Seriál – Teorie grafů

Úvod a základní definice

V mnoha často velmi rozličných příkladech se lze setkat se situacemi, které lze popsat pomocí:
- množiny bodů,
- spojnic mezi některými dvojicemi bodů.

Jmenujme namátkou např. různá dopravní schémata (body mohou značit např. různá města a spojnicí mezi dvěma městy vyznačíme přímá dopravní spojení mezi nimi), elektrické obvody (body budou značit různé elektrické součástky, spojnice budou značit vodivé spoje mezi těmito součástkami), různá společenství lidí (body mohou značit např. všechny studenty MFF UK, mezi dvěma body vyznačíme spojnici, pokud se odpovídající studenti navzájem znají) i naprosto abstraktní situace (body mohou reprezentovat všechna přirozená čísla, spojnici vyznačíme mezi každými dvěma body a a b takovými, že a je dělitelem b). Čtenář jistě vymyslí mnohem více příkladů, než jsme zde uvedli.

Matematickou abstrakcí podobných schémat je pojem *grafu*. Musíme zde čtenáře varovat. Obvykle je v matematice slovo „graf“ používáno ve smyslu „graf funkce“. V letošním seriálu budeme toto slovo používat v naprosto jiném významu. Proto zvláště ze začátku by čtenář měl být na pozoru, aby nedošlo k nedorozumění.

Než však přikročíme k dalšímu výkladu, musíme si pojem grafu přesně vymezit.

Grafem G nazveme každou uspořádanou dvojici (V, E), kde V je libovolná množina a E je množina (několika) dvouprvkových podmnožin[1] množiny V. Prvky množiny V nazýváme *vrcholy* grafu G a prvky množiny E nazýváme *hrany*[2] grafu G.

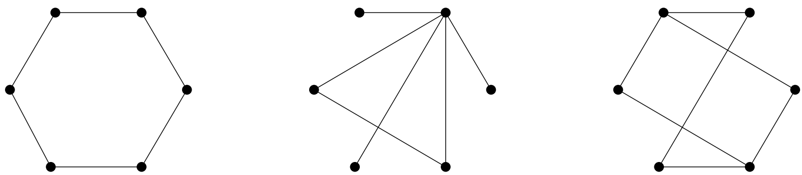
Užitečné bude následující označení. Pro množinu V budeme symbolem $\binom{V}{2}$ značit množinu všech dvouprvkových podmnožin množiny V. Je tedy vidět, že uspořádaná dvojice (V, E) je graf právě tehdy, když $E \subseteq \binom{V}{2}$.

Množinu vrcholů nějakého konkrétního grafu G budeme často značit $V(G)$, podobně množinu jeho hran $E(G)$.

V našem textu budeme uvažovat výlučně grafy s konečnou množinou vrcholů.

Reprezentace grafů

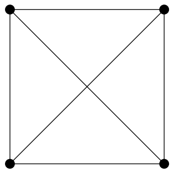
Grafy lze reprezentovat mnoha způsoby. My budeme nejčastěji grafy znázorňovat obrázkem na papíře. Vrcholy budeme zakreslovat jako body (vyznačené puntíky) a každou hranu (jež je dvouprvková množina vrcholů) znázorníme spojením příslušných dvou vrcholů (puntíků) obloukem. Například na následujícím obrázku vidíme znázorněné tři různé grafy o šesti vrcholech.

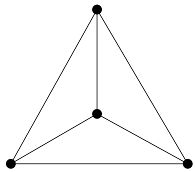


[1] Neboli neuspořádaných dvojic.

[2] Písmena V a E pocházejí z anglických termínů pro vrchol a hranu – *vertex* a *edge*.

Tato reprezentace samozřejmě není jednoznačná. Tentýž graf lze znázornit několika různými obrázky, např. na následujícím obrázku máme znázorněný graf o množině vrcholů $\{1,2,3,4\}$ a množině hran $\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ dvěma odlišnými způsoby.



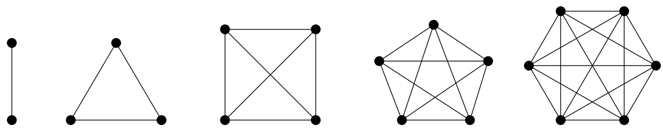


Kreslení obrázků není jediný způsob reprezentace grafů. Ty lze reprezentovat např. mnoha způsoby v paměti počítače[3]. Pro nás je to však způsob velmi názorný, přehledný, a proto také vhodný. Při následujícím výkladu si proto kreslete obrázky, kdykoliv jen to bude možné. Mnoho pojmů nalézá motivaci právě v obrázcích, a proto jejich kreslení napomůže k lepšímu pochopení.

Nejdůležitější grafy

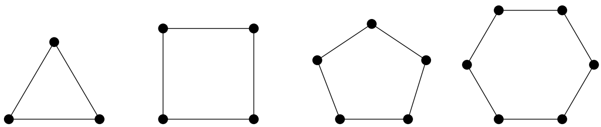
Zavedeme si zde několik nejdůležitějších, v teorii grafů často používaných grafů.

Úplný graf na n vrcholech značíme K_n. Je $V(K_n) = \{1,2,\ldots,n\}$ a $E(K_n) = \binom{V(K_n)}{2}$.



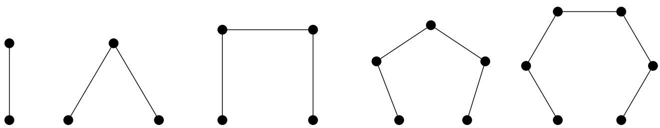
K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

Kružnice na n ($n \geq 3$) vrcholech C_n. Je $V(C_n) = \{1,2,\ldots,n\}$ a $E(C_n) = \{\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{n-1,n\},\{n,1\}\}$.



C_3 C_4 C_5 C_6

Cesta na n vrcholech P_n. Je $V(P_n) = \{1,2,\ldots,n\}$ a $E(P_n) = \{\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{n-1,n\}\}$.



P_2 P_3 P_4 P_5 P_6

Isomorfismus grafů

[3]Nikdo asi nepodezírá dnešní paměti počítače, že jsou založeny na principu kreslení obrázku na papír. :-)

Dva grafy G a G' jsou stejné, pokud mají stejné množiny vrcholů a hran, tedy pokud $V(G) = V(G')$ a $E(G) = E(G')$. Mnoho dvojic grafů se však liší pouze „názvy“ vrcholů, lze pro ně ale nakreslit obrázky, které vypadají stejně (tedy mají různé množiny vrcholů, ale „struktura“ množiny hran na nich je stejná). Pokud bychom vrcholy jednoho grafu „přejmenovali“, dostali bychom stejné grafy. Formálně tedy definujeme isomorfismus dvou grafů takto:

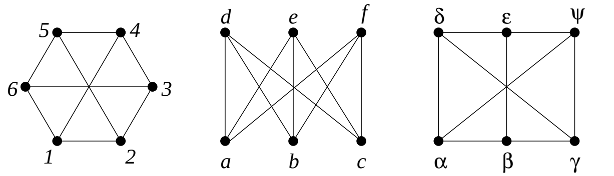
Grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ nazveme *isomorfní*, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f : V \to V'$ takové, že pro každé $x, y \in V$ platí následující vlastnost:

$$\{x, y\} \in E \text{ právě tehdy, když } \{f(x), f(y)\} \in E'.$$

Zobrazení f nazýváme *isomorfismus* mezi grafy G a G'. Skutečnost, že grafy G a G' jsou isomorfní, značíme $G \cong G'$.

Poznámka. Je hned vidět, že relace „být isomorfní“ je ekvivalence na množině všech grafů.

Cvičení 1. Ukážeme si, že grafy na následujícím obrázku jsou isomorfní.



K tomu, abychom to ukázali, stačí najít příslušné isomorfismy – funkce, které zobrazují vrcholy jednoho grafu na vrcholy druhého grafu. Snadno zjistíme, že lze volit např. následující přiřazení (možností je však mnohem více): $1 \leftrightarrow a \leftrightarrow \alpha$, $2 \leftrightarrow d \leftrightarrow \beta$, $3 \leftrightarrow b \leftrightarrow \gamma$, $4 \leftrightarrow e \leftrightarrow \delta$, $5 \leftrightarrow c \leftrightarrow \varepsilon$, $6 \leftrightarrow f \leftrightarrow \psi$. Čtenář již snadno ověří, že právě popsané funkce jsou isomorfismy.

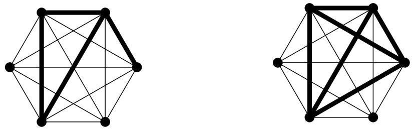
Cvičení 2. (Počet neisomorfních grafů) Na dané n-prvkové množině V existuje právě $2^{\binom{n}{2}}$ různých grafů. Je totiž $\left|\binom{V}{2}\right| = \binom{n}{2}$, a tedy množinu $E \subseteq \binom{V}{2}$ lze volit právě $2^{\left|\binom{V}{2}\right|} = 2^{\binom{n}{2}}$ způsoby (každou potenciální hranu $e \in \binom{V}{2}$ do množiny E buď dáme, nebo nedáme). Najdeme ale mezi nimi velké skupiny grafů, které jsou navzájem isomorfní. My bychom však chtěli najít co nejvíce navzájem neisomorfních grafů. K tomu nám pomůže následující úvaha.

Pro každý graf G s množinou vrcholů V, $|V| = n$, existuje nejvýše $n!$ různých s ním isomorfních grafů se stejnou množinou vrcholů. Každý isomorfismus $f : V \to V$ je totiž permutace na množině V a všech permutací na množině V je $n!$. Odtud je již vidět, že můžeme najít alespoň $\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$ navzájem neisomorfních grafů na n prvkové množině.

Podgrafy

Řekneme, že graf H je *podgrafem* grafu G, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. Řekneme, že graf H je *indukovaným podgrafem* grafu G, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$.

Nyní si vše vysvětlíme na následujícím obrázku:



V levé části obrázku vidíme tučně vyznačený podgraf celého grafu G, v pravé části obrázku vidíme tučně vyznačený indukovaný podgraf celého grafu G. Indukovaný podgraf grafu G vznikne nepřesně řečeno tak, že z grafu G vymažeme některé vrcholy a všechny hrany, které vymazané vrcholy obsahovaly. Pro podgraf můžeme navíc vymazat i některé další hrany, i když nevymažeme žádný z jejich koncových vrcholů.

Podgraf grafu G isomorfní nějaké cestě P_m se nazývá *cesta v grafu* G. Cestu v grafu G lze chápat také jako posloupnost

$$(v_1, e_1, v_2, \dots, e_{m-1}, v_m),$$

kde $v_1, v_2, \dots, v_m$ jsou navzájem různé vrcholy grafu G a pro každé $i = 1, 2, \dots, m-1$ je $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$. Délkou cesty rozumíme počet jejích hran, tedy číslo $m-1$. Číslo m značí počet vrcholů cesty.

Podobně podgraf grafu G isomorfní nějaké kružnici C_m $(m \geq 3)$ se nazývá *kružnice v grafu* G. Kružnici v grafu G lze chápat také jako posloupnost

$$(v_1, e_1, v_2, \dots, v_m, e_m, v_1)$$

(počáteční a koncový vrchol jsou tedy shodné), kde $v_1, v_2, \dots, v_m$ jsou navzájem různé vrcholy grafu G, pro každé $i = 1, 2, \dots, m-1$ je $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ a také $e_m = \{v_m, v_1\} \in E(G)$. Číslo m je délka kružnice.

Cesta v grafu G, která je zároveň indukovaným podgrafem grafu G, se obvykle nazývá *indukovaná cesta* v grafu G. Podobně definujeme *indukovanou kružnici* v grafu G.

Cvičení 3. Jsou-li dva grafy G a H isomorfní, pak mají isomorfní také své podgrafy. Tedy přesněji, ke každému podgrafu G' grafu G existuje podgraf H' grafu H, který je isomorfní podgrafu G' (a naopak). Podobné tvrzení platí pro indukované podgrafy.

Souvislost a komponenty

Řekneme, že vrchol y je *dosažitelný* z vrcholu x v grafu G, pokud graf G obsahuje jako podgraf cestu začínající ve vrcholu x a končící ve vrcholu y. Nechť je dán vrchol x grafu G. Indukovaný podgraf grafu G, jenž obsahuje právě ty vrcholy, které jsou dosažitelné z vrcholu x, nazveme *komponentou* grafu G příslušnou vrcholu x a značíme $K[x]$.

Cvičení 4. Pro dané dva vrcholy x, y grafu G jsou příslušné komponenty $K[x]$ a $K[y]$ buď totožné, nebo disjunktní (neobsahují žádný společný vrchol). První případ nastává právě tehdy, když vrchol y je v grafu G dosažitelný z vrcholu x.

Předchozí cvičení dává jasný smysl následujícím úvahám. Komponenta příslušná vrcholu x v grafu G je také komponentou příslušnou každému svému vrcholu. Proto ji lze nazvat prostě *komponentou* grafu G.

Graf G nazveme *souvislý*, pokud obsahuje jako podgraf jedinou komponentu. V opačném případě nazveme graf G *nesouvislý*. Snadno si rozmyslíme, že graf G je souvislý právě tehdy, když každý vrchol $y \in V(G)$ je dosažitelný z každého vrcholu $x \in V(G)$, jinak řečeno právě tehdy, když pro každé dva vrcholy $x, y \in V(G)$ v grafu G existuje cesta začínající ve vrcholu x a končící ve vrcholu y. Je zřejmé, že pojem komponenty a pojem souvislosti se zachovává při isomorfismu.

Skóre grafu

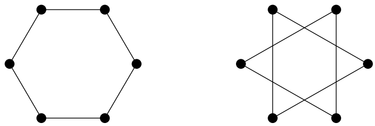
Nechť G je graf a v jeho vrchol. Symbolem $\deg_G(v)$ označíme počet hran grafu G obsahujících vrchol v. Číslo $\deg_G(v)$ nazveme *stupněm* vrcholu v v grafu G.

Označme vrcholy grafu G jako $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (v nějakém libovolně zvoleném pořadí). Posloupnost

$$(\deg_G(v_1), \deg_G(v_2), \ldots, \deg_G(v_n))$$

nazveme *skóre* grafu G. Jelikož jsme pořadí vrcholů grafu G volili libovolně, budeme dvě skóre považovat za stejná, liší-li se pouze pořadím čísel. V tomto smyslu je skóre grafu jednoznačně definováno.

Je snadno vidět, že dva isomorfní grafy mají stejné skóre (jelikož vrcholy odpovídající si při isomorfismu mají stejný stupeň); tudíž dva grafy s různým skóre jsou nutně neisomorfní. Opačná implikace ale zdaleka neplatí, dva grafy se stejným skóre ještě isomorfní být nemusí. Viz např. dva grafy na následujícím obrázku:



Snadno vidíme, že oba grafy na obrázku mají skóre $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$. To, že nejsou isomorfní, lze zdůvodnit několika způsoby. Např. graf v pravé části obrázku obsahuje indukovanou kružnici délky 3, graf v levé části nikoliv (využíváme cvičení 3). Můžeme si také všimnout, že graf v levé části obrázku je souvislý, graf v pravé části nikoliv.

Spolu se zavedením pojmu skóre grafu vyvstává přirozená otázka, které posloupnosti čísel jsou přípustné jako skóre grafu (tedy pro které posloupnosti čísel existuje graf, jehož skóre je stejné jako daná posloupnost). Snadno zjistíme, že ne všechny posloupnosti jsou přípustné. Čísla v posloupnosti zajisté musí být celá a nezáporná. Má-li graf G n vrcholů, pak každý vrchol má stupeň nejvýše $n-1$. Může totiž být spojen hranou pouze s ostatními $n-1$ vrcholy. V přípustné posloupnosti tedy musí být každé číslo menší než počet jejích členů. Další jednoduché, ale velmi důležité a v mnoha situacích užívané kritérium je obsaženo v následující větě.

Věta 1. *(Princip sudosti) Pro každý (konečný) graf $G = (V, E)$ platí*

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$

Speciálně je tedy součet stupňů všech vrcholů sudé číslo.

Důkaz. Stupeň vrcholu v udává počet hran G, které obsahují vrchol v. Přitom každá hrana obsahuje právě dva vrcholy; sečteme-li tedy stupně všech vrcholů, dostaneme dvojnásobek počtu všech hran.

Jako důsledek dostáváme pozorování, že počet vrcholů lichého stupně je v každém (konečném) grafu G sudý.

Všechny výše uvedené podmínky včetně principu sudosti stále nedávají charakterizaci posloupností, které jsou skóre nějakého grafu. (Snadno si rozmyslíme, že např. posloupnost $(3,3,3,1)$ není skóre žádného grafu.) Jednoduchý postup, jak o dané posloupnosti rozhodnout, zda je skórem nějakého grafu, je obsažen v následující větě.

Věta 2. *(Havlova) Nechť $D=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ je posloupnost přirozených čísel. Předpokládejme, že $d_1\le d_2\le\cdots\le d_n\le n-1$. Označme symbolem D' posloupnost $(d'_1,d'_2,\ldots,d'_{n-1})$, kde*

$$d'_i=\begin{cases} d_i & \text{pro } i<n-d_n,\\ d_i-1 & \text{pro } i\ge n-d_n.\end{cases}$$

(Tedy posloupnost D' z posloupnosti D vznikne tak, že poslední člen d_n posloupnosti D vynecháme a zbylých největších d_n členů posloupnosti D zmenšíme o jedničku.) Potom posloupnost D je skóre grafu právě tehdy, když posloupnost D' je skóre grafu.

Důkaz. Jedním směrem je tvrzení snadné dokázat. Předpokládejme, že posloupnost D' je skóre grafu $G'=(V',E')$, kde $V'=\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}\}$ a $\deg_{G'} v_i=d'_i$. Zvolme si nový vrchol v_n různý od vrcholů $v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}$ a definujme graf $G=(V,E)$, kde

$$\begin{aligned} V&=V'\cup\{v_n\}\\ E&=E'\cup\{\{v_i,v_n\};i=n-d_n,n-d_n+1,\ldots,n-1\}\end{aligned}$$

(nepřesně řečeno, nový vrchol spojíme s posledními d_n vrcholy grafu G'). Je zřejmé, že skóre grafu G je právě D.

Zbývá dokázat druhou, těžší implikaci. Předpokládejme tedy, že D je skóre nějakého grafu. Uvažme množinu $\mathcal{G}$ všech grafů G na množině vrcholů $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ takových, že $\deg_G(v_i)=d_i$. Dokážeme následující lemma:

Lemma 1. V množině $\mathcal{G}$ existuje graf G_0 takový, že vrchol v_n je spojen právě s vrcholy $v_{n-1},v_{n-2},\ldots,v_{n-d_n}$.

Než toto lemma dokážeme, uvědomme si, že z něho již naše tvrzení plyne. Uvážíme-li totiž graf, který z grafu G_0 z lemmatu vznikne odebráním vrcholu v_n a všech hran vycházejících z v_n, dostaneme zřejmě graf, jehož skóre je D'. Nyní předvedeme důkaz lemmatu.

Důkaz. Pokud $d_n=n-1$, pak je vrchol v_n v každém grafu $G\in\mathcal{G}$ spojen se všemi ostatními vrcholy a jako G_0 tedy můžeme vzít libovolný z grafů z množiny $\mathcal{G}$. V opačném případě pro každý graf $G\in\mathcal{G}$ definujeme číslo $j(G)$ následujícím způsobem. Podíváme se, do kterých vrcholů vedou v G hrany z vrcholu v_n, a zvolíme $j(G)$ rovno největšímu přirozenému číslu $k<n$, pro které v grafu G vrchol v_k není spojen hranou s vrcholem v_n. Vždy je zřejmě $j(G)\ge n-d_n-1$. Buď $G_0\in\mathcal{G}$ graf (resp. jeden z grafů, je-li jich více), pro nějž je $j(G)$ nejmenší možné. Dokážeme, že $j(G_0)=n-d_n-1$, z čehož již bude zřejmé, že G_0 je náš hledaný graf.

Předpokládejme tedy pro spor, že $j=j(G_0)>n-d_n-1$. Ukážeme, že pak existuje graf $G\in\mathcal{G}$, pro který $j(G)<j(G_0)$, což bude spor s minimalitou $j(G_0)$. V grafu G_0 tedy vrchol v_n není spojen hranou s vrcholem v_j. Jelikož $\deg_{G_0}(v_n)=d_n$, existuje $i<j$ takové, že vrchol v_n je spojen hranou s vrcholem v_i. Víme, že $\deg_{G_0}(v_j)=d_j\ge d_i=\deg_{G_0}(v_i)$. Vrchol v_j tedy nemá menší stupeň než vrchol v_i; navíc $\{v_j,v_n\}$ není hrana grafu G_0, zatímco $\{v_i,v_n\}$ je. Je tedy zřejmé, že existuje vrchol v_k takový, že $\{v_j,v_k\}$ je hrana grafu G_0, zatímco $\{v_i,v_k\}$ není. Nyní z grafu G_0 vytvoříme graf G' následujícím způsobem (nakreslete si obrázek). Z grafu G_0 odebereme hrany $\{v_i,v_n\}$ a $\{v_j,v_k\}$ a nahradíme je hranami $\{v_i,v_k\}$ a $\{v_j,v_n\}$. Je zřejmé, že

stupně všech vrcholů jsou v grafu G' stejné jako v grafu G_0, a tedy $G' \in \mathcal{G}$. Navíc je hned vidět, že $j(G') < j = j(G_0)$. Dostali jsme spor s minimalitou $j(G_0)$. Tím je důkaz lemmatu i celé věty hotov.

Cvičení 5. Ukážeme, že posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 5)$ není skóre žádného grafu, zatímco posloupnost $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5)$ je skóre grafu. V obou případech postupujeme podle věty 2.

V prvním případě je posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 5)$ podle věty 2 skóre grafu právě tehdy, když je skóre grafu posloupnost $(0, 1, 3, 3, 3)$. Opětovným použitím věty 2 dostaneme posloupnost $(0, 0, 2, 2)$. Ta zřejmě není skórem grafu, protože z prvního vrcholu může vést hrana pouze do druhého vrcholu (ostatní vrcholy mají skóre 0). První vrchol tedy nemůže mít stupeň 2.

Ve druhém případě podobným způsobem dostaneme po řadě posloupnosti $(1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4)$, $(1, 1, 1, 0, 0, 1, 2)$ (tu si můžeme přerovnat podle velikosti na $(0, 0, 1, 1, 1, 1, 2)$), $(0, 0, 1, 1, 0, 0)$ (po přerovnání podle velikosti $(0, 0, 0, 0, 1, 1)$) a $(0, 0, 0, 0, 0)$. Poslední posloupnost je skóre grafu – grafu s pěti vrcholy a žádnou hranou. Věta 2 nám dává také návod, jak najít příklad grafu s daným skóre.

Seriál – Teorie grafů

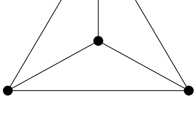
Jednotažky – eulerovské grafy

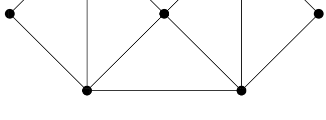
Dnešní díl seriálu začneme řešením jedné z nejstarších úloh týkajících se teorie grafů. Úkolem je nakreslit daný graf G jedním uzavřeným tahem, tj. bez zvedání tužky z papíru, přičemž každá hrana je obtahována právě jednou. Tuto úlohu si nejdříve matematicky formalizujeme.

Posloupnost vrcholů a hran $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{m-1}, v_m)$ v grafu G takovou, že $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, m-1$, nazýváme *sledem* v grafu G. V případě, že se v této posloupnosti neopakují hrany, nazýváme ji *tahem* v grafu G. Sled (resp. tah) v grafu G, pro který $v_1 = v_m$, nazýváme *uzavřeným* sledem (resp. tahem) v grafu G. Uzavřený tah, který obsahuje všechny vrcholy a hrany grafu G, nazýváme *uzavřeným eulerovským tahem* v grafu G. Graf G nazýváme *eulerovský*, pokud v něm existuje uzavřený eulerovský tah.

Poznámka. Všimněme si, že podle definice z minulého dílu seriálu je tah v grafu G, ve kterém se neopakují vrcholy, také cestou v grafu G. Uzavřený tah v grafu G, ve kterém se neopakují vrcholy (s výjimkou prvního a posledního), je také kružnicí v grafu G.

Na následujícím obrázku nalezneme vlevo příklad grafu, který není eulerovský, vpravo příklad grafu, který eulerovský je. Čtenář si tento fakt jistě snadno ověří a nalezne mnoho dalších příkladů eulerovských i neeulerovských grafů.





Základní otázka je, jak pro daný graf G určit, zda je eulerovský (tedy, zda ho lze nakreslit jedním uzavřeným tahem). Než tuto otázku zodpovíme, dokážeme si jedno pomocné lemma.

Lemma 2. Nechť v grafu G existuje sled (resp. tah) začínající ve vrcholu x a končící ve vrcholu y. Pak v grafu G existuje také cesta začínající ve vrcholu x a končící ve vrcholu y.

Důkaz. Každý tah je zároveň sled, nechť tedy v grafu G existuje nějaký sled začínající ve vrcholu x a končící ve vrcholu y. V tomto sledu se mohou opakovat vrcholy i hrany. Uvažujme tedy takový sled $S = (v_1, e_1, v_2, e_2 \ldots, e_{m-1}, v_m)$ začínající ve vrcholu x a končící ve vrcholu y, který obsahuje nejmenší možný počet hran (pokud je takových sledů více, uvažujeme libovolný z nich). Ukážeme, že tento sled je již cesta. Předpokládejme pro spor, že ve sledu S se opakuje nějaký vrchol, tedy nechť $v_k = v_l$ pro nějaké $k < l$. Pak ale sled S lze zkrátit na sled $S' = (v_1, e_1, \ldots, e_{k-1}, v_k = v_l, e_l, \ldots, e_{m-1}, v_m)$, což je spor s volbou sledu S. Dokázali jsme tedy, že ve sledu S se nemohou opakovat vrcholy. Podobně se ve sledu S nemohou opakovat hrany. Kdyby se ve sledu S opakovala nějaká hrana, opakoval by se také alespoň jeden její koncový vrchol. Dokázali jsme tedy, že S je cesta.

Věta 3. *(Charakterizace eulerovských grafů) Graf G je eulerovský právě tehdy, když je souvislý a každý jeho vrchol má sudý stupeň.*

Důkaz. Začneme důkazem jednodušší implikace. Předpokládejme tedy, že graf G je eulerovský. Ukážeme, že je také souvislý. Mějme nějaké dva vrcholy x a y grafu G. Ukážeme, že mezi nimi existuje cesta. Eulerovský tah T v grafu G prochází všemi vrcholy, tedy i vrcholy x a y. Omezíme-li se na úsek T mezi vrcholy x a y, zjišťujeme, že v grafu G existuje tah začínající ve vrcholu x a končící ve vrcholu y. Podle lemmatu 2 mezi těmito vrcholy existuje také cesta. Každé dva vrcholy grafu G jsou tedy v téže komponentě, a graf G je tedy souvislý. Musíme ještě ukázat, že v grafu G má každý vrchol x sudý stupeň. To je také z obrázku jasné – kreslíme-li graf G podle uzavřeného eulerovského tahu T, tak vždy když vstoupíme nějakou hranou do vrcholu x, bezprostředně poté ho jinou hranou opustíme. Jelikož hrany se v eulerovském tahu neopakují, nakreslili jsme sudý počet hran sousedících s vrcholem x. Čtenáři vybavenému touto myšlenkou již zajisté nečiní větší potíže úvahu matematicky formalizovat.

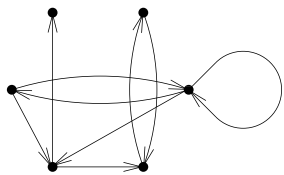
Nyní musíme dokázat obtížnější implikaci. Předpokládejme, že máme souvislý graf G, který má sudé stupně všech svých vrcholů. Zvolme si libovolný vrchol x grafu G. Uvažujme nejdelší tah (tedy tah obsahující největší počet hran) T v grafu G, který začíná ve vrcholu x (takový určitě existuje alespoň jeden – hran v grafu G je konečný počet – pokud jich existuje více, vybereme si libovolný z nich). Ukážeme, že tah T je již eulerovský. Nejdříve ukážeme, že T je uzavřený tah. Předpokládejme, že tah T končí ve vrcholu $y \neq x$. Pak vrchol y je tahem T několikrát navštíven (přičemž tah T jednou hranou do vrcholu y vstoupí a jinou hranou ho opustí), až v něm tah T nakonec skončí (jednou hranou do něj vstoupí). Celkem tedy vidíme, že tah T používá lichý počet hran sousedících s vrcholem y. Jelikož však vrchol y má v grafu G sudý stupeň, musí existovat hrana e sousedící s vrcholem y, která se v tahu T nevyskytuje. Pak ale lze tah T o hranu e prodloužit. To je spor s maximalitou délky tahu T. Tah T je tedy uzavřený. Ukážeme, že tah T používá všechny hrany grafu G a je tedy eulerovský (díky souvislosti grafu G musí pak navštívit i všechny vrcholy grafu G). Pro spor předpokládejme, že existuje hrana grafu G, která není obsažena v tahu T. Uvažujme graf G', který vznikne z grafu G vymazáním všech hran tahu T (vrcholy ponecháme všechny). Všimněme si, že v grafu G' jsou také stupně všech vrcholů sudé (u každého vrcholu jsme totiž smazali sudý počet hran). Určitě existuje komponenta K grafu G', která obsahuje alespoň jednu hranu. Ukážeme, že komponenta K obsahuje vrchol z, který je obsažen v tahu T. Kdyby tomu tak nebylo, pak by v grafu G neexistovala hrana spojující vrchol navštíveny tahem T s vrcholem komponenty K. Nemohla by tedy ani existovat cesta z žádného vrcholu komponenty K do (např.) vrcholu x. Dostali bychom spor se souvislostí grafu G. Uvažujme tedy takový vrchol z a uvažujme nějaký tah T' maximální délky, který začíná ve vrcholu z a používá pouze hran komponenty K grafu G'. Jelikož komponenta K obsahuje alespoň jednu hranu, obsahuje tah T' také alespoň jednu hranu. Jelikož všechny stupně vrcholů v grafu G' jsou sudé, dokážeme snadno, že tah T' je uzavřený (podobně jako v případě tahu T). Tah T alespoň jednou navštíví vrchol z. Modifikujme tedy tah T následovně. Začneme ve vrcholu x a ve chvíli, kdy poprvé navštívíme vrchol z, začneme pokračovat podle tahu T' v komponentě K. Až obejdeme celý tah T' a vrátíme se do vrcholu z, budeme pokračovat podle tahu T a vrátíme se do vrcholu x. Tím jsme tah T prodloužili o tah T', který obsahuje alespoň jednu hranu. Dostali jsme spor s maximalitou délky tahu T. Dokázali jsme tedy, že tah T je eulerovský.

Eulerovské orientované grafy

Všechny pojmy, které jsme doposud zkoumali, se týkaly *neorientovaných* grafů – hrany takových grafů nemají začátek a konec. Pouze spojují příslušnou dvojici vrcholů. V mnoha situacích je vhodné definovat pojem *orientovaného* grafu. Neformálně řečeno, každé hraně je přiřazena nějaká orientace – tedy je určeno, který ze spojených vrcholů je počáteční a který koncový. Na obrázku tuto skutečnost obvykle znázorňujeme šipkou. Formálně lze orientovaný graf definovat např. takto:

Orientovaným grafem nazveme každou uspořádanou dvojici (V, E), kde V je libovolná množina a E je množina (několika) uspořádaných dvojic prvků množiny V (tedy $E \subseteq V \times V$). Prvky množiny V nazýváme *vrcholy* grafu G a prvky množiny E nazýváme (*orientované*) *hrany* grafu G. Pro hranu $e = (x, y) \in E$ grafu G nazýváme vrchol x *počátečním* vrcholem hrany e a vrchol y *koncovým* vrcholem hrany e.

Příklad orientovaného grafu vidíme na následujícím obrázku. Všimněme si, že v *naší* definici připouštíme, aby mezi dvěma vrcholy orientovaného grafu vedly hrany oběma směry a dokonce aby orientovaný graf obsahoval orientovanou hranu, jejíž počáteční a koncový vrchol se shodují[4].



Mnoho pojmů definovaných pro neorientované grafy lze přirozeným způsobem rozšířit pro grafy orientované. My si to zde ukážeme na pojmu eulerovského grafu. Nejdříve však musíme zobecnit několik základnějších pojmů.

Je celkem přirozené definovat *orientovaný sled* v grafu G jako posloupnost

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_m, v_m),$$

přičemž v_i jsou vrcholy grafu G a $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ jsou hrany grafu G. Podobným způsobem definujeme pojem *orientovaného tahu* (přidáme navíc podmínku $e_i \neq e_j$ pro $i \neq j$), *orientované cesty* ($v_i \neq v_j$ pro $i \neq j$) a orientované kružnice. Všimněme si tedy, že v orientovaném sledu (resp. tahu, cestě, kružnici) jsou všechny hrany orientovány „ve stejném směru“ – tedy „po směru kreslení“.

Řekneme, že orientovaný graf G je *eulerovský*, pokud v něm existuje uzavřený orientovaný tah, který obsahuje každou hranu grafu G právě jednou a každý vrchol grafu G alespoň jednou.

[4]Taková hrana se obvýkle nazývá *smyčka*.

Tedy neformálně, eulerovský graf lze nakreslit na papíře jedním tahem tak, že každou hranu kreslíme ve směru její orientace (a právě jednou).

Nyní budeme směřovat k charakterizaci orientovaných eulerovských grafů (velmi podobné neorientovanému případu). Nejdříve si musíme zavést ještě několik pojmů.

Pro daný vrchol v orientovaného grafu G označíme $\deg_G^+(v)$ počet orientovaných hran v grafu G, jejichž koncový vrchol je právě vrchol v. Podobně označíme $\deg_G^-(v)$ počet orientovaných hran v grafu G, jejichž počáteční vrchol je právě vrchol v. Číslo $\deg_G^+(v)$ nazýváme *vstupní stupeň* vrcholu v v grafu G, číslo $\deg_G^-(v)$ nazýváme *výstupní stupeň* vrcholu v v grafu G. Pokud pro každý vrchol v grafu G platí $\deg_G^+(v) = \deg_G^-(v)$, nazýváme orientovaný graf G *vyvážený*.

Každému orientovanému grafu $G = (V, E)$ lze přiřadit neorientovaný graf (nazývaný *symetrizace* grafu G) $\mathrm{sym}(G) = (V, \overline{E})$, kde

$$\overline{E} = \{\{x, y\}, x \neq y \text{ a } (x, y) \in E \text{ nebo } (y, x) \in E\}$$

(Symetrizace grafu G tedy vznikne tak, že v orientovaném grafu G vynecháme všechny smyčky a ze všech hran umažeme šipky – pokud mezi dvěma vrcholy vedou hrany oběma směry, pak ponecháme jen jednu).

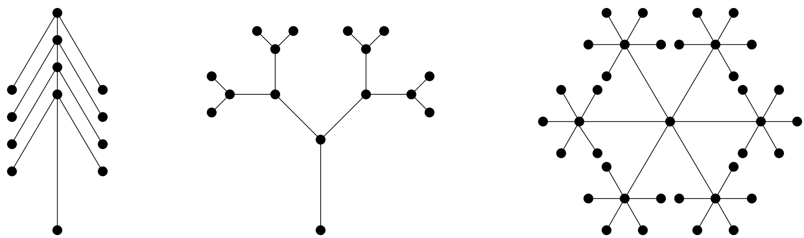
Nyní již můžeme zformulovat větu charakterizující orientované eulerovské grafy.

Věta 4. *(Charakterizace orientovaných eulerovských grafů) Orientovaný graf G je eulerovský právě tehdy, když je vyvážený a jeho symetrizace* $\mathrm{sym}(G)$ *je souvislý graf.*

Důkaz tohoto tvrzení je analogický důkazu věty 3 a je proto přenechán čtenáři (jako součást 5. úlohy seriálu).

Stromy

Nyní se již vrátíme k neorientovaným grafům. Budeme se zabývat problematikou stromů. Každý čtenář se jistě setkal s nějakým stromem v přírodě. V teorii grafů se stromem rozumí graf, který vypadá podobně jako na následujících obrázcích:



Jsou to (nepřesně vyjádřeno) grafy, které zachycují „proces větvení bez následného spojování". Čtenář si jistě dovede představit motivaci, která dala vzniknout názvu pro tyto grafy. Přesně lze pojem stromu definovat mnoha rozdílnými způsoby. My si nakonec dokážeme pět rozdílných charakteristik tohoto pojmu. Nejdříve si ale uvedeme následující definici.

Konečný graf T nazveme *strom*[5], pokud je souvislý a neobsahuje kružnici jako svůj podgraf.

Poznámka. Všimněme si, že každá cesta je strom.

[5] V teorii grafů je obvyklé značit stromy písmenem T (z anglického výrazu „tree").

Vrchol v stromu T nazveme *list*, pokud $\deg_G(v) = 1$. Nyní můžeme zformulovat jednoduché pozorování:

Lemma 3. Každý strom T s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva listy.

Důkaz. Uvažme všechny cesty v grafu T a vyberme z nich tu cestu $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_m, v_m)$, která má největší možnou délku (pokud existuje takových cest více, vybereme si libovolnou z nich). Jelikož strom T má alespoň dva vrcholy, má také alespoň jednu hranu (jinak by nebyl souvislý) , a tudíž i cesta P má délku alespoň 1 a obsahuje alespoň dva vrcholy. Tedy $m > 0$ a $v_m \neq v_0$. Tvrdíme, že vrcholy v_0 a v_m jsou listy stromu T. To lze nahlédnout např. sporem. Pokud např. vrchol v_m není list, pak $\deg_G(v_m) \geq 2$, a tedy existuje ještě vrchol $v_{m+1} \neq v_{m-1}$ takový, že $e_{m+1} = \{v_m, v_{m+1}\}$ je hrana stromu T. Nyní stačí nahlédnout, že vrchol v_{m+1} není vrchol cesty P. Kdyby pro nějaké $i < m - 1$ bylo $v_i = v_{m+1}$, pak by strom T obsahoval kružnici $(v_i, e_{i+1}, \ldots, e_m, v_m, e_{m+1}, v_{m+1})$. To však podle definice stromu není možné. Je tedy vidět, že $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_m, v_m, e_{m+1}, v_{m+1})$ je cesta v grafu T, která je delší než cesta P. To je spor s definicí cesty P. Ukázali jsme tedy, že vrchol v_m je nutně list stromu T. Analogicky ukážeme, že i vrchol v_0 je list stromu T.

Je-li G graf a v jeho vrchol, budeme symbolem $G - v$ značit graf, který vznikne z grafu G vynecháním vrcholu v a všech hran, které vrchol v obsahují. Podobně je-li G graf a e jeho hrana, budeme symbolem $G - e$ značit graf, který vznikne z grafu G vynecháním hrany e.

Lemma 4. (Postupná výstavba stromů) Buď G graf a v vrchol grafu G stupně 1. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) G je strom.

(ii) $G - v$ je strom.

Důkaz není těžký a přenecháváme jej čtenáři (jako součást 4. úlohy seriálu).

Důsledkem tohoto lemmatu (spolu s lemmatem 3) je, že každý strom lze postupným odebíráním listů zredukovat až na graf obsahující jediný vrchol. Naopak také vidíme, že každý strom lze získat postupným připojováním listů ke grafu obsahujícímu jediný vrchol.

Věta 5. *(Charakterizace stromů) Buď $G = (V, E)$ konečný graf. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) G je strom.

(ii) Pro každé dva vrcholy $x, y \in V$ existuje právě jedna cesta v grafu G začínající ve vrcholu x a končící ve vrcholu y.

(iii) Graf G je souvislý a vynecháním libovolné hrany vznikne nesouvislý graf.

(iv) Graf G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany vznikne graf kružnici obsahující.

(v) Graf G je souvislý a platí $|V| = |E| + 1$.

Důkaz. Dokážeme postupně několik implikací, ze kterých již bude plynout celková ekvivalence všech podmínek.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Nechť G je strom. Pak graf G je souvislý a pro každé dva jeho vrcholy x a y existuje alespoň jedna cesta začínající v x a končící v y. Předpokládejme pro spor, že v grafu G existují dva vrcholy x a y, pro které existují dvě různé cesty P_1 a P_2 začínající ve vrcholu x a končící ve vrcholu y. Kdyby cesty P_1 a P_2 neobsahovaly žádné společné vrcholy kromě vrcholů x a y, pak by dohromady tvořily kružnici v grafu G. Může se nám ale stát, že cesty P_1 a P_2 obsahují nějaké společné vrcholy. Kružnici v grafu G tedy musíme najít šikovněji. Jelikož cesty P_1 a P_2 jsou různé, existuje vrchol z cesty P_1, který není obsažen v cestě P_2. Na úseku cesty P_1 mezi vrcholy x a z existuje poslední vrchol (tedy vrchol nejblíže vrcholu z, který je společným vrcholem cest P_1 a P_2 – označme ho u. Analogicky na úseku cesty P_1 mezi vrcholy z a y označme v první vrchol (tedy vrchol nejblíže vrcholu z), který je společným vrcholem cest P_1 a P_2. Nyní je již zřejmé, že úseky cest P_1 a P_2 mezi vrcholy u a v neobsahují kromě krajních vrcholů žádné další společné vrcholy a tvoří dohromady kružnici v grafu G. To je spor s předpokladem, že graf G je strom.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*. Nechť v grafu G existuje mezi každými dvěma vrcholy právě jedna cesta. Pak graf G je zřejmě souvislý. Odebereme-li z grafu G hranu $e = \{x, y\}$, pak zřejmě vrcholy x a y byly v grafu G spojeny jedinou cestou (x, e, y), a tedy v grafu $G - e$ již žádnou cestou spojeny nejsou. Graf $G - e$ je tedy nesouvislý.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)*. Nechť graf G je souvislý a vynecháním libovolné hrany vznikne nesouvislý graf. Ukážeme, že v grafu G neexistuje kružnice. Pro spor předpokládejme, že graf G obsahuje kružnici C. Nechť $e = \{x, y\}$ je libovolná hrana této kružnice. Ukážeme, že graf $G - e$ je souvislý, tedy že každé dva vrcholy u, v grafu G jsou spojeny cestou v grafu $G - e$. Jelikož graf G je souvislý, jsou v něm vrcholy u a v spojeny nějakou cestou P. Pokud cesta P neobsahuje hranu e, pak spojuje vrcholy u a v i v grafu $G - e$. Pokud P obsahuje hranu e, tak lze hranu e nahradit cestou, která vznikne z kružnice C vypuštěním hrany e. Tím dostaneme sled P' začínající ve vrcholu u a končící ve vrcholu v v grafu $G - e$. Podle Lemmatu 2 jsou vrcholy u a v v grafu $G - e$ spojeny také cestou. Dokázali jsme tedy, že graf G neobsahuje kružnici. Musíme ještě dokázat, že přidáním libovolné hrany ke grafu G vznikne graf, který kružnici obsahuje. Přidejme tedy ke grafu G hranu $\{x, y\}$, která v grafu G nebyla obsažena. Víme, že vrcholy x a y jsou v grafu G spojeny cestou P. Cesta P spolu s hranou $\{x, y\}$ tvoří kružnici ve vzniklém grafu.

(iv) $\Rightarrow$ *(i)*. Nechť graf G neobsahuje kružnici a přidáním libovolné hrany vznikne graf kružnici obsahující. Zřejmě stačí ukázat, že graf G je souvislý. Pro spor předpokládejme, že graf G je nesouvislý. Pak tedy existují dva vrcholy u a v grafu G, které nejsou v grafu G spojené cestou. Speciálně tedy $e = \{u, v\}$ není hrana grafu G. Graf $G + e$ vzniklý přidáním hrany e ke grafu G podle předpokladů obsahuje kružnici C. Jelikož graf G neobsahuje kružnici, musí kružnice C obsahovat hranu e, kterou jsme přidali. Kružnice C tedy prochází vrcholy u a v, které na ní sousedí. Vidíme, že odstraněním hrany e z této kružnice dostáváme cestu, která v grafu G spojuje vrcholy u a v. Tím dostáváme kýžený spor.

(i) $\Leftrightarrow$ *(v)*. Toto tvrzení dokážeme matematickou indukcí podle počtu vrcholů grafu G. Nechť nejdříve graf G obsahuje jediný vrchol v. Pak zřejmě graf G je strom a tvrzení *(i)* platí. Stejně tak $|V| = 1$, $|E| = 0$ a tvrzení *(v)* také platí. Nyní tedy předpokládejme, že $n \geq 2$ a že dokazovaná ekvivalence platí pro všechny grafy s méně než n vrcholy. Dokážeme ji pro grafy mající právě n vrcholů.

Dokážeme nejdříve implikaci zleva doprava. Předpokládejme tedy, že graf G je strom. Podle lemmatu 3 existuje vrchol v grafu G, jehož stupeň je 1. Podle lemmatu 4 je také graf $G - v$ strom. Všimněme si, že graf $G - v$ má o jeden vrchol a o jednu hranu méně než graf G. Pro graf $G - v$ z indukčního předpokladu víme, že platí ekvivalence *(i)* $\Leftrightarrow$ *(v)*. Jelikož graf $G - v$ je strom, dostáváme podle *(v)* $|V(G - v)| = |E(G - v)| + 1$. Jelikož graf G má o jeden vrchol a o jednu hranu více než graf $G - v$, snadno vidíme, že jsme dokázali i $|V(G)| = |E(G)| + 1$, což jsme chtěli.

Nyní dokážeme implikaci zprava doleva. Předpokládejme tedy, že graf G je souvislý a platí $|V(G)| = |E(G)| + 1$. Jelikož G má alespoň dva vrcholy a je souvislý, neexistuje v něm vrchol stupně 0. Předpokládejme, že by všechny vrcholy grafu G měly stupeň alespoň dva. Víme, že platí $|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) \geq \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} 2 = |V(G)|$. To je spor s rovností $|V(G)| = |E(G)| + 1$.

Dokázali jsme tedy, že v grafu G musí existovat vrchol v stupně 1. Graf $G - v$ má o jeden vrchol a o jednu hranu méně než graf G, a splňuje tedy $|V(G - v)| = |E(G - v)| + 1$. Podle indukčního předpokladu dostáváme, že graf $G - v$ je strom, a podle lemmatu 4, že i graf G je strom. Tím je důkaz hotov.

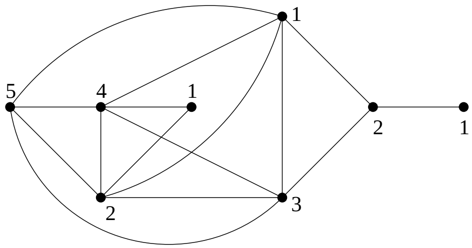
Seriál – Teorie grafů

Barevnost grafu

Dnešní díl seriálu začneme zkoumáním jisté vlastnosti grafů – barevnosti. Mějme (neorientovaný) graf G. Jde o problém obarvit vrcholy grafu G několika barvami tak, aby vrcholy spojené hranou měly různou barvu. Řešení tohoto problému je jednoduché – stačí obarvit každý vrchol jinou barvou. Většinou je však cílem použít *co nejmenší* počet barev. Barvy budeme většinou označovat přirozenými čísly. Uvedeme si nyní formální definici.

Nechť G je graf. *Obarvením* grafu G pomocí k barev rozumíme každou funkci $u : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ takovou, že jsou-li x a y vrcholy grafu G spojené hranou, pak $u(x) \neq u(y)$. *Barevností* grafu G rozumíme nejmenší přirozené číslo k, pro které existuje obarvení grafu G pomocí k barev. Značíme[6] ji $\chi(G)$.

Na následujícím obrázku vidíme obarvení grafu pomocí pěti barev.



Jak jsme si již uvědomili, graf G lze obarvit pomocí $|V(G)|$ barev, definice barevnosti je tedy korektní. Zároveň vidíme snadnou nerovnost $\chi(G) \leq |V(G)|$.

Určit barevnost obecného grafu je algoritmicky těžká otázka. Není znám žádný efektivní (tj. polynomiálně rychlý v závislosti na velikosti vstupu) algoritmus[7], který by pro zadaný graf určil jeho barevnost. Nicméně pro některé speciální třídy grafů lze určit barevnost snadno. Začneme následujícím velmi jednoduchým cvičením.

Cvičení 6. Pro úplný graf K_n platí $\chi(K_n) = |V(K_n)| = n$. Naopak, platí-li pro nějaký graf G rovnost $\chi(G) = |V(G)|$, pak G je isomorfní grafu K_n pro $n = |V(G)|$.

Obě tvrzení jsou jednoduchá. Je-li f obarvení grafu K_n pomocí k barev, pak jelikož každé dva vrcholy grafu K_n jsou spojeny hranou, musí být podle definice obarvení funkce f prostá

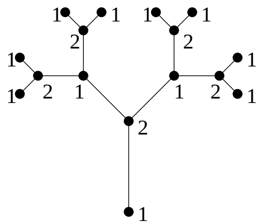
[6] V angličtině se pro barevnost grafu používá termín „chromatic number“ – odtud i značení řeckým písmenem „chí“.

[7] Pro znalce problematiky výpočetní složitosti poznamenejme, že se jedná o tzv. NP-úplnou úlohu.

(neexistují dva vrcholy, které by mohly být obarveny stejnou barvou), a tedy zřejmě $k \geq n$. Dostáváme tedy $\chi(K_n) = n$. Naopak předpokládejme, že pro nějaký graf G platí $\chi(G) = |V(G)|$. Předpokládejme pro spor, že v grafu G existují dva vrcholy x a y, které nejsou spojené hranou. Pak zkonstruujeme funkci f, která vrcholům x a y přiřadí číslo 1 a zbylým vrcholům přiřadí navzájem různá přirozená čísla $2, 3, \ldots, |V(G)| - 1$. Zřejmě f je obarvení grafu G, a tedy $\chi(G) \leq |V(G)| - 1$, což je spor. V grafu G tedy musí být každé dva vrcholy spojené hranou a graf G je tedy isomorfní grafu K_n pro $n = |V(G)|$.

Vidíme tedy, že úplné grafy jsou grafy s „největší možnou" barevností (pro pevný počet vrcholů). Následující věta částečně vystihuje opačný extrém.

Věta 6. *(Barevnost stromů) Buď T strom s alespoň dvěma vrcholy. Pak $\chi(T) = 2$.*



Důkaz. Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň jednu hranu (viz např. věta 5 (v)). Vrcholy spojené touto hranou nemohou mít stejnou barvu, a tedy zřejmě $\chi(T) \geq 2$. Opačnou nerovnost dokážeme matematickou indukcí podle počtu vrcholů stromu T. Pokud má strom T dva vrcholy, pak máme $\chi(T) \leq |V(T)| = 2$. Předpokládejme, že jsme nerovnost $\chi(T) \leq 2$ dokázali pro všechny stromy o $k-1$ vrcholech, a mějme strom T s k vrcholy ($k \geq 3$). Podle lemmatu 3 obsahuje strom T list v, ten je spojen s právě jedním dalším vrcholem w stromu T. Podle lemmatu 4 je graf $T - v$ také strom. Podle indukčního předpokladu lze strom $T - v$ obarvit dvěma barvami. Jelikož vrchol v sousedí v grafu T pouze s vrcholem w, lze ho obarvit opačnou barvou, než jakou barvou jsme obarvili vrchol w v grafu $T - v$ a dostaneme obarvení grafu T dvěma barvami. Je tedy $\chi(T) \leq 2$ a důkaz je hotov.

Definujme nyní širší třídu grafů, pro které dokážeme, že mají barevnost nejvýše dva.

Graf $G = (V, E)$ nazveme *bipartitní*, pokud existují dvě disjunktní množiny V_1 a V_2, $V_1 \cup V_2 = V$ takové, že každá hrana $e \in E$ splňuje $|e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$. Tedy každá hrana grafu G spojuje nějaký vrchol množiny V_1 s vrcholem množiny V_2 a neexistují hrany spojující vrcholy ze stejné množiny.

Věta 7. *(Charakterizace bipartitních grafů) Nechť G je graf. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Graf G je bipartitní.

(ii) $\chi(G) \leq 2$.

(iii) Graf G neobsahuje jako svůj podgraf kružnici liché délky.

Důkaz této věty přenecháváme čtenáři (jako součást 7. úlohy seriálu).

Chromatický polynom

Dostáváme se k zajímavé grafové charakteristice. Mějme dán pevný graf G, přirozené číslo x bude proměnná. Číslem $f_G(x)$ označme počet obarvení grafu G pomocí x barev. Zřejmě pro

$x < \chi(G)$ je $f_G(x) = 0$ a pro $x \geq \chi(G)$ je $f_G(x) > 0$. V následující větě uvidíme, že o funkci $f_G(x)$ lze dokázat více.

Věta 8. *(O chromatickém polynomu) Nechť G je graf o n vrcholech. Potom funkce $f_G(x)$ je normovaný*[8] *polynom stupně n s celočíselnými koeficienty. Každé celé nezáporné číslo $k < \chi(G)$ je jeho kořenem.*

Důkaz této věty přenecháváme čtenáři (jako součást 8. úlohy seriálu).

Cvičení 7. Určíme chromatický polynom úplného grafu K_n. Označme si vrcholy grafu K_n v libovolném pořadí jako $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Představme si, že obarvujeme graf K_n pomocí $x \geq n$ barev. Na začátku mějme graf neobarvený. Začneme obarvením vrcholu v_1. Zřejmě máme x možností, kterou barvu si pro něj zvolíme. Poté obarvíme vrchol v_2. Jelikož vrchol v_2 je spojen hranou s vrcholem v_1, nesmíme použít barvu, kterou jsme obarvili vrchol v_1, máme tedy $x - 1$ možností, jak ho obarvit. Dále obarvíme vrchol v_3, zřejmě pro něj máme $x - 2$ možností volby jeho barvy, atd. Pro vrchol v_k máme $x - k + 1$ možností obarvení, protože se musíme vyhnout právě $k - 1$ již použitým barvám. Celkem tedy dostáváme, že počet obarvení grafu K_n pomocí x barev je $x(x-1)\cdots(x-n+1)$. Je vidět, že tento výsledek je v platnosti i pro $x < n = \chi(K_n)$, jelikož některá ze závorek je nulová.

Poznámka. Tvar chromatického polynomu lze odvodit také z věty 7. Je zřejmě f_{K_n} normovaný polynom stupně n, který má kořeny $x = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Věta 9. *(Chromatický polynom stromu) Nechť T je strom o n vrcholech. Pak chromatický polynom grafu T je tvaru $f_T(x) = x(x-1)^{n-1}$.*

Důkaz. Důkaz povedeme matematickou indukcí podle počtu vrcholů stromu T. Mějme pevný počet x barev. Nejprve předpokládejme, že strom T má jediný vrchol. Ten lze obarvit x barvami, a tedy $f_T(x) = x$ a tvrzení platí. Nyní předpokládejme, že jsme tvrzení dokázali pro všechny stromy o $n = k$ vrcholech a mějme strom T o $k + 1$ vrcholech. Podle lemmatu 3 existuje list stromu T (označme ho v). Podle lemmatu 4 je graf $T - v$ strom o k vrcholech. Platí tedy $f_{T-v}(x) = x(x-1)^{k-1}$. Každé obarvení stromu $T - v$ lze rozšířit na obarvení stromu T tak, že vrchol v obarvíme některou z barev různou od barvy souseda vrcholu v. Pro obarvení vrcholu v tedy máme $x - 1$ možností a platí $f_T(x) = (x-1)f_{T-v}(x) = x(x-1)^k$. Tvrzení tedy platí i pro stromy o $n = k + 1$ vrcholech.

Rovinné grafy

Jak jsme se již v předchozích dílech přesvědčili, reprezentace grafů obrázky je často velmi výhodný způsob, jak si graf představit. Nyní se budeme zabývat jistou třídou grafů, jejíž definice úzce souvisí právě s touto reprezentací. Půjde o tzv. *rovinné grafy*, tj. grafy, které lze nakreslit do roviny bez křížení hran. K tomu, abychom si je mohli formálně zavést, bude potřeba několik pomocných pojmů.

Rovinnou křivkou rozumíme každé spojité zobrazení $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Body $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ nazýváme *koncové body* křivky γ. Rovinnou křivku γ nazýváme *jednoduchou*, pokud zobrazení γ je prosté. Rovinnou křivku γ nazýváme *jednoduchou uzavřenou*, pokud $\gamma(0) = \gamma(1)$ a pokud zobrazení γ zúžené na interval $[0,1)$ je prosté.

K těmto definicím je potřeba trocha komentáře. Možná vás napadlo, jak souvisí pojem křivka se zobrazením z intervalu $[0,1]$ do roviny. Motivace je jednoduchá. Představme si, že kreslíme

[8] Normovaný polynom je polynom, jehož koeficient u nejvyšší mocniny je roven jedné.

tužkou na papíře křivku. Zobrazení $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ nám bude vyjadřovat polohu tužky v čase t. V čase $t = 0$ začneme v nějakém bodě kreslit, v čase $t = 1$ skončíme. Spojitost zobrazení γ odpovídá spojitému pohybu tužky po papíře – tužku nezvedáme a kreslenou křivku tak nikde nepřerušujeme.

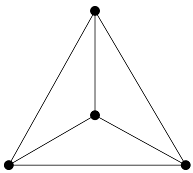
Poznámka. Ještě si také můžeme povšimnout, že křivkou většinou rozumíme geometrický objekt v rovině (např. úsečku, oblouk kružnice, apod.), zde jsme však křivku definovali jako jisté zobrazení γ, jehož obor hodnot (tj. množina $\gamma([0,1])$) je daný geometrický objekt. Často budeme tyto dva pojmy ztotožňovat; z kontextu vždy bude jasné, který z nich máme na mysli.

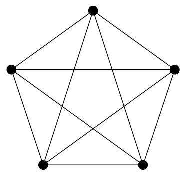
Nechť $G = (V, E)$ je graf. *Nakreslením* grafu G rozumíme přiřazení, které každému vrcholu v grafu G přiřadí bod $b(v)$ roviny a každé hraně $e = \{v, w\}$ grafu G přiřadí jednoduchou křivku γ_e s koncovými body $b(v)$ a $b(w)$. Přitom předpokládáme, že zobrazení b je prosté (různým vrcholům jsou přiřazené různé body roviny) a že bod $b(v)$ není nekoncovým bodem žádné křivky γ_e (tedy žádná křivka neprochází jinými vrcholy než svými koncovými).

Nakreslení grafu G nazveme *rovinné*, pokud každá dvojice křivek odpovídající různým hranám grafu G má společný nanejvýš koncový bod (to nastane v případě, že příslušné hrany mají společný koncový vrchol).

Graf G nazveme *rovinný*, pokud existuje alespoň jedno jeho rovinné nakreslení.

Poznámka. Na následujícím obrázku vidíme vlevo příklad rovinného nakreslení grafu K_4. Vidíme tedy, že graf K_4 je rovinný. Vpravo vidíme příklad nakreslení grafu K_5, které není rovinné. To však ještě neznamená, že neexistuje jiné nakreslení grafu K_5, které rovinné je[9].





Poznámka. Místo kreslení grafu bez křížení hran do roviny by nás mohlo napadnout kreslit grafy do jiných ploch. Např. na sféru (povrch koule), válec (nekonečně vysoký)[10], anuloid, ale např. i na Kleinovu láhev, projektivní rovinu apod. Vznikají tak jiné zajímavé třídy grafů. V našem seriálu se jimi ale zabývat nebudeme.

Je celkem jasné, jak o nějakém grafu dokázat, že je rovinný – stačí najít nějaké jeho rovinné nakreslení. Jak ale dokazovat, že daný graf rovinný není? Musíme ukázat, že žádné jeho nakreslení není rovinné. Pro ilustraci dokážeme následující tvrzení.

Věta 10. *Graf K_5 není rovinný.*

Důkaz. Postupujeme sporem. Předpokládejme, že graf K_5 je rovinný, a mějme nějaké jeho rovinné nakreslení. Body v rovině odpovídající jeho vrcholům označme b_1, b_2, b_3, b_4, b_5. Křivku odpovídající hraně spojující i-tý vrchol a j-tý vrchol označme $\gamma_{i,j}$. Uvažujme body b_1, b_2 a b_3 a křivky $\gamma_{1,2}$, $\gamma_{2,3}$ a $\gamma_{1,3}$. Ty dohromady tvoří jednoduchou uzavřenou křivku. Zřejmě body b_4

[9]Později dokážeme, že graf K_5 skutečně není rovinný.

[10]Ve skutečnosti kreslením grafů bez křížení na sféru či válec vznikají tytéž grafy jako při kreslení do roviny.

a b_5 leží buď oba uvnitř této uzavřené křivky, nebo leží oba vně (jinak by nebylo možné je spojit bez křížení dvou hran). Předpokládejme nejdříve, že bod b_4 leží uvnitř. Pak vnitřek uvažované křivky je rozdělen křivkami $\gamma_{1,4}$, $\gamma_{2,4}$ a $\gamma_{3,4}$ na tři oblasti a bod b_5 leží v jedné z nich. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že bod b_5 leží uvnitř oblasti ohraničené křivkami $\gamma_{1,2}$, $\gamma_{2,4}$ a $\gamma_{1,4}$. Je vidět, že bod b_3 leží vně téže oblasti, a tedy body b_3 a b_5 nelze spojit bez křížení hran. Případ, kdy body b_4 a b_5 leží vně uzavřené křivky tvořené křivkami $\gamma_{1,2}$, $\gamma_{2,3}$ a $\gamma_{1,3}$, lze vyřešit analogickým postupem, nebo převést na předchozí případ záměnou rolí vhodné dvojice bodů.

Všimněme si, že jsme v důkazu využívali následujícího intuitivně zřejmého tvrzení, které však formálně dokázat není vůbec jednoduché (my to zde dělat nebudeme).

Věta 11. *(Jordanova) Nechť γ je jednoduchá uzavřená křivka v rovině. Pak rovina je touto křivkou rozdělena na dvě oblasti – „vnitřní“ a „vnější“ takové, že máme-li dvojici bodů A a B neležící na křivce γ, pak je lze spojit křivkou neprotínající křivku γ právě tehdy, když leží v téže oblasti.*

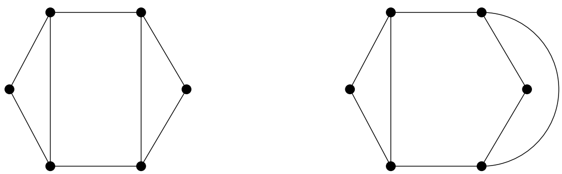
Poznámka. Jak vidíme, i takové věci jako nakreslení grafu lze budovat čistě formálně. Je to však poměrně technicky náročné a my ani nemáme potřebný aparát. Většinou se v těchto případech budeme odvolávat na náhled.

Obtíže při důkazu Jordanovy věty vznikají zejména díky velké obecnosti definice jednoduché uzavřené křivky. Pokud bychom namísto jednoduchých uzavřených křivek připouštěli pouze uzavřené lomené čáry, důkaz by se stal mnohem jednodušším. Bylo by možné definovat „lomenicově rovinné“ grafy – v jejich nakreslení reprezentovat hrany pomocí lomených čar. Dokonce by postačilo definovat „úsečkově rovinné“ grafy. Podle následující věty jsou totiž všechny tyto tři pojmy totožné. Důkaz je opět poměrně těžký a uvádět ho tedy nebudeme.

Věta 12. *Nechť G je rovinný graf. Pak existuje rovinné nakreslení grafu G, ve kterém jsou všechny hrany grafu G reprezentovány úsečkami.*

Mějme rovinný graf. Ten může mít mnoho různých nakreslení, která se mohou velmi lišit. Rovinný graf spolu s jeho nakreslením tedy nazýváme *topologický rovinný graf*. Mějme nějaký topologický rovinný graf G. Křivky odpovídající jednotlivým hranám nám rovinu rozdělí na několik souvislých oblastí (představme si, že podél hran rovinu „rozstříháme“). Tyto souvislé oblasti budeme nazývat *stěny* topologického rovinného grafu G. Neomezenou stěnu grafu G budeme nazývat *vnější*, ostatní stěny budeme nazývat *vnitřní*. Množinu všech stěn topologického rovinného grafu G budeme obvykle značit[11] $F(G)$.

Všimněme si, že pro definici pojmu stěny grafu G je důležité, že spolu s grafem G je dáno i jeho pevné nakreslení. Na následujícím obrázku vidíme různá nakreslení téhož rovinného grafu. Vidíme, že stěny v obou případech vypadají různě. Nakreslení vlevo má dvě stěny omezené kružnicemi délky 3, jednu stěnu omezenou kružnicí délky 4 a jednu stěnu omezenou kružnicí délky 6. Nakreslení vpravo má dvě stěny omezené kružnicemi délky 3 a dvě stěny omezené kružnicemi délky 5.



[11]Písmeno F je opět motivováno anglickým výrazem „face“ pro stěnu grafu.

Eulerův vztah

Vztah, který nyní dokážeme, je asi nejdůležitější kvantitativní výsledek pro rovinné grafy. Ač je teorie grafů poměrně mladá disciplína, kořeny tohoto vztahu sahají až do 17. století.

Věta 13. *(Eulerův vztah) Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf a nechť F je množina stěn v nějakém jeho rovinném nakreslení. Potom platí*

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Speciálně počet stěn grafu G nezávisí na způsobu rovinného nakreslení.

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení povedeme matematickou indukcí podle počtu hran grafu G. Jestliže graf G neobsahuje žádnou hranu, pak díky souvislosti obsahuje právě jeden vrchol, tedy $|V| = 1$ a zřejmě také právě jednu stěnu (v libovolném nakreslení), tedy i $|F| = 1$ a Eulerův vztah v tomto případě platí. Nyní předpokládejme, že $|E| \geq 1$ a pro souvislé rovinné grafy s méně než $|E|$ hranami Eulerův vztah platí. Rozlišíme dvě možnosti:

(i) Graf G neobsahuje kružnici. Pak zřejmě graf G je strom. Z názoru je zřejmé, že každé nakreslení stromu do roviny má jednu stěnu (formální důkaz dělat nebudeme), tedy $|F| = 1$. Podle věty 5 (v) platí $|V| = |E| + 1$. Vidíme tedy, že Eulerův vztah platí.

(ii) Graf G obsahuje kružnici. Buď e libovolná hrana grafu G, která je obsažena v nějaké kružnici. Pak graf $G - e$ je souvislý rovinný graf, který má o jednu hranu méně než graf G. Uvažujeme-li rovinné nakreslení grafu $G - e$, které vznikne z rovinného nakreslení grafu G smazáním křivky odpovídající hraně e, je vidět, že v tomto nakreslení má graf $G - e$ o jednu stěnu méně než graf G (křivka odpovídající hraně e v rovinném nakreslení grafu G zřejmě sousedí se dvěma stěnami grafu G, které se v popsaném nakreslení grafu $G - e$ spojí v jednu; ostatní stěny zůstanou nezměněné). Pro graf $G - e$ podle indukčního předpokladu Eulerův vztah platí. Graf G má o jednu hranu a o jednu stěnu více než graf $G - e$. Počet vrcholů mají oba grafy stejný a je tedy zřejmé, že Eulerův vztah platí i pro graf G. Tím je důkaz hotov.

Nyní si ukážeme některé důležité aplikace Eulerova vztahu.

Věta 14. *(Maximální počet hran rovinného grafu)*

(i) *Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s alespoň třemi vrcholy. Pak $|E| \leq 3|V| - 6$. Pokud v předchozí nerovnosti nastává rovnost, pak graf G je „maximální rovinný“, tj. přidáním libovolné hrany ke grafu G dostaneme graf, který už není rovinný.*

(ii) *Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s alespoň třemi vrcholy, který navíc neobsahuje jako podgraf kružnici délky 3. Pak $|E| \leq 2|V| - 4$.*

Důkaz. (i) Pokud ke grafu G lze (při zachování množiny vrcholů) přidat nějakou hranu tak, aby zůstal rovinným, přidáme ji. Opakováním tohoto postupu dostaneme nakonec graf G', ke kterému již žádná hrana nelze přidat tak, aby zůstal rovinný. Pokud pro graf G' dokážeme rovnost $|E'| = 3|V'| - 6$, bude pro graf G platit neostrá nerovnost $|E| \leq 3|V| - 6$, protože graf G má stejně vrcholů jako graf G' a nemá více hran. Předpokládejme tedy že ke grafu G' již nelze přidat hrana tak, aby zůstal rovinný, tedy, že graf G' je maximální rovinný. Kdyby graf G' nebyl souvislý, bylo by možné spojit hranou některou dvojici vrcholů z různých komponent tak, aby výsledný graf byl stále rovinný. Graf G' je tedy souvislý. Nyní ukážeme, že každá stěna grafu G' je trojúhelníková (tj. omezená třemi hranami tvořícími kružnici délky 3 v grafu G'. Předpokládejme, že některá stěna obsahuje na své hranici alespoň čtyři vrcholy. Nyní si stačí uvědomit, že některá dvojice vrcholů na hranici uvažované stěny díky rovinnosti nakreslení grafu G' není spojena hranou v grafu G' a lze tedy tuto hranu přikreslit dovnitř uvažované stěny bez křížení s ostatními hranami. To by byl spor s maximalitou rovinného grafu G'. Každá stěna grafu G' obsahuje na své hranici tři vrcholy, a tedy i tři hrany a je trojúhelníková.

Každá stěna sousedí se třemi hranami, každá hrana sousedí se dvěma stěnami. Počítáme-li hrany tak, že postupně probíráme všechny stěny grafu G' a za každou stěnu započítáme všechny hrany, se kterými sousedí, dostaneme ve výsledku každou hranu dvakrát. Je tedy zřejmé, že $3|F'| = 2|E'|$. Dosadíme do Eulerova vztahu za $|F'|$ a dostáváme

$$|E'| = 3|V'| - 6.$$

Tím je důkaz hotov.

(ii) Myšlenka důkazu této části je stejná jako myšlenka užitá v důkazu části (i). Přenecháváme ho tedy čtenáři (jako součást 9. úlohy seriálu).

Cvičení 8. Uvědomíme si, že věta 10 je snadným důsledkem právě dokázané věty 14. Předpokládejme pro spor, že graf K_5 je rovinný. Zřejmě $|V(K_5)| = 5$ a $|E(K_5)| = 10$. Snadno vidíme, že pro graf K_5 nerovnost $|E| \leq 3|V| - 6$ není splněna.

Barevnost rovinných grafů

Dostáváme se k jedné z nejslavnějších otázek teorie grafů. Jde o to určit maximální barevnost rovinných grafů (pokud vůbec existuje). Tento problém je motivovaný praktickou otázkou, kolik barev je potřeba na to, abychom mohli vybarvit obecnou politickou mapu několika států tak, aby státy sousedící úsekem hranice měly různou barvu. Uvažujeme jen ty mapy, ve kterých jsou státy tvořeny souvislou plochou[12]. Problém lze formulovat v řeči barevnosti rovinných grafů. Zjednodušeně řečeno – dovnitř každého státu lze umístit vrchol a státy sousedící úsekem hranice lze přes tento úsek spojit hranou tak, aby se hrany navzájem neprotínaly. Problém obarvení politické mapy se tímto způsobem převede na problém obarvení vzniklého rovinného grafu.

Řešením tohoto problému je následující věta s pohnutou historií.

Věta 15. *(O čtyřech barvách) Nechť G je rovinný graf. Pak $\chi(G) \leq 4$.*

Již v 19. století se objevila hypotéza, že čtyři barvy stačí v každém případě. Úplný důkaz této hypotézy byl podán až v roce 1976. Tento důkaz ale stál na prověření cca 2000 různých „reducibilních konfigurací“, na které se podařilo každý graf převést. Byl to první důkaz matematické věty, který podstatným způsobem závisel na strojovém výpočtu, a jako takový nebyl mnoha matematiky doposud uznán jako „skutečný“ důkaz matematické věty. I když se dodnes podařilo najít několik významných zjednodušení, úplně odstranit pomoc počítače se zatím nepodařilo.

V našem seriálu dokážeme pouze o něco slabší výsledek – větu o pěti barvách. Nejdříve však jedno pomocné lemma.

Lemma 5. Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf. Pak v grafu G existuje vrchol v takový, že

$$\deg_G(v) \leq 5.$$

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že v grafu G má každý vrchol stupeň alespoň 6. Podle věty 1 platí

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg_G(v) \geq \sum_{v \in V} 6 = 6|V|.$$

[12] To však není pravidlem ani v současných politických mapách – viz např. Rusko.

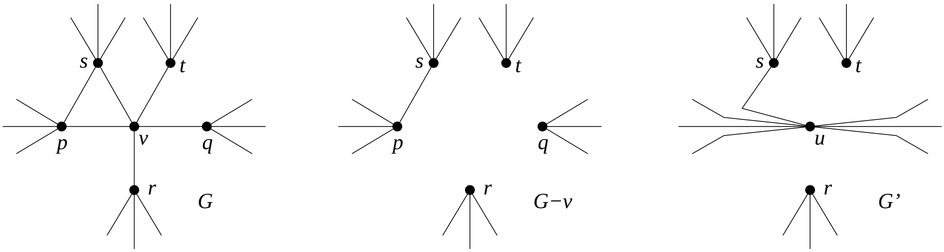
Platí tedy $|E| \geq 3|V|$. Podle věty 14 je ale $|E| \leq 3|V| - 6$. Dostali jsme tedy kýžený spor.

Věta 16. *(O pěti barvách) Nechť G je rovinný graf. Pak $\chi(G) \leq 5$.*

Důkaz. Postupujeme matematickou indukcí podle počtu vrcholů grafu $G = (V, E)$. Pro $|V| \leq 5$ je tvrzení triviální. Předpokládejme tedy, že máme rovinný graf $G = (V, E)$ o $|V| > 5$ vrcholech a že barevnost každého rovinného grafu o méně než $|V|$ vrcholech je nejvýše 5. Podle lemmatu 5 v grafu G existuje vrchol v stupně nejvýše pět. Rozlišíme dva případy:

(i) $\deg_G(v) \leq 4$. Vrchol v má v grafu G nejvýše čtyři sousedy. Graf $G - v$ je zřejmě rovinný a podle indukčního předpokladu ho lze obarvit pěti barvami. Podle Dirichletova principu mezi těmito pěti barvami existuje barva, kterou není obarven žádný soused vrcholu v. Vrchol v tedy lze obarvit touto barvou a dostáváme obarvení grafu G pěti barvami.

(ii) $\deg_G(v) = 5$. Označme si p, q, r, s, t vrcholy sousedící v grafu G s vrcholem v. Jelikož podle věty 10 graf K_5 není rovinný, je zřejmé, že alespoň jedna dvojice těchto vrcholů není spojena hranou. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že např. vrcholy p a q spolu nejsou spojeny hranou. Uvažujme nyní graf $G - v$ a nahraďme v něm vrcholy p a q jedním vrcholem u, který spojíme s každým vrcholem, který sousedí v grafu $G - v$ s vrcholem p nebo s vrcholem q (viz obrázek).



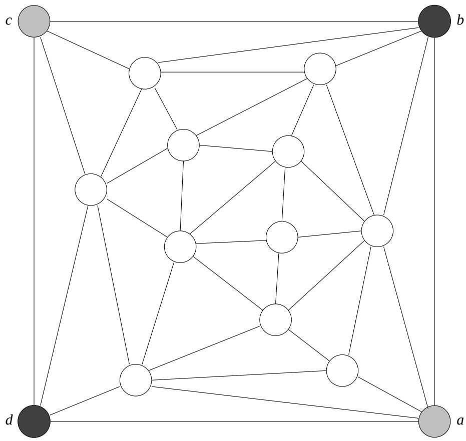
Dostaneme graf G', který je zřejmě rovinný a má méně vrcholů než graf G. Podle indukčního předpokladu lze graf G' obarvit pěti barvami. V grafu G lze zřejmě obarvit všechny vrcholy kromě vrcholů p, q a v stejně, jako v grafu G'. Vrcholy p a q lze obarvit barvou vrcholu u v grafu G'. Jelikož mají vrcholy p a q stejnou barvu, existuje barva, která je mezi sousedy vrcholu v nepoužitá, a tou můžeme obarvit vrchol v. Dostáváme obarvení grafu G pěti barvami. Tím je důkaz hotov.

Seriál – Teorie grafů

V závěrečném dílu seriálu si ukážeme několik aplikací teorie grafů, které se do předešlých dílů nevešly.

Princip sudosti

Nejdříve začneme dvěma aplikacemi principu sudosti. Pro první z nich uvažujme následující hru pro dva hráče. Hrací plán bude sestávat z hracích políček, která budou mezi sebou propojena hranami. Formálně si ho budeme definovat jako nakreslení rovinného grafu. Budeme ještě požadovat, aby tento rovinný graf byl souvislý, aby každá vnitřní stěna byla ohraničena kružnicí délky 3 a aby vnější stěna byla ohraničena kružnicí délky 4 (např. tak jako na následujícím obrázku).



Vrcholy kružnice ohraničující vnější stěnu označíme po řadě a, b, c a d. První hráč hraje červenou pastelkou, druhý modrou. Na začátku jsou vrcholy a a c obarveny červeně a vrcholy b a d modře. Hráči se pravidelně střídají v tazích, v každém tahu hráč obarví nějaký dosud neobarvený vrchol svojí pastelkou. První hráč vyhrává, pokud se mu podaří spojit vrcholy a a c cestou, jejíž všechny vrcholy jsou obarveny červeně, druhý hráč vyhrává, pokud se mu podaří spojit vrcholy b a d cestou, jejíž všechny vrcholy jsou obarveny modře. Hra končí remízou, pokud jsou již obarveny všechny vrcholy a žádný z hráčů dosud nevyhrál. Zajímavá vlastnost této hry je obsažena v následující větě.

Věta 17. *Výše uvedená hra nemůže skončit remízou. Speciálně, pro každý hrací plán má jeden z hráčů vyhrávající strategii.*

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že existuje hrací plán, na kterém může dojít k remíze. Existuje tedy obarvení vrcholů hracího plánu červenou a modrou barvou tak, že vrcholy a a c mají červenou barvu, vrcholy b a d mají modrou barvu a neexistuje červená cesta z vrcholu a do vrcholu c ani modrá cesta z vrcholu b do vrcholu d. Očíslujme si všechny vrcholy hracího plánu následujícím způsobem. Pokud má vrchol v červenou barvu a existuje červená cesta z vrcholu a do vrcholu v, přiřadíme vrcholu v barvu 1. Pokud má vrchol v modrou barvu a existuje modrá cesta z vrcholu b do vrcholu v, přiřadíme vrcholu v číslo 2. Ve všech ostatních případech přiřadíme vrcholu v číslo 3. Zřejmě vrchol a má číslo 1, vrchol b má číslo 2 a vrcholy c a d mají číslo 3 (jinak by existovala červená cesta z a do c nebo modrá cesta z b do d). Definujme si následující graf G. Vrcholy grafu G budou stěny hracího plánu a dva vrcholy grafu G spojíme hranou, pokud odpovídající stěny hracího plánu sousedí nějakou hranou s koncovými vrcholy, z nichž jeden má číslo 1 a jeden má číslo 2. Můžeme si to představit tak, že dovnitř každé stěny (včetně vnější) nakreslíme puntík a dva puntíky v sousedních stěnách spojíme hranou, pokud tato spojnice křižuje hranu s koncovými vrcholy očíslovanými čísly 1 a 2. Všimněme si, že vrchol grafu G odpovídající vnější stěně (označme ho v) má stupeň 1, protože jedině hrana $\{a, b\}$ s ním sousedící má koncové vrcholy očíslované číslem 1 a 2. Vrchol v má tedy lichý stupeň. Podle principu sudosti v grafu G existuje ještě alespoň jeden vrchol $w \neq v$ lichého stupně (celkově jich totiž musí být sudý počet). Vrchol w odpovídá vnitřní stěně, která je ohraničena kružnicí délky 3 tvořenou vrcholy k, l a m. Zřejmě vrchol w má stupeň 1 nebo 3 (více jak tři hrany z vrcholu w vést nemohou, protože každá vnitřní stěna sousedí jen se třemi ostatními). Stupeň 3 vrchol w mít nemůže, to by každá hrana trojúhelníku klm spojovala vrchol s číslem 1 s vrcholem s číslem 2. Vrcholy s číslem 1 a 2 by se tedy pravidelně střídaly, což není možné (máme lichý počet vrcholů). Vrchol w má tedy stupeň 1 a bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že vrchol k má číslo 1 a vrchol l má číslo 2. Zřejmě vrchol m má číslo 3 (jinak by z vrcholu w vedla ještě jedna další hrana). Taková situace ale není možná. Pokud má vrchol m červenou barvu, pak lze červenou cestu spojující vrchol a a vrchol k prodloužit o hranu $\{k, m\}$ a zřejmě vrchol m musí mít číslo 1. Pokud má vrchol m modrou barvu, pak lze modrou cestu spojující vrcholy b a l prodloužit o hranu $\{l, m\}$ a zřejmě vrchol m musí mít číslo 2. Dostali jsme kýžený spor, vidíme tedy, že pro žádný hrací plán nemůže nastat remíza.

Poznámka. Zkuste si rozmyslet, jak z předchozí věty plyne následující tvrzení. Pokud hrací plán „vypadá stejně“ po otočení o 90 stupňů (tj. pokud existuje isomorfismus grafu G reprezentujícího hrací plán na sebe takový, že převádí vrchol a na vrchol b, b na c, c na d a d na a), pak má vyhrávající strategii první hráč.

Nyní se budeme zabývat odlišným problémem.

Nechť G je graf. *Hamiltonovskou kružnicí* v grafu G budeme rozumět kružnici na $n = |V(G)|$ vrcholech, která je podgrafem G. (Je to tedy kružnice, která prochází každým vrcholem grafu G právě jednou.) řekneme, že graf G je *hamiltonovský*, pokud v něm existuje hamiltonovská kružnice.

Hamiltonovskou cestou v grafu G budeme rozumět cestu na $n = |V(G)|$ vrcholech, která je podgrafem G.

Hamiltonovská kružnice v grafu G je tedy jistá analogie k Eulerovskému tahu (ten prochází každou hranu právě jednou). Je zde ale mnoho rozdílů. Zatímco pro existenci Eulerovského tahu v grafu G máme velmi jednoduše testovatelnou podmínku danou větou 3, úloha rozhodnout, zda je daný graf hamiltonovský je v obecnosti algoritmicky velmi těžká[13]. Existuje několik základních podmínek postačujících pro existenci hamiltonovské kružnice, my se však tímto zabývat nebudeme. Ukážeme si pouze jednu větu v jejímž důkazu hraje podstatnou roli princip sudosti.

[13] Podobně jako v případě určení barevnosti grafu jde o NP-úplný problém.

Věta 18. *Nechť G je graf, jehož každý vrchol má lichý stupeň. Pak každou hranou grafu G prochází sudý počet hamiltonovských kružnic.*

Poznámka. Tato věta nic neříká o tom, zda je graf G hamiltonovský (ostatně graf s lichými stupni může být nesouvislý ...), sudý počet může být i nula.

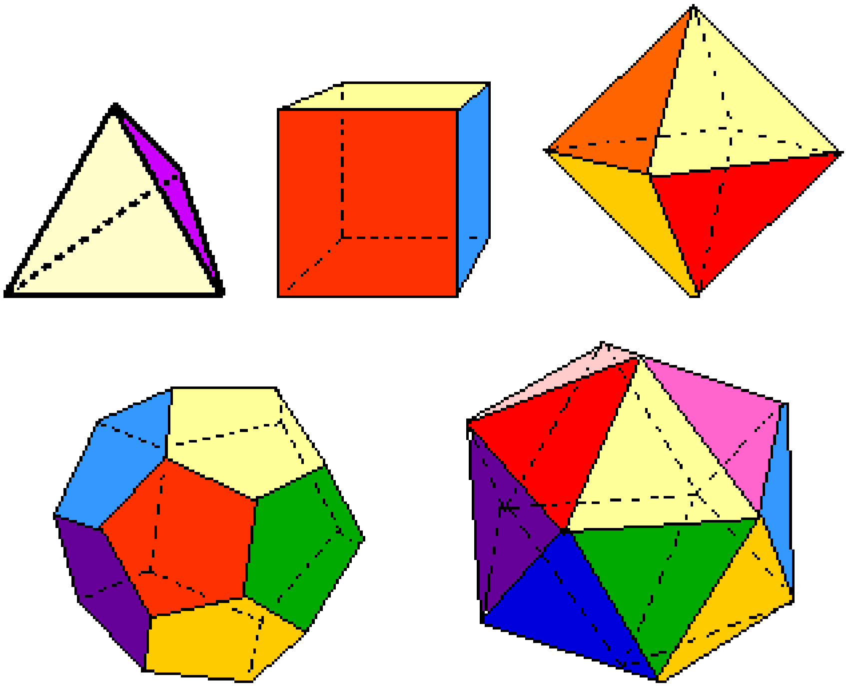
Důkaz. Nechť je n počet vrcholů grafu G. Zvolme pevně libovolnou hranu $e = \{v_1, v_2\}$ grafu G. Definujme *lízátkový* graf $L = L(G, v_1, v_2)$ následujícím způsobem. Vrcholy grafu L budou hamiltonovské cesty v grafu G, jejichž první dva vrcholy jsou v_1 a v_2. Dvě hamiltonovské cesty spojíme v grafu L hranou právě tehdy, když dohromady tvoří „lízátko“, tj. Pokud první hamiltonovská cesta je tvaru $P_1 = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$, pak druhá je tvaru $P_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{k+1})$, kde $k \geq 2$ a $k \leq n-2$. Nyní zvolme pevně hamiltonovskou cestu $P_1 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Zkusíme určit, jaký má v grafu L stupeň. Zřejmě posloupnost vrcholů $P_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{k+1})$, kde $2 \leq k \leq n-2$ je (hamiltonovská) cesta právě tehdy, když vrcholy v_k a v_n jsou spojeny hranou. To nastane pro $\deg_G v_n - 1$ nebo $\deg_G v_n - 2$ různých k. První případ nastane, pokud vrcholy v_n a v_1 nejsou spojeny hranou (pak musíme odečíst pouze jedničku za hranu vedoucí z vrcholu v_n do vrcholu v_{n-1}), druhý případ nastane, pokud vrcholy v_n a v_1 jsou spojeny hranou. Jelikož stupně všech vrcholů v grafu G jsou liché, vidíme, že hamiltonovská cesta P_1 má v grafu L lichý stupeň právě tehdy, když v_1 a v_n (její první a poslední vrchol) jsou v grafu G spojeny hranou – tedy právě tehdy, když lze P_1 prodloužit na hamiltonovskou kružnici přidáním hrany mezi první a poslední vrchol. Je tedy vidět, že hamiltonovské kružnice procházející hranou $e = \{v_1, v_2\}$ v grafu G vzájemně jednoznačně odpovídají vrcholům lichého stupně v grafu L. Je jich tedy sudý počet.

Rovinné grafy – Eulerův vztah

Nyní si ukážeme aplikaci Eulerova vztahu na řešení jednoho velmi starého geometrického problému. Jedná se o problém tzv. Platónských těles. Platónským tělesem rozumíme konvexní[14] těleso, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné k-úhelníky (pro neměnné k), navíc takové, že v každém vrcholu se stýká stejný počet hran. Platónská tělesa mají spoustu zajímavých vlastností – např. jim lze vepsat i opsat sféra. Již ve starověku bylo známo, že jich existuje jen pět (až na podobnost) – pravidelný čtyřstěn, šestistěn (krychle), osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn (viz obrázek na další straně).

Uvedenou skutečnost lze celkem snadno dokázat elementárními geometrickými úvahami. Stačí si rozmyslet následující: V každém vrcholu Platónského tělesa se stýká stejný počet (označme ho d) stěn (resp. hran). Zřejmě $d \geq 3$. Každá stěna je pravidelný k-úhelník (kde $k \geq 3$ je pevné číslo). Pro dané Platónské těleso nazvěme dvojici (d, k) *typem* daného Platónského tělesa. Součet vnitřních úhlů jednotlivých stěn u daného vrcholu musí být méně než 2π (plný úhel) – to si lze nejsnadněji uvědomit např. tak, že daným vrcholem vedeme rovinu kolmou na osu daného Platónského tělesa. Jednotlivé vnitřní úhly u daného vrcholu se při kolmém průmětu do dané roviny zvětší. Je tedy vidět, že je-li $k = 3$, mohou se u jednoho vrcholu stýkat 3, 4 nebo 5 stěn. Pro $k = 4$ nebo $k = 5$ se mohou u jednoho vrcholu stýkat už jen 3 stěny a případ $k \geq 6$ již není možný. Přípustné typy Platónských těles jsou tedy jen $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,3)$ a $(5,3)$. Nyní si uvědomíme, že Platónské těleso daného typu (d, k) je jednoznačně určeno (až na podobnost). Stačí začít v jednom vrcholu. Snadno zkonstruujeme d pravidelných k-úhelníků, které mají spo-

[14]Konvexita tělesa znamená, že jsou-li x a y dva body tělesa, leží i celá úsečka xy v našem tělese, tedy že „povrch tělesa není nikde prohnutý dovnitř, těleso nikde nemá díry atd.“

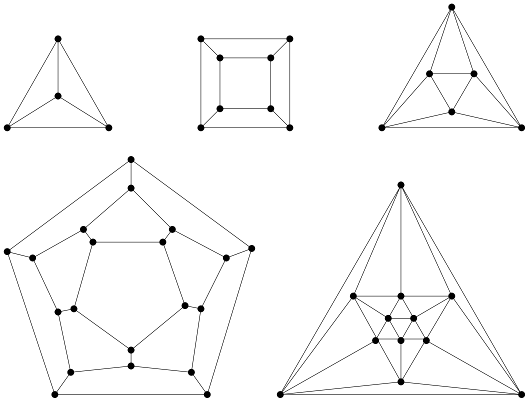


lečný vrchol. Nyní stačí pokračovat v konstrukci u „sousedních“ vrcholů, kde ještě nějaké k-úhelníky „chybějí“ a takto nakonec „obejít dokola“ celé těleso. Při troše geometrické představivosti e vidět, že takto zkonstruujeme celé Platónské těleso daného typu. Zároveň je vidět, že konstrukce je až na podobnost jednoznačná. Detaily přenecháváme na čtenáři.

Pokud si čtenář provede jednotlivé geometrické konstrukce, snadno zjistí, že Platónské těleso typu $(3,3)$ je pravidelný čtyřstěn, typu $(3,4)$ odpovídá krychle (pravidelný šestistěn), typu $(3,5)$ odpovídá pravidelný dvanáctistěn, typu $(4,3)$ odpovídá pravidelný osmistěn a typu $(5,3)$ pravidelný dvacetistěn.

My si zde ukážeme, jak parametry (počet vrcholů, hran a stěn) Platónského tělesa daného typu zjistit bez jejich geometrické konstrukce (stačí nám informace, že existuje). Uvidíme, že tyto vlastnosti Platónských těles nejsou dány jejich geometrií (značnou pravidelností atd.), ale že jsou hlubší povahy a vyplývají již ze struktury incidence vrcholů, hran a stěn. (Uvidíme tedy, že každé konvexní těleso, v jehož každém vrcholu se stýká d hran a jehož každá stěna je k-úhelník, má stejné parametry jako Platónské těleso typu (d,k).) Nejprve však budeme potřebovat zavést několik pojmů.

Nechť M je těleso. *Grafem tělesa M* budeme rozumět graf G_M, který vznikne následujícím způsobem: Množina vrcholů grafu G_M bude totožná s množinou vrcholů tělesa M. Dva vrcholy grafu G_M spojíme hranou právě tehdy, když odpovídající vrcholy tělesa M tvoří koncové body společné hrany tělesa M. (Na následujícím obrázku vidíme grafy jednotlivých Platónských těles.)



Věta 19. *Nechť M je konvexní těleso. Pak graf G_M je rovinný. Navíc existuje nakreslení grafu G_M, v němž stěny tělesa M „odpovídají“*[15] *stěnám grafu G_M.*

Důkaz. Sestrojíme požadované nakreslení grafu G_M do roviny. Nejdříve však sestrojíme pomocné nakreslení na sféru (povrch koule). Zvolme si libovolný bod S uvnitř tělesa M a uvažujme sféru τ se středem S a dostatečně velkým poloměrem tak, aby celé těleso M leželo uvnitř sféry M. Zřejmě každá polopřímka začínající v bodě S protíná sféru τ v právě jednom bodě. Stejně tak každá polopřímka začínající v bodě S protíná povrch tělesa M v právě jednom bodě (to plyne z konvexity tělesa M). Lze tedy definovat vzájemně jednoznačné spojité zobrazení f mezi povrchem tělesa M a sférou τ (máme-li bod X na povrchu M, uvažujeme polopřímku začínající v bodě S a procházející bodem X, ta nám protne sféru τ v bodě $f(X)$). Zobrazíme-li vrcholy tělesa M a jednotlivé body hran tělesa M pomocí zobrazení f na sféru τ, dostaneme zřejmě vhodné nakreslení grafu G_M na sféru.[16]

Nyní nám již zbývá pouze „přenést“ nakreslení ze sféry τ do roviny. To provedeme podobným způsobem. Zvolme si na sféře τ nějaký bod T, kterým neprochází žádná hrana nakreslení G_M a který je různý od všech vrcholů nakreslení grafu G_M (takový zřejmě existuje). Představme si, že sféry τ se v bodě T', který leží naproti bodu T, dotýká rovina ϱ. Zřejmě máme-li nyní bod $X \neq T$ sféry τ, polopřímka začínající v bodě T a procházející bodem X protíná τ i ϱ v právě jednom bodě. Lze tedy definovat vzájemně jednoznačné spojité zobrazení mezi $\tau \setminus \{T\}$ a ϱ podobně jako výše. Dostali jsme rovinné nakreslení grafu G_M požadovaných vlastností.

Nyní jsme již připraveni pomocí Eulerova vztahu zjistit vlastnosti Platónských těles jednotlivých typů.

[15]Odpovídají ve smyslu incidence – stěna tělesa M sousedí s nějakou hranou (nebo vrcholem) M právě tehdy, když odpovídající stěna grafu G_M sousedí s odpovídající hranou (vrcholem) grafu G_M.

[16]Můžeme si představit, že v bodě S je umístěn zdroj světla a že vrcholy a hrany tělesa M jsou tvořeny dráty. Výsledné nakreslení dostaneme jako stín vržený dráty na sféru τ.

Věta 20. *Nechť M je Platónské těleso typu (d,k). Pak počet stěn, vrcholů a hran tělesa M je dán následující tabulkou:*

typ	*počet stěn*	*počet vrcholů*	*počet hran*
$(3,3)$	4	4	6
$(3,4)$	6	8	12
$(3,5)$	12	20	30
$(4,3)$	8	6	12
$(5,3)$	20	12	30

Důkaz. Pro dané Platónské těleso M typu (d,k) uvažujme nakreslení grafu G_M zkonstruované podle věty 19. Graf G_M má zřejmě stejný počet vrcholů, hran a stěn jako těleso M. Označme f, v a e po řadě počet stěn, vrcholů a hran grafu G_M. Podle Eulerova vztahu platí $v+f-e=2$. Navíc v každém vrcholu grafu G_M se stýká d hran. Počítejme tedy dvojice (u,h) takových, že u je koncový vrchol hrany h. Zřejmě pro každý vrchol máme d odpovídajících hran, pro každou hranu máme 2 odpovídající vrcholy a tedy $d\cdot v=2e$. Podobným způsobem (když si uvědomíme, že každá stěna sousedí s k hranami) dostáváme $k\cdot f=2e$. Chceme-li nyní spočítat počet vrcholů grafu G_M, stačí si čísla f a e vyjádřit pomocí v (je zřejmě $e=\frac{d}{2}v$ a $f=\frac{2}{k}e=\frac{d}{k}v$) a dosadit do Eulerova vztahu. Dostáváme

$$v+\frac{d}{k}v-\frac{d}{2}v=2,$$

$$v=\frac{2}{1+\frac{d}{k}-\frac{d}{2}}=\frac{4k}{2k+2d-kd}.$$

Analogickým způsobem odvodíme vzorce

$$f=\frac{4d}{2k+2d-kd},\quad e=\frac{2kd}{2k+2d-kd}.$$

Nyní již snadno ověříme, že jednotlivým typům (d,k) odpovídají hodnoty v, f a e uvedené v tabulce výše.

Závěr

Co říci závěrem? Velmi omezený rozsah seriálu nedovolil probrat vše ani ze základních oblastí teorie grafů – při výběru, které oblasti a problémy zařadit, jsem se řídil subjektivním dojmem, co jsem považoval za nejzajímavější, nejužitečnější apod. Mnoho zajímavých věcí zůstalo zcela nepovšimnuto. Čtenáři, kterého problematika zaujala, tedy nelze než popřát hodně zdaru při dalším samostudiu.

Při psaní seriálu jsem čerpal zejména z následujících knih:

— Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum, Praha 2000 (2. vydání).

— Jiří Sedláček, *Úvod do teorie grafů*, ČSAV, Praha 1981 (3. vydání).

První z nich je velmi pěkná kniha, která obsahuje mnoho zajímavých partií nejen z teorie grafů. Druhá kniha je již poněkud staršího data, a tak si čtenář musí dát pozor na místy již poněkud zastaralou terminologii.