2. série

Téma: Barvení

Termín odeslání: 5. listopadu 2001

1. úloha (3 body)

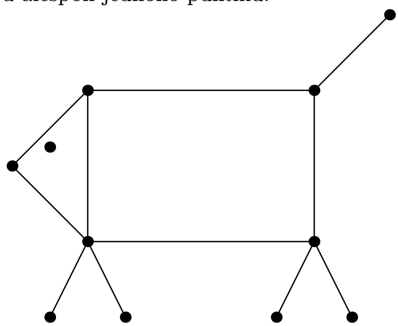
Rozhodněte, zda lze obarvit body dané kružnice dvěma barvami tak, aby každý pravoúhlý trojúhelník s vrcholy ležícími na kružnici obsahoval vrcholy obou barev. Své tvrzení dokažte.

2. úloha (3 body)

Rozhodněte, zda lze obarvit body dané kružnice dvěma barvami tak, aby každý rovnoramenný trojúhelník s vrcholy ležícími na kružnici obsahoval vrcholy obou barev. Své tvrzení dokažte.

3. úloha (3 body)

Kolika různými způsoby lze obarvit prase na obrázku, máme-li k dispozici 21 různých barev? Obarvením prasete rozumíme každé obarvení všech puntíků takovým způsobem, že každé dva puntíky, které jsou spojené úsečkou, mají různou barvu. Dvě obarvení považujeme za různá, pokud se liší barvou alespoň jednoho puntíku.



4. úloha (5 bodů)

Body prostoru jsou obarveny pěti barvami (každá z nich je použita). Dokažte, že existuje rovina, která obsahuje body alespoň čtyř barev.

5. úloha (5 bodů)

Každý mřížový bod (tj. bod v rovině, jehož obě souřadnice jsou celočíselné) je obarven jednou z 2001 barev. Rozhodněte, zda je možné vybrat 2001 svislých a 2001 vodorovných přímek tak, že všechny jejich průsečíky jsou mřížové body téže barvy.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Z vrcholů pravidelného $2n$-úhelníka je n obarveno černě a n bíle. Černá posloupnost je tvořena délkami **všech** úseček, jejichž oba konce jsou černé, seřazenými vzestupně (některé délky se mohou opakovat). Analogicky vytvoříme bílou posloupnost. Dokažte, že černá a bílá posloupnost jsou totožné.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Máme množinu $n = q^2 + 1$ bodů. Každému bodu u je přiřazena množina barev $L(u)$, která má $q + 1$ prvků tak, že pro každé dva různé body u, v platí $|L(u) \cap L(v)| \leq 1$. Dokažte, že body lze obarvit tak, že každý bod u dostane barvu z $L(u)$ a různé body jsou obarveny různými barvami. (Mimo soutěž si zkuste rozmyslet, že pro nekonečně mnoho hodnot q nestačí, aby množiny $L(u)$ měly q prvků.)

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

V rovině je několik přímek, žádné tři neprocházejí týmž bodem. Dokažte, že je možné obarvit všechny průsečíky daných přímek třemi barvami tak, že na žádné přímce nejsou dva sousední průsečíky stejnobarevné.

Řešení 2. série

1. úloha

Rozhodněte, zda lze obarvit body dané kružnice dvěma barvami tak, aby každý pravoúhlý trojúhelník s vrcholy ležícími na kružnici obsahoval vrcholy obou barev. Své tvrzení dokažte.

Ano, lze to. Ukážeme to tak, že najdeme jedno takové obarvení. Bez újmy na obecnosti si můžeme představit, že naše kružnice má střed v počátku a jednotkový poloměr. Obarvíme body v horní polorovině (tj. body s kladnou y-ovou souřadnicí) černě a body v dolní polorovině (tj. body se zápornou y-ovou souřadnicí) bíle. Dále bod $[-1, 0]$ obarvíme černě a bod $[1, 0]$ bíle. Přepona každého pravoúhlého trojúhelníku vepsaného naší kružnici je podle Thaletovy věty *průměrem* této kružnice. My jsme však kružnici (jak si pozorný čtenář snadno uvědomí) barvili tak, aby koncové body každého průměru naší kružnice měly různou barvu. Tím jsme ukázali, že v našem obarvení kružnice budou mít vrcholy tvořící přeponu libovolného pravoúhlého trojúhelníku vepsanému naší kružnici různou barvu a tedy námi hledané obarvení vyhovuje požadavkům zadání.

Poznámky opravovatele: Úloha byla velmi snadná, a tak naprostá většina řešitelů získala 3 body. O bod přišli všichni, kteří opomněli zdůvodnit, proč jejich obarvení je řešením úlohy. Imaginární bod jsem dal těm, kteří navíc dokázali, že řešením úlohy nemůže být kružnice, která má dva body „naproti sobě“ obarvené stejně.

Častá chybná představa byla, že lze body kružnice obarvovat „napřeskáčku“, tedy jeden bod jednou barvou, bod vedle něho druhou barvou atd. To ale nelze! Když si totiž na kružnici vyberu dva body, které leží libovolně blízko u sebe, vždy bude mezi nimi ležet na kružnici ještě nějaký další bod.

2. úloha

Rozhodněte, zda lze obarvit body dané kružnice dvěma barvami tak, aby každý rovnoramenný trojúhelník s vrcholy ležícími na kružnici obsahoval vrcholy obou barev. Své tvrzení dokažte.

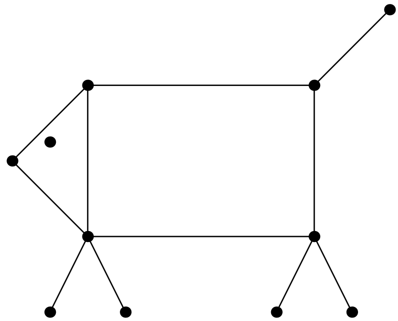
Takové obarvení kružnice neexistuje. To nejlépe ukážeme sporem. Předpokládejme tedy pro spor, že takové obarvení existuje, a uvažujme na kružnici body A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 – budou to vrcholy (nějakého) pravidelného pětiúhelníku vepsaného naší kružnici. Máme pět bodů obarvených dvěma různými barvami. Podle Dirichletova principu mezi nimi existují tři, které jsou obarveny stejnou barvou. Tyto tři však již tvoří vrcholy rovnoramenného trojúhelníku (každá trojice vrcholů pravidelného pětiúhelníku tvoří vrcholy rovnoramenného trojúhelníku), jehož vrcholy mají stejnou barvu. To je však spor, podle zadání v našem obarvení takový trojúhelník existovat nemůže. Tím je důkaz hotov.

Poznámky opravovatele: Správných řešení nebylo příliš mnoho. Řešitelé většinou různými způsoby umisťovali body na kružnici a diskutovali možnosti jejich obarvení vzhledem k už obarveným, až došli ke sporu. Ti, kteří použili trik s pravidelným pětiúhelníkem (bylo jich překvapivě málo) a nezkazili výsledný dojem dokazováním zbytečností, byli odměněni $+i$.

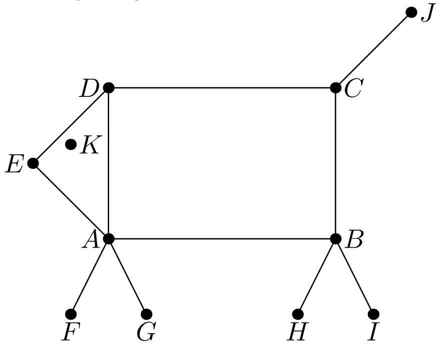
V nesprávných řešeních autoři většinou předpokládali existenci „souvislých jednobarevných úseků“ na kružnici. Avšak když střed kružnice umístíme do počátku souřadnic, bodům, jejichž spojnice se středem svírá s osou x racionální úhel (v radiánech), přiřadíme jednu barvu a ostatním druhou, tak žádný souvislý úsek nenajdeme. Řešení s argumentací typu „trojhúhelníků je nekonečně mnoho, a tak to určitě nebude platit pro všechny“ jsem ohodnotila $0 + 0i$. Rovněž chybná byla řešení využívající „sousední body“. Mezi každými dvěma body na kružnici totiž leží další! Některým ale stačilo definovat „sousední body“ jako body se vzdáleností rovnou konstantě (a co je mezi nimi, na tom nezáleží). Ti, kteří u „sousedních bodů“ využívali pouze tuto vlastnost a jinak byla jejich řešení v pořádku, si vysloužili 1 bod. Zbývající řešitelé např. zvolili libovolně rovnoramenný trojúhelník, opsali mu kružnici a tu pak obarvili. Tento postup je chybný, protože kružnici musím nejdřív obarvit a teprve pak nepřítel zadává trojúhelníky! A také to, že jste nenašli vyhovující obarvení, samozřejmě ještě neznamená, že neexistuje.

3. úloha

Kolika různými způsoby lze obarvit prase na obrázku, máme-li k dispozici 21 různých barev? Obarvením prasete rozumíme každé obarvení všech puntíků takovým způsobem, že každé dva puntíky, které jsou spojené úsečkou, mají různou barvu. Dvě obarvení považujeme za různá, pokud se liší barvou alespoň jednoho puntíku.



Označme si obarvované body tak jako na obrázku.



Označme n počet barev (úlohu vyřešíme pro obecný počet barev a poté dosadíme $n = 21$). Spočítáme nejdříve, kolika způsoby lze obarvit obdélník $ABCD$. Bod A můžeme obarvit n různými barvami. Rozlišíme dva případy – podle toho, zda body B a D mají stejnou barvu. Počet obarvení, kdy B a D mají různou barvu, je $(n-1)(n-2)$ (nejdříve obarvíme bod B barvou různou od barvy bodu A, potom bod D; musíme se vyhnout dvěma barvám). Pak nám pro bod C zbývá $(n-2)$ možností obarvení. Počet obarvení, kdy B a D mají stejnou barvu, je $(n-1)$ (jejich barva musí být různá od barvy bodu A); pro bod C pak máme $(n-1)$ možností obarvení. Celkem tedy počet obarvení obdélníku $ABCD$ je

$$n(n-1)(n-2)^2 + n(n-1)^2 = n(n-1)((n-2)^2 + n - 1).$$

Při každém obarvení obdélníku $ABCD$ lze bod E obarvit $(n-2)$ barvami, body F, G, H, I, J každý nezávisle $(n-1)$ barvami a bod K všemi n barvami. Celkem je tedy počet obarvení prasátka n barvami roven

$$n^2(n-1)^6(n-2)((n-2)^2 + n - 1).$$

Poznámky opravovatele: Sešlo se mi velké množství různých výsledků, přičemž nejmenší počet byl pouhých 207 způsobů obarvení celého prasete. Nejčastější chyba byla, že řešitel správně obarvil body A a B $21 \cdot 20$ způsoby, pak nerozdělil výpočet na dva případy – podle toho, zda body B a D mají stejnou barvu, ale pokračoval tím, že D obarvil 20 a C 19 barvami. K těmto řešením jsem psal jen: „Co když mají body B a D stejnou barvu?“ Další poměrně častá chyba byla, že řešitel tyto dva případy rozebral, ale při obarvování bodu D jinou barvou než B dával bodu D 20 místo 19 možností. Někteří řešitelé zapomněli na oko prasete, což jsem za chybu nepočítal.

4. úloha

Body prostoru jsou obarveny pěti barvami (každá z nich je použita). Dokažte, že existuje rovina, která obsahuje body alespoň čtyř barev.

Označme si a, b, c, d, e barvy, kterými jsou obarveny body prostoru, a A, B, C, D, E nějaké body prostoru, které jsou obarvené po řadě barvami a, b, c, d, e (podle zadání takové existují). Předpokládejme pro spor, že tvrzení neplatí, tj. každá rovina v prostoru obsahuje body nejvýše tří různých barev. Pak ale mezi body A, B, C, D, E neleží žádné čtyři v rovině a snadno vidíme, že každá přímka v prostoru musí obsahovat body nejvýše dvou různých barev (kdyby obsahovala body tří různých barev, lze touto přímkou a vhodným z bodů A, B, C, D, E proložit rovinu obsahující body čtyř různých barev). Označme nyní ϱ_1 rovinu obsahující přímku AB rovnoběžnou s CD, ϱ_2 rovinu obsahující přímku AC rovnoběžnou s přímkou BD a ϱ_3 rovinu obsahující přímku AD rovnoběžnou s přímkou BC. Jelikož průnik těchto tří rovin je bod A, určitě alespoň jedna z nich neobsahuje bod E. Nechť je to BÚNO rovina ϱ_1. Pak rovina proložená body A, B, E určitě protíná přímku CD v nějakém bodě P. Body A, B, E mají po řadě barvy a, b, e a bod P má jednu z barev c, d, tedy jsme našli rovinu obsahující body čtyř barev a tedy i kýžený spor.

Poznámky opravovatele: Nejčastější chybou byla tato úvaha: vezměme si extrémní případ, kdy je celý prostor bílý až na čtyři různobarevné body. Pokud třemi z nich vedeme rovinu, určitě v ní leží i body bílé, tedy čtyřbarevná rovina existuje. Tato argumentace je ale nesprávná, vyšetřuje pouze jeden případ z mnoha. Takto by bylo možné např. „dokázat“, že dokonce ve čtyřbarevném prostoru existuje čtyřbarevná rovina. To ovšem není pravda – obarvíme např. celý prostor bíle, v něm jednu rovinu zeleně, v té jednu přímku modře a na ní jeden bod červeně, každá rovina obsahuje body maximálně tří barev.

5. úloha

Každý mřížový bod (tj. bod v rovině, jehož obě souřadnice jsou celočíselné) je obarven jednou z 2001 barev. Rozhodněte, zda je možné vybrat 2001 svislých a 2001 vodorovných přímek tak, že všechny jejich průsečíky jsou mřížové body téže barvy.

Dokážeme, že to lze. Uvažujme libovolných $k = 2000 \cdot 2001 + 1$ svislých přímek a libovolných $l = 2000 \cdot 2001^k + 1$ vodorovných přímek (přímky budou takové, že se protínají v mřížových bodech). Na každé vodorovné přímce leží k průsečíků s vybranými svislými přímkami. Existuje přesně 2001^k různých způsobů, jak mohou být tyto průsečíky obarveny 2001 barvami. Vzhledem k tomu, jak jsme volili číslo l, je z Dirichletova principu jasné, že existuje mezi vybranými vodorovnými přímkami 2001 takových, že se neliší způsobem obarvení svých k průsečíků s vybranými svislými přímkami. Máme tedy 2001 vodorovných přímek a $k = 2000 \cdot 2001 + 1$ svislých přímek takových, že na každé svislé přímce je všech 2001 průsečíků stejnobarevných. Každé svislé přímce přiřadíme barvu jejích 2001 průsečíků; vzhledem k počtu svislých přímek pak z Dirichletova principu určitě existuje 2001 svislých přímek, kterým je přiřazena tatáž barva. Vezmeme-li těchto 2001 svislých přímek a již vybraných 2001 vodorovných přímek, snadno vidíme, že všechny jejich průsečíky jsou mřížové body stejné barvy.

Poznámky opravovatele: Převážná většina správných řešení byla podobná autorskému – hledané přímky nalezli řešitelé v části roviny o rozměrech alespoň $(2000 \cdot 2001 + 1) \times (2000 \cdot 2001^{2000 \cdot 2001+1} + 1)$ bodů. *Jaroslav Hájek* si uvědomil, že není nutné rozlišovat všechna obarvení sloupců, ale stačí je rozlišit jen podle různého rozmístění a barvy oněch 2001 stejnobarevných bodů, které musí být v každém sloupci obsaženy. K nalezení hledaných přímek mu tedy stačila část roviny o rozměrech pouze $(2000 \cdot 2001 + 1) \times \big(2000 \cdot 2001 \cdot \binom{2000 \cdot 2001+1}{2001} + 1\big)$ bodů, a tak obdržel $+i$.

Nejčastější chybou bylo, že si řešitelé zvolili vlastní obarvení roviny a v něm pak našli hledané přímky (pravděpodobně nepochopili dobře zadání). Několik řešitelů používalo ve svých důkazech pojmu nekonečna, ale často nesprávně.

6. úloha

Z vrcholů pravidelného $2n$-úhelníka je n obarveno černě a n bíle. Černá posloupnost je tvořena délkami **všech** úseček, jejichž oba konce jsou černé, seřazenými vzestupně (některé délky se mohou opakovat). Analogicky vytvoříme bílou posloupnost. Dokažte, že černá a bílá posloupnost jsou totožné.

Mějme tedy dán pravidelný $2n$-úhelník. Označme si jeho vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ a zavedeme konvenci $A_k = A_l$, pokud $k \equiv l \pmod{2n}$. Označme si $u_k = |A_1 A_{k+1}|$, kde $1 \le k \le n$. Nazvěme úsečku černou (resp. bílou), pokud spojuje dva vrcholy $2n$-úhelníku, které jsou oba obarveny černě (resp. bíle). Je jasné, že stačí dokázat, že v našem obarveném $2n$-úhelníku je stejný počet černých a bílých úseček délky u_k pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Mějme tedy pevné k. Nazvěme k-cyklem každou konečnou posloupnost vrcholů $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_l}$, kde $j_2 - j_1 \equiv k \pmod{2n}, j_3 - j_2 \equiv k \pmod{2n}, \ldots, j_1 - j_l \equiv k \pmod{2n}$. Takto se nám vrcholy $2n$-úhelníku rozpadnou do několika (jejich počet lze určit jako největší společný dělitel čísel k a $2n$) disjunktních k-cyklů a každá úsečka délky u_k je úsečka spojující nějaké dva sousední vrcholy nějakého k-cyklu. Dokážeme pomocné lemma:

Lemma. Rozdíl počtu černých a bílých úseček v každém k-cyklu je roven rozdílu počtu černých a bílých vrcholů tohoto k-cyklu.

Důkaz. Předpokládejme, že všechny vrcholy k-cyklu jsou černé. Pak lemma platí, protože oba rozdíly, o kterých mluví, jsou rovny počtu vrcholů našeho k-cyklu. Nyní zjistíme, co se stane, změníme-li barvu jednoho vrcholu z černé na bílou. Rozdíl počtu černých a bílých vrcholů se zjevně zmenší o dva, rozdíl počtu černých a bílých úseček také – stačí si uvědomit, že svůj stav změní pouze dvě úsečky sousedící s přebarveným vrcholem, a to buď z černé na neutrální, nebo z neutrální na bílou. Tím jsme ukázali, že přebarvením černého vrcholu na bílý zůstane lemma v platnosti. Jelikož každé obarvení k-cyklu lze zjevně dostat tak, že nejdříve obarvíme všechny vrcholy černou barvou a pak některé přebarvíme na bílo, je důkaz celého lemmatu hotov.

Nyní už si stačí uvědomit, že jsme vlastně hotovi. Rozdíl počtu černých a bílých úseček délky u_k v celém $2n$-úhelníku je roven součtu těchto rozdílů pro každý k-cyklus, ten je podle právě dokázaného lemmatu roven součtu rozdílů počtů černých a bílých vrcholů v každém k-cyklu, což je samozřejmě rozdíl počtu černých a bílých vrcholů v celém $2n$-úhelníku, a ten je podle zadání nulový. Tím je úloha vyřešena.

Poznámky opravovatele: Většina správných řešení ukázala, že počet úseček dané délky je v obou posloupnostech stejný. Pouze dvě řešení využila tuto velmi elegantní myšlenku (uvádíme jí pouze stručně): Pro každou barvu uvažujme bílou (resp. černou) smíšenou posloupnost, tvořenou všemi úsečkami, které vycházejí z bílého (resp. černého) bodu; na barvě koncového bodu nám nezáleží. Tyto posloupnosti (setříděné podle délek úseček) jsou zjevně stejné (zajímáme se jen o délky úseček, nikoliv barvy koncových bodů). Pak odstraníme z obou posloupností všechny úsečky, které mají různobarevné koncové body. Zřejmě jsme z obou posloupností odstranili tytéž úsečky a je tedy zjevné, že obě posloupnosti zůstanou totožné. Je však jasné, že v bílé posloupnosti zůstaly právě všechny bílé úsečky (každá dvakrát) a v černé posloupnosti zůstaly právě všechny černé úsečky (každá dvakrát). Tím je úloha vyřešena.

7. úloha

Máme množinu $n = q^2+1$ bodů. Každému bodu u je přiřazena množina barev $L(u)$, která má $q+1$ prvků tak, že pro každé dva různé body u, v platí $|L(u) \cap L(v)| \leq 1$. Dokažte, že body lze obarvit tak, že každý bod u dostane barvu z $L(u)$ a různé body jsou obarveny různými barvami. (Mimo soutěž si zkuste rozmyslet, že pro nekonečně mnoho hodnot q nestačí, aby množiny $L(u)$ měly q prvků.)

K řešení této úlohy se nám bude velmi hodit tzv. Hallova věta. Větu si zde zformulujeme, důkaz pro úsporu místa vynecháváme. Zvídavý čtenář jí může nalézt v mnoha knížkách, např.[1] v knize M. Aigner, G. M. Ziegler: *Proofs from the book*, Springer 1999.

Věta. (Hallova) Mějme konečný systém množin (ne nutně nepřekrývajících se) $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Pak existuje tzv. *systém různých reprezentantů*, dále (SRR), tj. posloupnost prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$ splňující $x_i \in M_i$ a $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$, právě tehdy, když platí následující podmínka:

$$\forall J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}: \qquad |J| \leq \left| \bigcup_{j \in J} M_j \right|. \tag{H}$$

Věta tedy říká, že (SRR) lze vybrat právě tehdy, když libovolný podsystém množin M_i obsahuje dohromady alespoň tolik prvků, kolik má množin (tj. alespoň tolik prvků, kolik je potřeba pro to, aby každá množina tohoto podsystému měla v (SRR) jednoho svého zástupce).

[1] Jak nám napsala jedna nejmenovaná slovenská řešitelka ...

Poznámky. Poznamenejme, že nutnost podmínky (H) pro existenci (SRR) je zřejmá. Obtížná část důkazu je postačitelnost podmínky (H) pro existenci (SRR). Jeden z možných důkazů se opírá o tzv. větu o tocích, ta je už však nad rámec tohoto textu. Někteří možná znají tuto větu jako větu o manželství – tento název vychází z trochu populárnější formulace ...

K řešení úlohy. V našem případě je využití Hallovy věty nasnadě. Množiny M_i budou množiny $L(u)$ a pokud se nám podaří pro ně najít (SRR), posloupnost po dvou různých $x(u) \in L(u)$, budeme hotovi, protože budeme moci obarvit každý bod u barvou $x(u)$. Musíme tedy jen ověřit platnost podmínky (H) z Hallovy věty. Ta v našem případě říká, že vezmeme-li libovolných $m \le n$ bodů $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}$, sjednocení $\bigcup\limits_{j=1}^{m} L(u_{i_j})$ bude mít alespoň m prvků. Pokud $m = 0$, není co řešit. Nyní předpokládejme, že máme $1 \le m \le n$ a že neplatí podmínka (H), tedy sjednocení $\bigcup\limits_{j=1}^{m} L(u_{i_j})$ má méně než m prvků. To ale znamená, že existuje barva a, která je alespoň ve $q+2$ množinách $L(u_j)$. (To nahlédneme tak, že vypíšeme prvky množin $L(u_{i_j})$ pod sebe do tabulky – v každém řádku budou prvky jedné z množin. Tabulka obsahuje celkem $m \cdot (q+1)$ políček, ale použito je v ní méně než m barev. Z Dirichletova principu dostáváme, že některá barva musí být napsána alespoň $q+2$–krát.) Uvažujme těchto $(q+2)$ množin, které obsahují barvu a. Kromě barvy a už nemohou mít žádné dvě množiny další společný prvek, a proto je počet prvků sjednocení těchto $(q+2)$ množin alespoň $1+q(q+2) = (q+1)^2 \ge q^2+1 = n \ge m$, což je spor s předpokladem, že neplatí podmínka (H). Tím je důkaz hotov.

Poznámky opravovatele: Téměř všechna správná řešení využívala Hallovu větu, *Martin Tancer* ji dokonce sám odvodil a dokázal. Taková řešení jsem ocenil $+i$. *Honza Moláček* příklad řešil vpodstatě správně matematickou indukcí (čímž ukázal, že úlohu lze vyřešit i bez Hallovy věty).

Častou chybou bylo, že si řešitelé zvolili jedno konkrétní obsazení množin barev v souladu se zadáním a na tom ukázali platnost tvrzení. Úlohu však bylo třeba vyřešit pro všechna možná obsazení. Mnozí z vás za důkaz považovali to, že barev je více než bodů. Rozmyslete si ale, že je potřeba, aby v každé podmnožině bodů bylo více barev než bodů. Chybou též bylo vyšetřit krajní případy, kdy všechny průniky množin barev jsou buď jenom prázdné, nebo jenom jednoprvkové, a z toho usoudit obecnou platnost. Též řešení založená na zjištění maximálního počtu průniků nevedla k cíli, neboť ačkoliv určit tento počet není obtížné, nelze o těchto průnicích již dále nic říct.

8. úloha

V rovině je několik přímek, žádné tři neprocházejí týmž bodem. Dokažte, že je možné obarvit všechny průsečíky daných přímek třemi barvami tak, že na žádné přímce nejsou dva sousední průsečíky stejnobarevné.

Můžeme BÚNO předpokládat, že žádné dva průsečíky některých dvojic přímek nemají stejnou x-ovou souřadnici (kdyby měly, můžeme všechny přímky trochu pootočit ...). Označme si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ všechny průsečíky dvojic přímek seřazené vzestupně podle jejich x-ové souřadnice. Vyhovující obarvení budeme konstruovat následovně.

(i) Bod A_1 obarvíme barvou 1.
(ii) Máme-li již obarvené body $A_1, A_2, \ldots, A_k$, kde $k < n$, bod A_{k+1} obarvíme nejmenší barvou (tj. přiřadíme nejmenší číslo) takovou, že žádný již obarvený soused bodu A_{k+1} nebude mít stejnou barvu. Jelikož všechny již obarvené body leží „více vlevo" (tj. mají menší x-ovou souřadnici), než A_{k+1}, má bod A_{k+1} nejvýše dva již obarvené sousedy. Bod A_{k+1} je totiž průsečíkem dvou přímek a jediní dva kandidáti na obarvené sousedy jsou průsečíky ležící na těchto přímkách bezprostředně vlevo od A_{k+1}. Ty jsou nejvýše dva (na každé přímce jeden), a tedy bod A_{k+1} jsme obarvili některou z barev $1, 2, 3$.

Je jasné, že aplikací těchto pravidel po n krocích dostaneme kýžené obarvení průsečíků nejvýše třemi barvami.

Poznámky opravovatele: Tuto úlohu poslalo mnoho řešitelů. Bohužel podstatně méně ji skutečně vyřešilo. Mnozí z vás konstatovali, že vzniklý „obrázek" lze rozdělit na mnohoúhelníky a ty umíme obarvit, tedy hledané obarvení existuje. To je ovšem neplatné použití obrácené věty, jinými slovy, pokud existuje nějaké obarvení „obrázku", pak lze obarvit všechny mnohoúhelníky, ale není důvod, proč by to mělo platit obráceně. Druhým velice častým nešvarem bylo, že jste příklad nějak rozebrali, nějak i dokázali, ale tiše jste předpokládali, že si body pro obarvování budeme vybírat „vhodně". Ne vždy jsem měl takové nervy, abych vymýšlel protipříklad, takže pokud ho v opraveném řešení nenajdete nebo bude špatný, promiňte mi to. Další se pokoušeli více či méně vědomě o indukci, ale to se vám (až na jeden případ) také nikomu nezdařilo. Správná řešení se opírala o teorii grafů či o trik postupného obarvování z jedné strany.