1. seriálová série

Téma: Nekonečno

Termín odeslání: 21. ledna 2002

1. Úloha (5 bodů)

Kolik je polynomů s racionálními koeficienty (tj. výrazů $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, kde n je nezáporné celé číslo a $a_0, \ldots, a_n$ jsou libovolná racionální čísla)?

2. Úloha (5 bodů)

Kolik je

(a) posloupností přirozených čísel (tj. funkcí $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$)?
(b) permutací přirozených čísel (tj. bijekcí $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$)?
(c) involucí přirozených čísel (tj. bijekcí $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takových, že $f = f^{-1}$)?

3. Úloha (5 bodů)

Dokažte pořádně následující tvrzení.

(a) Je-li $A \prec \mathbb{N}$, pak je A konečná.
(b) Prosté zobrazení $A \to B$ existuje právě tehdy, když existuje surjektivní zobrazení $B \to A$.
(c) Je-li $A \times A \approx A$, pak $A^n \approx A$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
(d) Je-li $A_1 \approx B_1$ a $A_2 \approx B_2$, pak $A_1 \times A_2 \approx B_1 \times B_2$.

2. seriálová série

Téma: Nekonečno

Termín odeslání: 11. března 2002

4. Úloha (5 bodů)

(a) Dokažte, že existuje reálná funkce, jejíž graf protne graf každé spojité reálné funkce.
(b) Dokažte, že existuje rozklad přímky na nespočetně mnoho nespočetných po dvou disjunktních podmnožin.

5. Úloha (5 bodů)

Buď M množina bodů v rovině. Řekneme, že M je *pěkná*, pokud žádné tři body z M neleží na přímce a žádné tři přímky určené body z M se neprotínají v bodě neležícím v M.

(a) Dokažte, že pro každé n přirozené existuje n-prvková pěkná množina bodů v rovině.
(b) Dokažte, že existuje spočetná pěkná množina bodů v rovině.
(c) *(Mimo soutěž.)* Existuje pěkná množina bodů v rovině mohutnosti kontinua?

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť A, B, U jsou libovolné množiny. Dokažte, že
(a) $U^{A\times B} \approx (U^A)^B \approx (U^B)^A$;
(b) jsou-li A, B disjunktní, pak $U^{A\cup B} \approx U^A \times U^B$;
(c) je-li $A \preceq B$, pak $U^A \preceq U^B$ a $A^U \preceq B^U$.

3. seriálová série

Téma:	Nekonečno
Termín odeslání:	13. KVĚTNA 2002

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která na každém intervalu (a, b) nabývá všech reálných hodnot (tj. pro každé $y \in \mathbb{R}$ existuje $x \in (a, b)$ takové, že $f(x) = y$).

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že existuje množina bodů v rovině, kterou protne každá přímka v právě dvou bodech.

9. ÚLOHA (5 BODŮ)

Kolik existuje (navzájem různých) podmnožin $\mathbb{N}$ takových, že každé dvě různé mají konečný průnik?

Řešení seriálové série

1. úloha
Kolik je polynomů s racionálními koeficienty (tj. výrazů $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, kde n je nezáporné celé číslo a $a_0, \ldots, a_n$ jsou libovolná racionální čísla)?

Označme P_n množinu všech polynomů stupně n s racionálními koeficienty. Množinu všech racionálních polynomů lze tedy napsat jako $\bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$. Polynom stupně n je jednoznačně určen svými koeficienty $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, přičemž $a_n \neq 0$. Máme tedy prosté zobrazení $P_n \to \mathbb{Q}^{n+1}$ která polynomu $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ přiřazuje $(n+1)$-tici $(a_0, \ldots, a_n)$. Přitom ovšem $\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$, a tudíž $P_n \preceq \mathbb{Q}^{n+1} \approx \mathbb{N}^{n+1} \approx \mathbb{N}$ (viz 3. úloha). Jelikož P_n je nekonečná, je zřejmě spočetná. Množina všech polynomů je tedy spočetným sjednocením spočetných množin, a proto je spočetná.

2. úloha
Kolik je

(a) posloupností přirozených čísel (tj. funkcí $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$)?
(b) permutací přirozených čísel (tj. bijekcí $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$)?
(c) involucí přirozených čísel (tj. bijekcí $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takových, že $f = f^{-1}$)?

Označme A množinu všech posloupností přirozených čísel, B množinu všech permutací přirozených čísel a C množinu všech involucí přirozených čísel. Protože $C \subseteq B \subseteq A$, máme $C \preceq B \preceq A$.

Nejprve si všimněme, že každé posloupnosti přirozených čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ lze (prostě) přiřadit množinu $\{(n, a_n) : n = 1, 2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Máme tedy prosté zobrazení $A \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Přitom ovšem $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$, takže také $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Mohutnost množiny A tedy není větší než mohutnost kontinua.

Dále zkonstruujeme prosté zobrazení $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to C$. Podmnožině $A \subseteq \mathbb{N}$ přiřadíme následující zobrazení $f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pokud $x \in A$, položíme $f_A(2x) = 2x + 1$, $f_A(2x + 1) = 2x$. Pokud $x \notin A$, položíme $f_A(2x) = 2x$, $f_A(2x + 1) = 2x + 1$. Je vidět, že právě definované f_A je involucí, a pro $A \neq B$ máme $f_A \neq f_B$ (je-li $x \in A \setminus B$ nebo $x \in B \setminus A$, pak $f_A(2x) \neq f_B(2x)$).

Shrnuto, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq C \preceq B \preceq A \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Z Cantor-Bernsteinovy věty a faktu $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$ dostáváme, že všechny tři zadané množiny mají mohutnost kontinua.

3. úloha
Dokažte pořádně následující tvrzení.

(a) Je-li $A \prec \mathbb{N}$, pak je A konečná.
(b) Prosté zobrazení $A \to B$ existuje právě tehdy, když existuje surjektivní zobrazení $B \to A$.
(c) Je-li $A \times A \approx A$, pak $A^n \approx A$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
(d) Je-li $A_1 \approx B_1$ a $A_2 \approx B_2$, pak $A_1 \times A_2 \approx B_1 \times B_2$.

(a) Nechť $A \prec \mathbb{N}$ není konečná. Nalezneme po dvou různá $a_1, a_2, \ldots \in A$, čímž ukážeme, že $\mathbb{N} \preceq A$ (při prostém zobrazení $n \mapsto a_n$), což dá spor.

Buď $a_1 \in A$ libovolné. Máme-li zkonstruována $a_1, \ldots, a_n$, zvolíme libovolné $a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. Zbývá dokázat, že množina $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ je neprázdná. Kdyby však $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} = \emptyset$, pak $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, což je spor s tím, že A není konečná.

(b) Nechť $f : A \to B$ je prosté zobrazení. Definujeme zobrazení $g : B \to A$. Je-li $b = f(a)$ pro nějaké $a \in A$, pak položíme $g(b) = a$. Je-li $b \in B$, avšak $b \neq f(a)$ pro všechna $a \in A$, zvolíme $g(b)$ libovolně. Takto definované g je surjektivní, neboť každý prvek $a \in A$ je obrazem nějakého prvku $b \in B$, konkrétně prvku $f(a)$.

Naopak, nechť $g : B \to A$ je surjektivní zobrazení. Definujeme zobrazení $f : A \to B$. Pro každý prvek $a \in A$ vybereme nějaký prvek $b \in B$ takový, že $g(b) = a$ (díky surjektivitě g takový jistě existuje), a položíme $f(a) = b$. Takto definované f je prosté, neboť je-li $f(a_1) = f(a_2) = b$, pak $a_1 = g(b)$ a $a_2 = g(b)$, tj. $a_1 = a_2$.

(c) Dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je tvrzení triviální, pro $n = 2$ je obsaženo v předpokladech. Nechť tvrzení platí pro nějaké $n \geq 2$, tj. mějme bijekci $f : A^n \to A$. Platí $A^{n+1} \approx A^n \times A$ při bijekci $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \mapsto ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})$, dále $A^n \times A \approx A \times A$ při bijekci $((a_1, \ldots, a_n), a) \mapsto (f(a_1, \ldots, a_n), a)$ a nakonec $A \times A \approx A$ podle předpokladu věty. Máme tedy $A^{n+1} \approx A$, c.b.d.

(d) Buďte $f_1 : A_1 \to B_1$ a $f_2 : A_2 \to B_2$ bijekce. Je snadné ověřit, že zobrazení $f : A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2$ definované $f(a_1, a_2) = (f_1(a_1), f_2(a_2))$ je také bijekce.

4. úloha

(a) Dokažte, že existuje reálná funkce, jejíž graf protne graf každé spojité reálné funkce.

(b) Dokažte, že existuje rozklad přímky na nespočetně mnoho nespočetných po dvou disjunktních podmnožin.

(a) Protože spojitých reálných funkcí je stejně mnoho jako reálných čísel, existuje bijekce $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ (tj. $\varphi(x)$ je spojitá funkce přiřazená reálnému číslu x). Položme $f(x) = (\varphi(x))(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ (tj. $f(x)$ je hodnota funkce $\varphi(x)$ v bodě x). Dokážeme, že graf funkce f protne graf každé spojité funkce.

Je-li g spojitá, pak $g = \varphi(x)$ pro jisté $x \in \mathbb{R}$. Tudíž $f(x) = (\varphi(x))(x) = g(x)$, čili grafy f a g se protínají v bodě x.

(b) Není-li možné překážku přelézt, zkusíme ji obejít. Rozložit rovinu na systém $\mathcal{A}$ obsahující nespočetně mnoho nespočetných po dvou disjunktních podmnožin dokáže každý. Např. tak, že vezme všechny rovnoběžky s nějakou pevně zvolenou přímkou – každá přímka má mohutnost kontinua (existuje očividná bijekce na $\mathbb{R}$) a rovnoběžek s danou přímkou je také mohutnost kontinua (musejí protnout každý bod libovolně zvolené různoběžky).

Nyní vezmeme bijekci $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a systém $\mathcal{A}$ přeneseme na přímku. Nechť $\mathcal{B} = \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Je jasné, že každá množina $f(A)$ je nespočetná (neboť A je nespočetná a $f|_A$ je bijekce), $\mathcal{B}$ pokrývá celou přímku (neboť $\mathcal{A}$ pokrývá celou rovinu) a prvky $\mathcal{B}$ jsou po dvou disjunktní (neboť takové byly i prvky $\mathcal{A}$ a f je prosté).

Poznámky opravovatele: Ti nemnozí řešitelé, kteří se do úlohy pustili, ji měli vesměs správně. U obou částí se vyskytla alternativní řešení. V části (a) vyhovuje např. obyčejná funkce tangens (dodefinovaná např. nulou v bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$), avšak důkaz správnosti tohoto řešení poněkud překračuje středoškolské znalosti o spojitých funkcích. V části (b) pak lze zkonstruovat rozklad pomocí desetinných rozvojů reálných čísel.

5. úloha

Buď M množina bodů v rovině. Řekneme, že M je *pěkná*, pokud žádné tři body z M neleží na přímce a žádné tři přímky určené body z M se neprotínají v bodě neležícím v M.

(a) Dokažte, že pro každé n přirozené existuje n-prvková pěkná množina bodů v rovině.

(b) Dokažte, že existuje spočetná pěkná množina bodů v rovině.

(c) *(Mimo soutěž.)* Existuje pěkná množina bodů v rovině mohutnosti kontinua?

Zkonstruujeme množiny M_n, $n \in \mathbb{N}$, přičemž M_n bude n-prvková pěkná množina a bude platit $M_n \subset M_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Každá jednoprvková množina je zřejmě pěkná, vybereme tedy libovolný bod Z a položíme $M_1 = \{Z\}$. Nechť nyní máme zkonstruovánu pěknou n-prvkovou množinu M_n. Hledáme vhodný bod X takový, aby $M_{n+1} = M_n \cup \{X\}$ byla pěkná množina. Množina M_n obsahuje n bodů, které určují nejvýše n^2 přímek. Tyto přímky se protínají v nejvýše $(n^2)^2 = n^4$ bodech, které určují nejvýše n^8, tedy konečně mnoho, přímek. Říkejme všem těmto přímkám ošklivé. Protože konečně mnoho přímek nepokryje celou rovinu, existuje bod X neležící na žádné ošklivé přímce. Dokážeme, že takový bod X vyhovuje našim podmínkám. V $M_{n+1} = M_n \cup \{X\}$ neleží žádné tři různé body na přímce, protože v opačném případě by buď ležely tři různé body z M_n na jedné přímce (což nelze, neboť M_n je pěkná), nebo by bod X ležel na nějaké přímce určené dvěma body z M_n (což nelze, neboť taková přímka je ošklivá). Dále, kdyby se tři přímky p, q, r určené body M_{n+1} protínaly v jednom bodě mimo M_{n+1}, pak (protože M_n je pěkná) jedna z nich, řekněme p, by byla určena bodem X a nějakým bodem $Y \in M_n$. Bod X by tedy ležel na přímce určené bodem Y a průsečíkem přímek q, r, a tedy X by ležel na ošklivé přímce, což je spor. Množina M_{n+1} je tedy také pěkná, $(n+1)$-prvková.

Tím máme vyřešen konečný případ. Nyní položme $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Tato množina je zřejmě spočetná. Dokážeme, že je pěkná. Nechť leží tři různé body X, Y, Z na přímce. Protože $X, Y, Z \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, existují $k, l, m \in \mathbb{N}$ taková, že $X \in M_k$, $Y \in M_l$, $Z \in M_m$. Protože $M_i \subset M_j$ pro každá $i < j$, všechny tři body X, Y, Z leží v M_n, kde $n = \max(k, l, m)$. Tím však máme spor s pěkností množiny M_n. Analogicky se ukáže i druhá vlastnost – kdyby se tři přímky určené body M protínaly v jednom bodě mimo M, pak by tato situace nastala již v nějakém M_n, spor. Množina M je tedy pěkná spočetná.

Podobným způsobem lze dokázat existenci pěkné množiny mohutnosti kontinua, jak se můžete dočíst v seriálu.

Poznámky opravovatele: Část (a) nečinila nikomu problémy. Jen je s podivem, že poměrně snadnou úlohu, v níž nebylo třeba „ani ň“ znalostí ze seriálu, řešilo pouhých 7 studentů. Část (b) pak vyžadovala jistou nestandardní úvahu, pročež počet úspěšných klesl na (menší) polovinu.

6. úloha

Nechť A, B, U jsou libovolné množiny. Dokažte, že

(a) $U^{A\times B} \approx (U^A)^B \approx (U^B)^A$;

(b) jsou-li A, B disjunktní, pak $U^{A\cup B} \approx U^A \times U^B$;

(c) je-li $A \preceq B$, pak $U^A \preceq U^B$ a $A^U \preceq B^U$.

Principem této úlohy byla práce se zobrazeními, které nějakému zobrazení přiřadí jiné zobrazení. Po pochopení toho principu je vše jasné.

(a) Definujeme zobrazení $\varphi : (U^A)^B \to U^{A\times B}$ předpisem, který každému zobrazení $f : B \to U^A$ přiřadí zobrazení $\varphi(f) : A \times B \to U$, $(a, b) \mapsto (f(b))(a)$ (uvědomte si, že $f(b)$ je zobrazení $A \to U$). Je třeba dokázat, že φ je bijekce, tj. že je prosté a surjektivní.

Jsou-li $f, g \in (U^A)^B$, $f \neq g$, pak existuje $b \in B$ takové, že $f(b) \neq g(b)$. Pak ovšem existuje $a \in A$ takové, že $(f(b))(a) \neq (g(b))(a)$, tj. $(\varphi(f))(a, b) \neq (\varphi(g))(a, b)$, čili $\varphi(f) \neq \varphi(g)$. Zobrazení φ je tedy prosté.

Dále, je-li $h \in U^{A\times B}$, pak $h = \varphi(f)$ pro $f : B \to U^A$, které každému $b \in B$ přiřadí zobrazení $f(b) : A \to U$, $a \mapsto h(a, b)$. Zobrazení φ je tedy surjektivní.

(b) Definujeme zobrazení $\varphi : U^A \times U^B \to U^{A\cup B}$ předpisem, který každé dvojici zobrazení (f, g), $f : A \to U$, $g : B \to U$, přiřadí zobrazení $\varphi(f, g) : A \cup B \to U$, $a \mapsto f(a)$ pro $a \in A$, $b \mapsto g(b)$ pro $b \in B$. Poznamenejme, že žádná hodnota není definována dvakrát, neboť A, B jsou disjunktní. Opět je třeba dokázat, že φ je bijekce.

Jsou-li $(f, g), (f', g') \in U^A \times U^B$, $(f, g) \neq (f', g')$, pak $f \neq f'$ nebo $g \neq g'$. Tedy $f(a) \neq f'(a)$ pro nějaké $a \in A$ nebo $g(b) \neq g'(b)$ pro nějaké $b \in B$. V obou případech zjevně $\varphi(f, g) \neq \varphi(f', g')$.

Dále, je-li $h \in U^{A\cup B}$, pak $h = \varphi(h|_A, h|_B)$. Zobrazení φ je tedy surjektivní.

(c) Zvolme prosté zobrazení $\alpha : A \to B$. Definujeme zobrazení $\varphi : A^U \to B^U$ předpisem, který každému zobrazení $f : U \to A$ přiřadí zobrazení $\alpha \circ f : U \to B$. Jsou-li $f, g \in A^U$, $f \neq g$, pak $f(u) \neq g(u)$ pro nějaké $u \in U$, a tedy $\alpha(f(u)) \neq \alpha(g(u))$, protože α je prosté. Zobrazení φ je tedy také prosté, tj. $A^U \preceq B^U$.

Zvolme surjektivní zobrazení $\beta : B \to A$. Definujeme zobrazení $\psi : U^A \to U^B$ předpisem, který každému zobrazení $f : A \to U$ přiřadí zobrazení $f \circ \beta : B \to U$. Jsou-li $f, g \in U^A$, $f \neq g$, pak $f(a) \neq g(a)$ pro nějaké $a \in A$, přitom však ze surjektivity $a = \beta(b)$ pro nějaké $b \in B$, a tedy $f(\beta(b)) \neq (g(\beta(b))$. Zobrazení ψ je tedy prosté, tj. $U^A \preceq U^B$.

7. úloha

Dokažte, že existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která na každém intervalu (a, b) nabývá všech reálných hodnot (tj. pro každé $y \in \mathbb{R}$ existuje $x \in (a, b)$ takové, že $f(x) = y$).

Označme $\kappa = |\mathbb{R}|$. Snadno nahlédneme, že množina $\mathcal{I} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ všech otevřených intervalů má mohutnost kontinua. Tudíž i množina $\mathbb{R}\times\mathcal{I}$ má mohutnost kontinua. Zvolíme tedy očíslování této množiny $\mathbb{R} \times \mathcal{I} = \{(y_\alpha, I_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ ordinály z κ. Definujeme množiny A_α a funkce $f_\alpha : A_\alpha \to \mathbb{R}$ splňující pro každé $\alpha \in \kappa$ podmínky:

(1) existuje $x \in I_\alpha$ takové, že $f_{\alpha^+}(x) = y_\alpha$.

(2) $A_\beta \subset A_\alpha$ pro $\beta \in \alpha$; $|A_\alpha| = |\alpha|$.

(3) $f_\beta(u) = f_\alpha(u)$ pro každé $\beta \in \alpha$ a pro každé $u \in A_\beta$.

Pomocí těchto funkcí pak na závěr definujeme hledanou funkci.

(i) Položme $A_0 = f_0 = \emptyset$.

(ii) Mějme nyní definovány funkce $f_0, \ \ldots, f_\alpha$ tak, že jsou podmínky splněny. Protože každý interval obsahuje mohutnost kontinua reálných čísel, kdežto $|A_\alpha| = |\alpha| \prec \kappa = |\mathbb{R}|$, existuje $x \in I_\alpha \setminus A_\alpha$. Definujeme $A_{\alpha^+} = A_\alpha \cup \{x\}$, $f_{\alpha^+}(x) = y_\alpha$ a $f_{\alpha^+}(u) = f_\alpha(u)$ pro každé $u \in A_\alpha$. Všechny tři podmínky jsou zjevně splněny.

(iii) Je-li α limitní ordinál, položme $A_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} A_\beta$ a pro každé $u \in A_\alpha$ definujme zobrazení f_α předpisem $f_\alpha(u) = f_\beta(u)$, kde $\beta \in \alpha$ je libovolné takové, že $u \in A_\beta$. Zobrazení je korektně definováno, neboť hodnoty $f_\beta(u)$ jsou stejné pro všechna f_β, do jejichž definičního oboru u patří. Přitom zřejmě platí $|A_\alpha| = |\alpha|$ (sjednocení $|\alpha|$ množin mohutnosti nejvýše $|\alpha|$).

Nakonec ještě definujme

$$A_\kappa = \bigcup_{\alpha \in \kappa} A_\alpha$$

a funkci f_κ analogicky k postupu v kroku (iii) transfinitní rekurze.

Tvrdíme, že funkce f_κ je „téměř řešením“ úlohy. Je-li dán interval (a, b) a $y \in \mathbb{R}$, existuje $\alpha \in \kappa$ takové, že $(a, b) = I_\alpha$ a $y = y_\alpha$ (neboť jsme číslovali všechny takové dvojice). Podle podmínky (1) existuje $x \in I_\alpha$ takové, že $f_{\alpha^+}(x) = y_\alpha$, a tedy také $f_\kappa(x) = y_\alpha = y$.

Zobrazení f_κ by splňovalo zadání úlohy, kdyby $A_\kappa = \mathbb{R}$. Pokud tomu tak není, položíme $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus A_\kappa$. Takto dodefinovaná funkce je řešením úlohy.

Poznámky opravovatele: Blahopřeji všem šesti úspěšným řešitelům. Oceňuji nejen tři řešení analogická příkladu s funkcí na racionálních bodech ze seriálu (stejně jako řešení vzorové), ale zejména dvě krátká řešení založená na úvahách na úrovni prvního dílu seriálu a také řešení užívající desetinných rozvojů (byť zde by byl detailní důkaz poměrně technicky náročný).

8. úloha

Dokažte, že existuje množina bodů v rovině, kterou protne každá přímka v právě dvou bodech.

Označme $\mathcal{P}$ množinu všech přímek v rovině. Nejprve dokážeme, že $\mathcal{P} \approx \mathbb{R}$. Zobrazení $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathcal{P}$ přiřazující dvojici bodů (A, B) přímku AB je surjektivní, a tedy $\mathcal{P} \preceq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \approx \mathbb{R}$. Přitom vezmeme-li všechny rovnoběžky s danou přímkou, máme mohutnost kontinua různých přímek. Z Cantor-Bernsteinovy věty tedy plyne $\mathcal{P} \approx \mathbb{R}$.

Označme $|\mathcal{P}| = |\mathbb{R}| = \kappa$. Očíslujme množinu všech přímek pomocí κ, tj. označme $\mathcal{P} = \{p_\alpha : \alpha \in \kappa\}$. Zkonstruujeme transfinitní rekurzí množiny M_α takové, že M_α splňuje pro každé $\alpha \in \kappa \setminus \emptyset$ podmínky:

(1) M_{α^+} protne každou z přímek $p_0, p_1, \ \ldots, p_\alpha$ v právě dvou bodech.

(2) Žádné tři body z M_α neleží na jedné přímce.

(3) $M_\beta \subset M_\alpha$ pro každé $\beta \in \alpha$.

(4) Je-li α nekonečné, pak $|M_\alpha| = |\alpha|$. Je-li α konečné, pak $|M_\alpha|$ je konečná.

Množina M_κ definovaná jako

$$M_\kappa = \bigcup_{\alpha \in \kappa} M_\alpha$$

pak zřejmě bude řešením úlohy, neboť protne každou přímku v právě dvou bodech.

(i) Položme $M_0 = \emptyset$.

(ii) Mějme zkonstruovánu množinu M_α tak, že podmínky jsou splněny. Díky podmínce (2) tato množina protne přímku p_α v nejvýše dvou bodech. Množinu M_{α^+} definujeme v závislosti na počtu průsečíků.

– 2 *průsečíky.* Položme $M_{\alpha^+} = M_\alpha$.

– 1 *průsečík.* Položme $M_{\alpha^+} = M_\alpha \cup \{A\}$, přičemž bod A zvolíme na přímce p_α tak, aby neležel na žádné přímce určené body z M_α (takový bod na p_α určitě existuje, neboť body z M_α určují nejvýše $|M_\alpha \times M_\alpha| \preceq |\omega \times \omega| \approx \omega \prec |\mathbb{R}|$ pro α konečné, resp. $|M_\alpha \times M_\alpha| \approx |\alpha \times \alpha| \approx |\alpha| \prec |\mathbb{R}|$ pro α nekonečné).

– 0 *průsečíků.* Položme $M_{\alpha^+} = M_\alpha \cup \{A, B\}$, přičemž body $A \neq B$ zvolíme stejně jako v předchozím případě.

(iii) Je-li α limitní ordinál, položme

$$M_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} M_\beta.$$

Podmínka (4) plyne z věty o sjednocení $|\alpha|$ množin mohutnosti nejvýše $|\alpha|$, ostatní podmínky jsou splněny triviálně.

Poznámka. Nalezená množina má mohutnost kontinua. Nešla by nalézt menší? Samozřejmě ne – vezmeme-li všechny rovnoběžky s danou přímkou, máme mohutnost kontinua přímek, které jsou po dvou disjunktní. Pokud tedy chceme z každé vybrat alespoň jeden bod, bude jich mohutnost kontinua.

Poznámky opravovatele: Blahopřeji oběma úspěšným řešitelům. Oba objevili stejné řešení jako já.

9. úloha

Kolik existuje (navzájem různých) podmnožin $\mathbb{N}$ takových, že každé dvě různé mají konečný průnik?

Tuto úlohu vyřešíme podobnou fintou jako úlohu 4 (b). Nebudeme hledat podmnožiny $\mathbb{N}$, nýbrž podmnožiny jiné spočetné množiny M. Konkrétně, označme M množinu všech konečných podmnožin $\mathbb{N}$. Jak bylo ukázáno v prvním dílu seriálu, M je spočetná. Tvrdíme, že existuje mohutnost kontinua podmnožin M takových, že každé dvě různé mají konečný průnik. Víc jich ani existovat nemůže, neboť všech podmnožin spočetné množiny je také mohutnost kontinua.

Nechť A je nekonečná podmnožina $\mathbb{N}$. Označme $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ její prvky. Definujeme

$$M_A = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\}, \dots\}.$$

Je vidět, že M_A obsahuje pouze konečné podmnožiny $\mathbb{N}$, a tedy $M_A \subseteq M$. Dále, nechť jsou A, B dvě různé nekonečné podmnožiny $\mathbb{N}$, $A = \{a_1 < a_2 < \dots\}$, $B = \{b_1 < b_2 < \dots\}$. Zvolme n takové, že $a_n \neq b_n$. Potom zřejmě $\{a_1, \dots, a_n\} \neq \{b_1, \dots, b_n\}$, a tedy také $\{a_1, \dots, a_m\} \neq \{b_1, \dots, b_m\}$ pro každé $m \geq n$. Takže množiny M_A, M_B jsou různé a navíc mají nejvýše $n - 1$ (tj. konečně mnoho) společných prvků.

Označme $\mathcal{M} = \{M_A : A \subseteq \mathbb{N} \text{ nekonečná}\}$. Jak jsme ukázali, $\mathcal{M}$ obsahuje takové množiny, že každé dvě různé mají konečný průnik. Navíc, zobrazení $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus M \to \mathcal{M}$ přiřazující $A \mapsto M_A$ je bijekce. Přitom $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ má mohutnost kontinua a M je spočetná, takže $\mathcal{M} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus M$ má mohutnost kontinua.

Na závěr zvolme bijekci $\psi : M \to \mathbb{N}$ a označme $\mathcal{N} = \{\psi(M) : M \in \mathcal{M}\}$, přičemž výrazem $\psi(M)$ myslíme množinu $\{\psi(x) : x \in M\}$. Lze snadno nahlédnout, že systém $\mathcal{N}$ má požadované vlastnosti.

Poznámky opravovatele: Blahopřeji oběma úspěšným řešitelům, a to zejména *Janu Moláčkovi*, který našel ještě hezčí řešení než já. Pokud každému reálnému číslu $a = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots \in (0, 1; 1)$ přiřadíme množinu $M_a = \{a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, \dots\}$, není těžké nahlédnout, že dostaneme mohutnost kontinua navzájem různých podmnožin přirozených čísel, z nichž každé dvě mají konečný průnik.