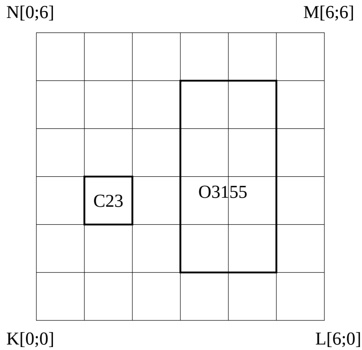
Nejprve ukážeme optimální rozmístění, potom o něm dokážeme, že je optimální. Ono rozmístění bude: $A \in KL$ tak, že $2|AK| = |AL|$, $B$ je střed $KN$, $C \in MN$ tak, že $2|CN| = |CM|$, $D$ splývá s $M$, $E$ splývá s $L$ a $F$ je průsečík úhlopříček obdélníku $AEDC$.




BÚNO (tj. ve vhodné soustavě, ve které budeme vzdálenosti měřit) je $|KL| = 6$. Potom snadno ověříme, že nejkratší vzdalenost mezi nějakými dvěma body je $\sqrt{13}$. Dokážeme, že větší minimum vzdáleností není možné.

Pro spor předpokládejme, že máme rozmístění s minimem vzdáleností rovným $m$, kde $m > \sqrt{13}$. Rozdělme přímkami rovnoběžnými s $KL$ a $KN$ čtverec $KLMN$ na 36 jednotkových čtverečků. Protože ho budeme potřebovat i později, zaveďme si už nyní pravoúhlý souřadnicový systém $K[0,0], L[6,0], N[0,6]$. Pro snazší popis značme jednotkový čtvereček s vrcholy v bodech $[a-1,b-1],[a,b-1],[a,b],[a-1,b]$ symbolem $Cab$ a nějaký obdélník s vrcholy v bodech

$[a,b],[c,b],[c,d],[a,d]$ $(a<c, b<d)$ symbolem $Oabcd$. Na následujícím obrázku jsou vyznačeny $C23$ a $O3155$.




Všimněme si následujících vlastností (všechny útvary uvažujeme včetně hranice):

($\heartsuit$) V libovolném obdélníku o délkách stran 2, 3 je umístěn nejvýše jeden bod. Kdyby tam bylo umístěno bodů více, mají od sebe vzdálnost nejvýše rovnou délce úhlopříčky (to lze ověřit například z Pythagorovy věty), která je $\sqrt{13}$, což je spor, že $m>\sqrt{13}$.

($\diamondsuit$) Pokryjeme-li čtverec $KLMN$ šesti obdélníky o délkách stran 2, 3, potom v každém takovém obdélníku leží alespoň jeden bod. Kdyby v nějakém z nich nebyl žádný bod, potom mezi nimi z Dirichletova principu existuje obdélník, v kterém jsou dva body, což je spor s ($\heartsuit$).

Uvědomme si, že KLMN můžeme pokrýt šesti obdelníky $O0023$, $O2043$, $O4063$, $O0326$, $O2346$ a $O4366$ a také obdélníky $O0032$, $O0234$, $O0436$, $O3062$, $O3264$ a $O3466$. Tedy podle ($\diamondsuit$) a ($\heartsuit$) v každém z oněch obdélníků leží právě jeden bod.

Ještě si zobecníme tvrzení ($\heartsuit$) na:

($\spadesuit$) V libovolném obdélníku o délce úhlopříčky menší nebo rovné $\sqrt{13}$ je nejvýše jeden bod. Důkaz je stejný jako u tvrzení ($\heartsuit$).

Nyní rozlišme dvě možnosti:

(i) Ve čtverci $O2244$ neleží žádný bod.

V obdélníku $O2043$ nutně nějaký bod leží, protože neleží uvnitř $O2244$, je v obdélníku $O2032$ nebo $O3042$, BÚNO v obdélníku $O3042$. V obdélníku $O3062$ leží právě jeden bod, tedy ve čtverci $O4062$ už žádný bod neleží. V obdélníku $O4063$ leží jeden bod, tedy nutně leží v obdélníku $O4263$. V obdélníku ($\heartsuit$) $O3053$ leží nejvýše jeden bod, ovšem v $O3042$ už bod leží tedy ve čtverečku $C53$ žádný bod není, tedy nutně ve čtverečku $C63$ bod je. V obdélníku ($\heartsuit$) $O3163$ leží nejvýše jeden bod, ovšem v $C63$ už bod leží, tedy ve čtverečku $C42$ žádný bod není, čím nutně ve čtverečku $C41$ bod je. V obdélníku $O1042$ je ($\heartsuit$) nejvýše jeden bod, ovšem už $C41$ obsahuje bod, tedy ve čtverci $O1032$ žádný bod není. V obdélníku $O0032$ je právě jeden bod, tedy obdélník $O0012$ obsahuje bod. V obdélníku $O0023$ je právě jeden bod, tedy v obdélníku $O0223$ žádný bod není. V obdélníku $O0234$ je právě jeden bod, čím nutně $O0324$ obsahuje bod. V $O0124$ je ($\heartsuit$) nejvýše jeden bod, čím nutně v $C12$ bod není, a tedy v $C11$ bod je. Obdobně se odvodí, že v $C66$ bod je (stačí využít symetrie podle $LN$). Tedy v každém z (disjunktních) čtverečků $C11$, $C41$, $C63$, $C66$ je právě jeden bod (bylo by možné odvodit, že zbývající dva body jsou v $C14$ a $C36$, ale to nebudeme potřebovat).

Nyní již snadno odvodíme spor. Označme postupně $X_1[0,1]$, $X_2[\sqrt{12},0]$, $X_3[\sqrt{12},1]$, $X_4[\sqrt{12}, 6-\sqrt{12}]$, $X_5[5,6-\sqrt{12}]$ , $X_6[6,6-\sqrt{12}]$, $X_7[5,6]$ body s uvednými souřadnicemi. Potom obdélníky

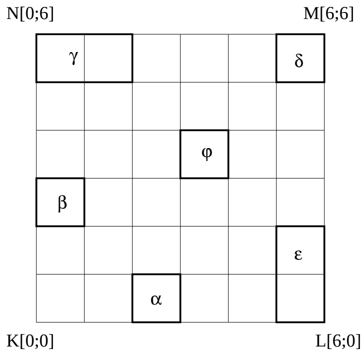
$KX_2X_3X_1$, $X_5X_6MX_7$ a čtverec $X_2LX_6X_4$ pokrývají čtverce $C11$, $C41$, $C63$ a $C66$. Mají úhlopříčky po řadě $\sqrt{13}$, $\sqrt{13}$ a $\sqrt{2}\left(6-\sqrt{12}\right)$ (snadno si ověříte, že $\sqrt{2}\left(6-\sqrt{12}\right)<\sqrt{13}$). Čili podle (♠) obsahují nejvýše tři body, což je spor s tím, že $C11$, $C41$, $C63$ a $C66$ obsahují dohromady čtyři body.

(ii) Ve čtverci $O2244$ leží nějaký bod.

BÚNO můžeme předpokládat, že leží ve čtverečku $C44$. V obdélnících $O3365$ a $O3356$ je podle (♡) nejvýše jeden bod, tedy v žádném ze čtverců $O4365$ a $O3456$ bod není. Potom v obdélníku $O4366$ je právě jeden bod, tedy tento bod je už nutně ve čverečku $C66$. V obdélnících $O2346$, $O1345$, $O1244$, $O2144$, $O3154$ a $O3264$ je podle (♡) nejvýše jeden bod, ovšem všechny obsahují čtvereček $C44$, tedy v žádném ze čtverečků $C2i$, $Ci2$, $C3j$ a $Cj3$ (kde $i\in\{3,4,5\}, j\in\{3,\cdots,6\}$) neleží žádný bod. V obdélnících $O2043$ a $O0234$ je právě jeden bod, tedy nutně v obdélnících $O2041$ a $O0214$ leží nějaký bod. V obdélnících $O2052$ a $O0225$ leží podle (♡) nejvýše jeden bod, tedy ve čtverečcích $C51$, $C15$ žádný bod není. V obdélnících $O4063$ a $O0436$ leží v každém právě jeden bod, tedy nutně v obdélnících $O5062$ a $O0526$ leží v každém právě jeden bod. V Obdélnících $O3062$ a $O0326$ leží právě jeden bod, tedy ve čtvercích $C41$ a $C14$ žádný bod není. V závěru tohoto odstavce si uvědomme, že ani ve čverci $O0022$ žádný bod není, neboť v obdélníku $O0032$ je právě jeden bod.

Takto jsme odvodili, že v každém z útvarů $C31$, $C13$, $C44$, $C66$, $O5062$ a $O0526$ je právě jeden bod (nikde jinde bod není). Nyní budou muset přicházet na řadu čím dál tím lepší odhady.

Pro snazší formulace budeme předpokládat, že $A\in C31$, $B\in C13$, $C\in O0526$, $D\in C66$, $E\in O5062$, $F\in C44$. Dále označme $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\varphi$ oblasti, o kterých víme, že v nich musí ležet po řadě body $A,B,C,D,E,F$. V současné chvíli tedy $\alpha=C31$, $\beta=C13$, $\gamma=O0526$, $\delta=C66$, $\varepsilon=O5062$, $\varphi=C44$.




Nyní zaveďme ještě jedno značení:

Trojúhelník s vrcholy v bodech $[a,b],[c,d],[e,f]$ značme $Tabcdef$.

Uvědomme si, že uvnitř trojúhelníku $T434434$ žádný bod není. Dokažme sporem. Trojúhelník je v oblasti $\varphi$. Je-li uvnitř něj bod $F[f_1,f_2]$, označme ještě $D[d_1,d_2]$. Vzhledem k tomu, že nutně $f_1<d_1$, $f_2<d_2$, vzdálenost $|FD|$ se nezmenší, zaměníme-li bod $D$ bodem, jehož (obě!) souřadnice jsou maximální možné, tedy bodem $M$. Ovšem kruh se středem v bodě $M$ a poloměrem $\sqrt{13}$ obsahuje celý $T434434$ (nakreslete si obrázek), čím je $|FM|\leq\sqrt{13}$, tedy i $|FD|\leq\sqrt{13}$, což je spor, že $m>\sqrt{13}$ (připomeňme, že $m$ stále značí minimum vzdáleností).

Tím se nám oblast $\varphi$ zmenšila na trojúhelník $T433334$ (mohli bychom sice ještě vynechat úsečku spojující body [3,4] a [4,3], nicméně by to situaci pouze komplikovalo).

Dále si všimněme, že celá situace je symetrická podle přímky $KM$ (označme $\xi = 3,5$). Tedy BÚNO můžeme předpokládat, že bod $F$ v oblasti $\varphi$ leží v trojúhelníku $T3343\xi\xi$, čím se tedy oblast $\varphi$ zmenší na tento trojúhelník.

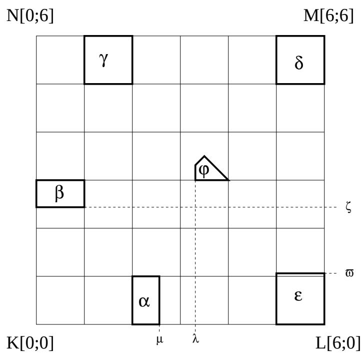
Nyní si označme $\lambda = \frac{\sqrt{22}+2}{2}$ ($\lambda \doteq 3,3452$). Potom (snadno si ověříte) obdélník $O02\lambda\lambda$ má úhlopříčku délky $\sqrt{13}$. Obsahuje celou oblast $\beta$, tedy v něm leží bod $B$ a podle (♠) už v něm nemůže ležet bod $F$. Tedy trojúhelník $T33\lambda3\lambda\lambda$ lze vyjmout z oblasti $\varphi$.

Přidejme si další symbol, a sice $\omega = 3,5 - \sqrt{13-(6-\lambda)^2}$ ($\omega \doteq 1,0603$). Snadno si ověříte, že obdélník $O\lambda\omega6\xi$ (připomeňme, že $\xi = 3,5$) má úhlopříčku dlouhou $\sqrt{13}$. Obsahuje celou oblast $\varphi$, tedy v něm leží bod $F$ a podle (♠) v něm už neleží bod $E$. Čím lze obdélník $O5\omega62$ vyjmout z oblasti $\varepsilon$, neboli se tato oblast smrskne na $O506\omega$.

Nadále si označme $\mu = 6 - \sqrt{13-\omega^2}$ ($\mu \doteq 2,5539$). Potom obdélník $O\mu06\omega$ má úhlopříčku dlouhou $\sqrt{13}$, obsahuje celou oblast $\varepsilon$, čím podle (♠) neobsahuje bod $A$, neboli z oblasti $\alpha$ lze vyjmout obdélník $O\mu031$. Z oblasti $\alpha$ pak už zbyde jen $O20\mu1$.

Pokračujme. Nechť $\zeta = \sqrt{13-\mu^2}$ ($\zeta \doteq 2,5451$). Obdélník $O00\mu\zeta$ má úhlopříčku $\sqrt{13}$ a obsahuje $\alpha$. Potom podle (♠) můžeme obdélník $O021\zeta$ (ležící i v oblasti $\beta$ i v obdélníku $O00\mu\zeta$) z oblasti $\beta$ vyjmout a zůstane nám tedy $O0\zeta13$ jako oblast $\beta$.

Obdélník $O0\zeta16$ má úhlopříčku dlouhou $\sqrt{1+(6-\zeta)^2} \doteq \sqrt{12,9361} < \sqrt{13}$. V tomto obdélníku leží i oblast $\beta$ i čtvereček $C16$ ležící v oblasti $\gamma$, tedy tento čtvereček lze z oblasti oblasti $\gamma$ vyjmout, po čemž nám v ní zbyde pouze čtvereček $C26$.




Oblasti $\alpha \cdots \varphi$ jsme dostatečně zmenšili, abychom mohli provést finální odhady. Dokážeme, že do oblastí $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ nelze rozmístit body $A$, $B$, $C$, $F$ tak, aby vzdálenost každých dvou byla větší nebo rovna $m$ (oblasti $\delta$, $\varepsilon$ jsme tedy použili ke zmenšení oblastí $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ a nadále je už nebudeme potřebovat).

Úsečku spojující body $[a,b],[c,d]$ si (nečekaně) značme $Uabcd$.

Každý z bodů $B, C, F$ má první složku nutně větší nebo rovnu jedné, na druhou stranu bod $A$ má tuto složku menší nebo rovnou jedné. Budeme-li tedy tuto složku u bodu $A$ zmenšovat, určitě tím nezmenšíme jakoukoliv vzdálenost (tedy ani jejich minimum). Můžeme tedy předpokládat, že tato složka je u bodu $A$ minimální, neboli že bod $A$ leží na úsečce $U20\mu0$. Analogicky můžeme předpokládat, že bod $B$ leží na úsečce $U0\zeta03$ a bod $C$ na úsečce $U1626$.

Tedy lze označit souřadnice bodů: $A[a,0]$, $B[0,b]$, $C[c,6]$, $a \in \langle 2;\mu\rangle, b \in \langle\zeta;3\rangle, c \in \langle 1;2\rangle$. Uvědomme si, že nám stačí dokázat, že kruhy $k_A$, $k_C$ se středy v bodech $A$ , $C$ a poloměry $\sqrt{13}$ pokrývají dohromady celou oblast $\varphi$ (v těch kruzích už žádný další bod ležet nemůže, a tak dostaneme spor). Dále si uvědomme, že k tomu, abychom dokázali, že zmiňované dva kruhy pokrývají oblast $\varphi$, nám stačí najít kruh $k_G$ se středem v bodě $G[g,6](g \leq c)$ a poloměrem $\sqrt{13}$, který společně s kruhem $k_A$ pokryje oblast $\varphi$. (Totiž první složka libovolného bodu oblasti $\varphi$ je nutně větší než první složka bodu $C$, tedy záměnou bodu $C$ za $G$ se vzdálenosti nezmenší, neboli všechno uvnitř $\varphi$, co pokryje $k_G$, pokryje i $k_C$. Vlastnost, že kruhy $k_A$ a $k_G$ pokrývají oblast $\varphi$, převeďme ještě na jinou postačující podmínku, a sice, že jim odpovídající kružnice mají průsečík v opačné polorovině určené přímkou $p$ (přímku $p$ definujme jako přímku určenou úsečkou $U3443$), než leží oblast $\varphi$. Že to stačí, je vidět z obrázku (když si ho nakreslíte), korektní zdůvodnění není těžké, vyžaduje pouze trochu technického úsilí, tedy budete-li chtít, snadno si ho odvodíte. Jelikož kruhy už nebudeme potřebovat, budeme nadále $k_A$, $k_G$ značit kružnice určené těmito kruhy.

Inu, opět si hrajme s odhady. Body $A$, $B$ mají mezi sebou vzdálenost alespoň $m > \sqrt{13}$, čili

$$a^2 + b^2 > 13,$$

$$b^2 > 13 - a^2,$$

$13 - a^2 > 0 (a \in < 2; \mu >)$,

$$b > \sqrt{13 - a^2}.$$

I body $B$ a $C$ mají mezi sebou vzdálenost alespoň $\sqrt{13}$, čím

$$(6-b)^2 + c^2 > 13$$

$$c^2 > 13 - (6-b)^2 > 13 - \left(6 - \sqrt{13 - a^2}\right)^2.$$

Nyní dokážeme, že

$$(\clubsuit) : a - c < 2,8(a-2),$$

neboli

$$c > 5,6 - 1,8a,$$

$1,8a < 5,6$,

$$c^2 > (5,6 - 1,8a)^2,$$

protože

$$c^2 > 13 - \left(6 - \sqrt{13 - a^2}\right)^2,$$

stačí dokázat

$$13 - \left(6 - \sqrt{13 - a^2}\right)^2 \geq (5,6 - 1,8a)^2,$$

což dokážeme posloupností ekvivalencí.

$$13 \cdot 25 - 25\left(6 - \sqrt{13 - a^2}\right)^2 \geq (28 - 9a)^2,$$

$$13 \cdot 25 - 900 + 300\sqrt{13 - a^2} - 13 \cdot 25 + 25a^2 \geq 784 - 504a + 81a^2,$$

$$300\sqrt{13 - a^2} \geq 1684 - 504a + 56a^2,$$

$$75\sqrt{13 - a^2} \geq 421 - 126a + 14a^2.$$

$a < 3$, čímž je $421 - 126a + 14a^2$ kladné:

$$5625(13 - a^2) \geq \left(421 - 126a + 14a^2\right)^2,$$

$$73125 - 5625a^2 \geq 177241 - 106092a + 27664a^2 - 3528a^3 + 196a^4,$$

$$196a^4 - 3528a^3 + 33289a^2 - 106092a + 104116 \leq 0.$$

Naším cílem je dokázat, že pro $a \in \langle 2, \mu \rangle$ tato nerovnost platí. To bychom mohli dokázat pomocí nějakých velmi dobrých odhadů. Další možnost je funkci

$$f(a) = 196a^4 - 3528a^3 + 33289a^2 - 106092a + 104116$$

dvakrát zderivovat, dostaneme funkci:

$$f''(a) = 2352a^2 - 21168a + 66578 = 2(1176a^2 - 10584a + 33289).$$

Přičemž snadno dokážeme, že $f''(a) > 0$ pro všechna reálná $a$, totiž diskriminant kvadratické rovnice

$$1176a^2 - 10584a + 33289$$

má hodnotu

$$D = 10584^2 - 4 \cdot 1176 \cdot 33289 = -44570400 < 0,$$

tedy tato funkce nemá kořen, a protože má kladný koeficient u kvadratického členu, je kladná. Protože je druhá derivace funkce

$$f(a) = 196a^4 - 3528a^3 + 33289a^2 - 106092a + 104116$$

kladná, znamená to, že je tato funkce ryze konvexní, a tedy má nejvýše dva reálné kořeny. Dále $f(2) = 0$, $f(2,57) = -5.84601804$, $f(3) = 6061$, tedy tato funkce má kořen 2 a kořen $r \in (2,57; 3)$, žádný jiný kořen nemá, čím je nutně na $\langle 2; 2,57 \rangle$ záporná, tedy i na $\langle 2; \mu \rangle$ záporná ($\mu \doteq 2,5539$). Tím je ($\clubsuit$) dokázáno.

Víme tedy ($\clubsuit$), že $c > 5,6 - 1,8a$. Volme $G[g, 6]$, kde $g = 5,6 - 1,8a$ (tedy $g < c$). Stačí tedy dokázat, že kružnice $k_A$ a $k_G$ mají průsečík $P[x, y]$, kde $P$ leží v opačné polorovině určené přímkou $p$ než oblast $\varphi$. Snadno nahlédneme, že přímka $p : \{[x', y'], [x', y'] \in p\}$ je určena rovnicí $x' + y' = 7$ a oblast $\varphi$ leží v polorovině $x' + y' \leq 7$. Stačí tedy dokázat, že $x + y \geq 7$.

Kružnice $k_A$ má rovnici:

$$(x - a)^2 + y^2 = 13.$$

Kružnice $k_G$ má rovnici:

$$(x - g)^2 + (y - 6)^2 = 13.$$

Vyřešením této soustavy rovnic získáme průsečíky kružnic $k_A$, $k_G$. Označme (za účelem získávání jednodušších výrazů) ($\Delta$):

$$z = x - a$$

$$d = 2,8(a - 2) = a - (5,6 - 1,8a) = a - g,$$

soustavu jsme převedli na (1):

$$z^2 + y^2 = 13$$

a (2):
$$(z+d)^2+(y-6)^2=13.$$

Toto jsou rovnice kružnic $k'_A$, $k'_G$ v rovině určené osami $z$ a $y$. Obě mají poloměr 13, $k'_A$ má střed $[0,0]$, $k'_G$ má střed $[-d,6]$. Oba jejich průsečíky leží na přímce kolmé na spojnici jejich středů a procházející středem této spojnice (tato přímka se nazývá chordála). Snadno se odvodí rovnice této chordály (bez geometrického náhledu bychom tuto rovnici získali odečtením rovnic (1) a (2), nicméně geometrický náhled umožní lépe si uvědomovat některé vlastnosti, například, že řešení (1) a (3) je už i řešením (1) a (2)), která je (3):

$$y=\frac{d}{6}z+3+\frac{d^2}{12},$$

neboli (3):
$$12y=2dz+36+d^2.$$

Místo toho, abychom řešili soustavu rovnic (1), (2), stačí tedy vyřešit jednodušší soustavu (1), (3). Zajímá nás jistě průsečík s kladným $y$, tedy z (1) máme:

$$y=\sqrt{13-z^2},$$

dosazením do (3):
$$12\sqrt{13-z^2}=2dz+36+d^2,$$

umocněním:
$$144(13-z^2)=4d^2z^2+144dz+36^2+72d^2+d^4+4d^3z,$$
$$(4d^2+144)z^2+(4d^3+144d)z+d^4+72d^2-576=0,$$

zajímá nás průsečík s větším $z$, tedy (4):

$$z=\frac{-(4d^3+144d)+\sqrt{(4d^3+144d)^2-4(4d^2+144)(d^4+72d^2-576)}}{2(4d^2+144)},$$

neboli:
$$z=-\frac{d}{2}+\frac{\sqrt{(4d^2+144)(4d^4+144d^2-4d^4-288d^2+2304)}}{2(4d^2+144)},$$

a poté (4):
$$z=-\frac{d}{2}+3\frac{\sqrt{(d^2+36)(-d^2+16)}}{(d^2+36)}.$$

Nyní si vyjádřeme $a$ pomocí $d$, a sice z $(\Delta)$ plyne, že

$$a=\frac{d}{2,8}+2.$$

Nyní si vyjádřeme $x+y$ pomocí $d$:

$$x+y=z+a+y=z+a+\frac{d}{6}z+3+\frac{d^2}{12}=z+\frac{d}{2,8}+2+\frac{d}{6}z+3+\frac{d^2}{12}=$$

$$= \left(1+\frac{d}{6}\right)\left(-\frac{d}{2}+3\frac{\sqrt{(d^2+36)(-d^2+16)}}{(d^2+36)}\right)+5+\frac{d}{2,8}+\frac{d^2}{12}.$$

Přitom první rovnost plyne z ($\Delta$), druhá plyne z (3), v třetí se dosadilo za $a$ a ve čtvrté za $z$.

Potom pro důkaz $x+y\geq 7$ stačí dokázat, že

$$\left(1+\frac{d}{6}\right)\left(-\frac{d}{2}+3\frac{\sqrt{(d^2+36)(-d^2+16)}}{(d^2+36)}\right)+\frac{d}{2,8}+\frac{d^2}{12}\geq 2.$$

Ještě si uvědomme, že $a\in\langle 2,\mu\rangle$, a tak podle ($\Delta$) $d\in\langle 0;2,8(\mu-2)\rangle$, kde $2,8(\mu-2)\doteq 1,5509$.

Nyní už zmiňovanou nerovnost dokážeme posloupností ekvivalencí.

$$\left(1+\frac{d}{6}\right)\left(-\frac{d}{2}+3\frac{\sqrt{(d^2+36)(-d^2+16)}}{(d^2+36)}\right)+\frac{d}{2,8}+\frac{d^2}{12}\geq 2,$$

$$\left(1+\frac{d}{6}\right)3\frac{\sqrt{(d^2+36)(-d^2+16)}}{(d^2+36)}\geq 2+d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2,8}\right),$$

vynásobme rovnici 14,

$$\left(14+\frac{7d}{3}\right)3\frac{\sqrt{(d^2+36)(-d^2+16)}}{(d^2+36)}\geq 28+d(7-5),$$

výrazy na obou stranách jsou kladné,

$$9\left(14+\frac{7d}{3}\right)^2\frac{(-d^2+16)}{(d^2+36)}\geq(28+2d)^2,$$

$d^2+36>0$,

$$(42+7d)^2(-d^2+16)\geq(d^2+36)(28+2d)^2,$$

$$(49d^2+588d+1764)(-d^2+16)\geq(d^2+36)(4d^2+112d+784),$$

$$-49d^4-588d^3-980d^2+9408d+28224\geq 4d^4+112d^3+928d^2+4032d+28224,$$

$$53d^4+700d^3+1908d^2-5376d\leq 0.$$

Funkci

$$f(d)=53d^4+700d^3+1908d^2-5376d$$

opět dvakrát zderivujeme, dostaneme:

$$f''(d)=636d^2+4200d+3816=12(53d^2+350d+318),$$

druhá derivace je pro nezáporná $d$ kladná, čili funkce $f$ v nezáporných číslech ryze konvexní, tedy tam má nejvýše dva reálné kořeny. Avšak $f(0)=0$, $f(1,6)=-502,5792$, $f(2)=3328$, tedy tato funkce má kořen nulu a další kořen na intervalu $(1,6;2)$, žádný jiný kořen nemá, a tak je nutně na intervalu $\langle 0;1,6\rangle$, tedy i na intervalu $\langle 0;2,8(\mu-2)\rangle$ nekladná, což je vše, co jsme chtěli dokázat. Gratuluji všem, kteří se dostali až sem.

Poznámky k došlým řešením: Úlohu jsem hodnotil po jednom bodu za části ve třetím patře a v patém patře a třemi body za nejobtížnější část v šestém patře. Situace v šestém patře se stala těžší, než se původně předpokládalo, a tak se ji nikomu z řešitelů nepodařilo vyřešit. Avšak i třetí a páté patro bez chyb vyřešili pouze *Honza Moláček* a *Víťa Kala*, a tak bodový úhrn z úlohy nebyl nijak zvlášť vysoký (někteří řešitelé se vůbec neobtěžovali zdůvodňovat, že jimi nalezené řešení je optimální). Nakonec jsem uděloval bod jen za (oba) správné obrázky u první a druhé části a bod za správný obrázek u třetí části.

**7. úloha** (18, 5, 1.00, 1.0)

Luboš si náhodně zvolí celé číslo od 1 do $K$ a chce je sdělit Dinovi. Jejich prostředník Martin však souhlasil pouze s následujícím postupem: Nejdříve donese Lubošovi šachovnici o rozměrech $8 \times 8$, jejíž některá políčka jsou obarvena bíle a ostatní černě (libovolným způsobem). Luboš si vybere jedno políčko, jehož barvu změní. Poté Martin donese šachovnici Dinovi a ten si ji může prohlédnout. Najděte optimální $K$, tedy největší možné takové, aby Dino vždy mohl určit, které číslo si Luboš myslel, pokud se předem domluví na strategii.

Luboš změní jedno z 64 políček, může tedy rozlišit maximálně 64 čísel, jinak by dvěma číslům příslušela tatáž změna a Dino by neměl možnost zjistit, které z nich si Luboš myslel.

Nyní si ukážeme, jak rozlišit právě 64 čísel. Očíslujme si políčka šachovnice $0, \dots, 63$ (toto očíslování je pevné a Dino s Lubošem se na něm předem dohodnou), každému z nich přiřaďme jeho dvojkový zápis doplněný na šest cifer (tedy $0 = 000000$, $25 = 011001$, $63 = 111111$). Dále černé přiřaďme 1 a bílé 0. Mějme nějaké obarvení šachovnice, tedy každému políčku jsme přiřadili nulu nebo jedničku. Nechť $a_i$ je zbytek po dělení dvěma součtu hodnot těch políček, jejichž označení má na $i$-tém místě nulu. Nechť si nyní Luboš myslí číslo $x$ z $\{0, \dots, 63\}$ a jeho zápis ve dvojkové soustavě je $b_1b_2b_3b_4b_5b_6$. Nyní Lubošovi stačí změnit barvu políčka $c_1c_2c_3c_4c_5c_6$, kde $c_i$ je jedna v případě $a_i = b_i$ a nula v případě $a_i \neq b_i$. Změnou tohoto políčka totiž Luboš změní ta $a_i$, která byla různá od $b_i$ (změnou příslušných součtů o jedna se změní zbytek po dělení dvěma z nuly na jedna či naopak). Nyní již $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ bude dvojkovým zápisem čísla, které si Luboš myslí, a tedy Dino si toto číslo snadno z obarvení šachovnice spočítá.

**Poznámka:** Pokud se vám toto řešení zdá neintuitivní a „spadlé z nebe", může vám pomoci následující. Ony šestice nul a jedniček můžeme interpretovat jako souřadnice v šestirozměrném prostoru, přičemž políčka jsou právě vrcholy jednotkové krychle a díváme se na součty hodnot vrcholů těch stěn, které obsahují vrchol $[0, 0, 0, 0, 0, 0]$. Pokud je pro vás obtížné si představit šestirozměrnou krychli, zkuste si rozmyslet analogii v rovině a prostoru, kdy v rovině jde o jednotkový čtverec a rozlišíme čtyři čísla a v prostoru jde o jednotkovou krychli a rozlišíme osm čísel.

Poznámky k došlým řešením: Rešitelé se rozdělili do tří skupin. V jedné byli ti, kteří zadání vůbec nepochopili, v druhé ti, kteří sice úlohu pochopili, nicméně nevyřešili, ve třetí skupině pak zůstalo asi pět řešitelů, kteří příklad i vyřešili.

**8. úloha** (8, 4, 2.00, 1.0)

Je dán trojúhelník $ABC$, uvnitř něj volme bod $H$. Průsečíky přímek $AH$, $BH$, $CH$ po řadě se stranami $BC$, $CA$, $AB$ označme po řadě $D$, $E$, $F$. Dále označme $a$, $b$, $c$ délky úseček $BC$, $CA$, $AB$ a $s$ polovinu obvodu trojúhelníka $ABC$. Určete optimální polohu bodu $H$, pro kterou je výraz

$$\frac{|AH|(s-b)(s-c)}{|DH|(s-a)} + \frac{|BH|(s-a)(s-c)}{|EH|(s-b)} + \frac{|CH|(s-a)(s-b)}{|FH|(s-c)}$$

minimální.

K řešení budeme využívat geometrii hmotných bodů, proto nejprve zopakujeme nějaké pojmy a nějaká tvrzení. Jejich důkazy zde nebudeme zmiňovat, nicméně jsou poměrně lehké. Pokud je chcete někde nalézt, popř. se dozvědět něco více o geometrii hmotných bodů, může vám posloužit například seriál před dvěma roky.

Soustavou hmotných bodů rozumíme množinu $S = \{[A_1, m_1], [A_2, m_2], \cdots, [A_n, m_n]\}$, kde $A_i$ jsou body v rovině (prostoru) a $m_i$ jsou hmotnosti bodů $A_i$, $m_i \in \mathbb{R}$. Hmotností $m_S$ soustavy $S$ rozumíme součet $m_S = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Těžištěm soustavy $S$ rozumíme bod $T_S$, pro který $\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{T_i A_i} = 0$ ($\overrightarrow{T_S A_i}$ je vektor). Z tohoto vyjádření je zřejmé, že těžiště se nemění při vynásobení hmotností nějakým nenulovým $l$.

Věta ($\heartsuit$): Pro každou soustavu $S$, $m_S \neq 0$ existuje právě jedno těžiště. Tuto větu vyžadují následující věty jako předpoklad.

Dále platí jednoduché tvrzení ($\spadesuit$): Je-li $S = \{[A, m_A], [B, m_B]\}$ soustava, $m_S \neq 0$, potom těžiště $T_S$ leží na přímce $AB$, navíc, mají-li $m_A$, $m_B$ táž znaménka, potom $T_S$ leží na úsečce $AB$ a splňuje $\frac{m_A}{m_B} = \frac{|T_S B|}{|T_S A|}$.

Věta ($\clubsuit$) (O skládání): Je-li $S = \{[A_1, m_1], [A_2, m_2], \cdots, [A_n, m_n]\}$ soustava s hmotností $m_S \neq 0$ a těžištěm $T_S$, $k < n$ a $S' = \{[A_1, m_1], [A_2, m_2], \cdots, [A_k, m_k]\}$ její podsoustava s hmotností $m_S{}' \neq 0$ a těžištěm $T_S{}'$, potom $T_S$ je těžištěm soustavy $S'' = \{[T_S{}', m_S{}'], [A_{k+1}, m_{k+1}], [A_{k+2}, m_{k+2}], \ldots, [A_n, m_n]\}$.

Věta ($\diamondsuit$): Je-li $X$ vnitřní bod trojúhelníku $ABC$, potom existuje soustava $S = \{[A, m_A], [B, m_B], [C, m_C]\}$, $m_A$, $m_B$, $m_C > 0$, že bod $X$ je těžištěm soustavy $S$ a naopak, pokud má soustava $S$ kladné hmotnosti, jejím těžištěm je nějaký vnitřní bod trojúhelníku $ABC$.

Nyní máme dostatek prostředků k tomu, abychom úlohu pomocí geometrie hmotných bodů mohli vyřešit. Výrazy $(s-a)$, $(s-b)$, $(s-c)$ jsou z trojúhelníkové nerovnosti kladné. Označme:

$$m_1 = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{(s-a)}}, m_2 = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{(s-b)}}, m_3 = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)}}.$$

Podle věty ($\diamondsuit$) je bod $H$ těžištěm nějaké soustavy $S = \{[A, m_A], [B, m_B], [C, m_C]\}$, $m_A$, $m_B$, $m_C > 0$. Potom označme $S'$ soustavu $S' = \{[B, m_B], [C, m_C]\}$, $T_S{}'$ její těžiště. Z věty ($\clubsuit$) je $H$ těžištěm soustavy $S'' = \{[A, m_A], [T_S{}', m_B + m_C]\}$ Podle tvrzení ($\spadesuit$) (pro soustavy $S'$, $S''$) $T_S{}' \in BC$ a $H \in AT_S{}'$. Tím je bod $T_S{}'$ bodem $D$. Podle téhož tvrzení (pro $S''$) je:

$$\frac{|AH|}{|DH|} = \frac{m_B + m_C}{m_A}.$$

Analogicky:

$$\frac{|BH|}{|EH|} = \frac{m_A + m_C}{m_B}, \quad \frac{|CH|}{|FH|} = \frac{m_A + m_B}{m_C}.$$

Nyní už jen:

$$\frac{|AH|}{|DH|}\frac{(s-b)(s-c)}{(s-a)} + \frac{|BH|}{|EH|}\frac{(s-a)(s-c)}{(s-b)} + \frac{|CH|}{|FH|}\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)} =$$

$$= \frac{|AH|}{|DH|}m_1^2 + \frac{|BH|}{|EH|}m_2^2 + \frac{|CH|}{|FH|}m_3^2 = \frac{m_B + m_C}{m_A}m_1^2 + \frac{m_A + m_C}{m_B}m_2^2 + \frac{m_A + m_B}{m_C}m_3^2 =$$
$$= \left(\frac{m_B}{m_A}m_1^2 + \frac{m_A}{m_B}m_2^2\right) + \left(\frac{m_C}{m_A}m_1^2 + \frac{m_A}{m_C}m_3^2\right) + \left(\frac{m_C}{m_B}m_2^2 + \frac{m_B}{m_C}m_3^2\right) \geq$$
$$\geq 2(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3),$$

což je výraz nezávislý na poloze $H$. Při poslední úpravě jsme použili AG-nerovnost. Rovnost nastává, právě když $m_a = km_1, m_b = km_2, m_c = km_3$ pro nějaké kladné $k$. Tedy, aby byl výraz

$$\frac{|AH|}{|DH|}m_1^2 + \frac{|BH|}{|EH|}m_2^2 + \frac{|CH|}{|FH|}m_3^2$$

minimální, je bod $H$ těžištěm soustavy $S = \{[A, km_1], [B, km_2], [C, km_3]\}$, což, jak víme, je těžiště soustavy $S = \{[A, m_1], [B, m_2], [C, m_3]\}$.

Nyní si stačí uvědomit, že těžištěm této soustavy je průsečík spojnic vrcholů a protilehlých bodů dotyku kružnice vepsané. (Mimo jiné se tím ukáže, že se tyto tři spojnice protínají v jednom bodě). Označme po řadě $X, Y, Z$ body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$ na stranách $BC$, $AC$, $AB$. Snadno se ověří, že:

$$|AY| = |AZ| = s - a, \quad |BZ| = |BX| = s - b, \quad |CX| = |CY| = s - c$$

(stačí si uvědomit, že $|AY| = |AZ|$, $|BZ| = |BX|$, $|CX| = |CY|$ a dopočítat). Dále je $\frac{m_2}{m_1} = \frac{s-a}{s-b}$, čímž je bod $Z$ podle (♠) těžištěm soustavy $S_Z = \{[A, m_1], [B, m_2]\}$, obdobně je $Y$ těžištěm $S_Y = \{[A, m_1], [C, m_3]\}$ a $X$ těžištěm $S_X = \{[B, m_2], [C, m_3]\}$. Nyní podle (♣) a (♠) těžiště $S = \{[A, m_1], [B, m_2], [C, m_3]\}$ leží na úsečkách $AX$, $BY$, $CZ$. Podle věty (♡) existuje, čímž se úsečky $AX$, $BY$, $CZ$ protínají v jednom bodě $H$, pro který je výraz

$$\frac{|AH|}{|DH|}\frac{(s-b)(s-c)}{(s-a)} + \frac{|BH|}{|EH|}\frac{(s-a)(s-c)}{(s-b)} + \frac{|CH|}{|FH|}\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)}$$

minimální.