1. série

Téma: Maxima a minima

Termín odeslání: 15. října 2001

1. ÚLOHA (3 BODY)

Organizátoři semináře vybírají úlohy do nového ročníku, sedí přitom okolo stolu, na němž leží několik (různě velkých) pivních tácků ve tvaru kruhu a na každém z nich je sklenička hruškového džusu. Robert si všimnul, že vzdálenost libovolných dvou tácků je alespoň tak velká jako součet jejich poloměrů. Pavel podotknul, že navíc vzdálenost libovolného tácku od okraje stolu je přinejmenším rovna jeho poloměru. Dokažte, že tácky zakrývají maximálně čtvrtinu plochy stolu. (Vzdáleností dvou tácků rozumíme vzdálenost jejich nejbližších bodů.)

2. ÚLOHA (3 BODY)

Najděte taková reálná x, y, pro něž je $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$ a přitom $x + y$ je největší možné.

3. ÚLOHA (3 BODY)

V levém dolním rohu šachovnice 4×4 stojí běžná šestistěnná hrací kostka[1] (zabírá právě jedno políčko). Pavel ji chce dostat do pravého horního rohu pomocí šesti překlopení podél její hrany. Přitom chce, aby součet sedmi čísel, která přitom budou nahoře, byl co nejmenší (může si vybrat počáteční polohu kostky). Jakého nejmenšího součtu může docílit?

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte reálná čísla p, q tak, aby rovnice $x^2 + px + q + 1 = 0$ měla reálné řešení a součet $p^2 + q^2$ byl nejmenší možný.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Kolik nejvíce šachových jezdců je možné rozmístit na šachovnici $2n \times 2n$ ($n \geq 1$ je přirozené číslo) tak, aby se žádní dva z nich neohrožovali?

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť je dán trojúhelník ABC. Uvažujme bod P strany BC. Nechť Q je ten průsečík úsečky AP s kružnicí trojúhelníku ABC vepsanou, který je blíž bodu A. Pro který bod P nabývá výraz $|AQ|/|AP|$ svého (a) maxima, (b) minima?

---

[1] Tj. kostka ve tvaru krychle, na jejíž stěnách jsou čísla od 1 do 6 rozmístěna standardním způsobem – vždy na protilehlých stěnách jsou dvojice čísel 1 – 6, 2 – 5 a 3 – 4.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)
Matematik Norbert má dvě chaty. Poblíž vede (nekonečně) dlouhá silnice ve směru východozápadním, obě chaty jsou na sever od ní, žádná jiná silnice poblíž není. Norbert chce vybudovat silnice (s co nejkratší celkovou délkou), po nichž by se mohl do obou svých chat z východozápadní silnice dostat. Jak to má udělat? (Poznámka: Jak každý ví, Země je placatá.)

8. ÚLOHA (5 BODŮ)
Začínající zahradník pan Chrudoš Zahradník chce oplotit u svého domku zahrádku. Má k dispozici n kůlů ($n \geq 3$) a l metrů pletiva, zahrádka má přiléhat ke zdi jeho domku, která je dlouhá s metrů ($s < l$). Zahrádka tedy bude mít tvar n-úhelníku, jehož jednu stranu bude tvořit s metrů dlouhá zeď domku (celá) a ostatních $n-1$ stran bude mít součet délek maximálně l metrů. Jak má pan Zahradník postupovat, aby oplotil co největší plochu?

Řešení 1. série

1. úloha
Organizátoři semináře vybírají úlohy do nového ročníku, sedí přitom okolo stolu, na němž leží několik (různě velkých) pivních tácků ve tvaru kruhu a na každém z nich je sklenička hruškového džusu. Robert si všimnul, že vzdálenost libovolných dvou tácků je alespoň tak velká jako součet jejich poloměrů. Pavel podotknul, že navíc vzdálenost libovolného tácku od okraje stolu je přinejmenším rovna jeho poloměru. Dokažte, že tácky zakrývají maximálně čtvrtinu plochy stolu. (Vzdáleností dvou tácků rozumíme vzdálenost jejich nejbližších bodů.)

Představme si, že každý tácek dvakrát zvětšíme (jeho střed zůstane na místě). Za chvíli si ukážeme, že tyto zvětšené tácky se nepřekrývají a nepřečnívají přes okraj stolu. Součet jejich obsahů je tedy nejvýše roven ploše stolu. Ovšem původní tácky zakrývají čtyřikrát menší plochu (každý z nich má dvakrát menší poloměr), takže opravdu zakrývají nejvýše čtvrtinu plochy stolu.

Zbývá jen dokázat, že se zvětšené tácky nepřekrývají a nepřečnívají přes okraj stolu. Dokážeme jen první z těchto tvrzení, druhé je analogické a jednodušší, rozmysli si ho sám. Vezměme tedy dvojici tácků T_1 a T_2, označme jejich středy po řadě S_1 a S_2 a jejich poloměry po řadě r_1 a r_2. Úsečka spojující středy S_1 a S_2 protíná okraje tácků po řadě v bodech U_1 a U_2. Podle zadání je ovšem vzdálenost bodů U_1 a U_2 větší nebo rovna $r_1 + r_2$. Vidíme tedy, že pro vzdálenost středů platí

$$|S_1S_2| = |S_1U_1| + |U_1U_2| + |U_2S_2| \geq r_1 + (r_1 + r_2) + r_2 \geq 2r_1 + 2r_2.$$

Vidíme tedy, že vzdálenost středů tácků je větší nebo rovna součtu dvojnásobků jejich poloměrů. Tedy tácky o dvojnásobných poloměrech se stále ještě nepřekrývají (nejvýše se dotýkají), což jsme chtěli dokázat.

Poznámky opravovatele: Řešení první úlohy byla ve většině správná. Jen několik jich nebylo obecných – řešitelům, kteří si vybrali speciální tvar nebo rozměr stolu a tácků, doporučuji k nahlédnutí vzorové řešení.

2. úloha

Najděte taková reálná x, y, pro něž je $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$ a přitom $x + y$ je největší možné.

Upravme rovnost v zadání

$$1 = (x + y)^2 + 3y^2 \geq (x + y)^2 \tag{$\heartsuit$}$$

(číslo y je reálné, takže $3y^2 \geq 0$). Tudíž pro libovolná x, y splňující zadání platí $|x + y| \leq 1$. Největší možný součet $x + y$ tedy nemůže být větší než 1. Zvolíme-li $x = 1$, $y = 0$, platí $x + y = 1$ i $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$, tedy tato dvojice je řešením. Jiná řešení neexistují. Pokud pro nějaké další řešení x', y' platí $x' + y' = 1$, musí v nerovnosti ($\heartsuit$) nastat rovnost a tedy platí $3{y'}^2 = 0$, tedy $y' = 0$ a odtud už snadno $x' = 1$. Nalezené řešení je tedy jediné.

Poznámky opravovatele: Správná řešení této úlohy se většinou buď podobala vzorovému, nebo využila vzoreček pro řešení kvadratické rovnice a pak našla více či méně důvěryhodně maximum výrazu $x+y = \pm\sqrt{1 - 3y^2}$. Krom toho se vyskytlo i několik řešení pomocí derivací, ba i vázaných extrémů.

Spousta řešitelů se přitom dopustila následující chyby: z výrazu typu $a^2 = b$ vyvodila $a = \sqrt{b}$. Ignorovala tím možnost $a = -\sqrt{b}$, kdy a je záporné číslo. Vedle tohoto zločinu se jeví zcela nepodstatnou záměna termínů „kladný“ a „nezáporný“ (druhý z nich zahrnuje i číslo 0).

3. úloha

V levém dolním rohu šachovnice 4×4 stojí běžná šestistěnná hrací kostka[2] (zabírá právě jedno políčko). Pavel ji chce dostat do pravého horního rohu pomocí šesti překlopení podél její hrany. Přitom chce, aby součet sedmi čísel, která přitom budou nahoře, byl co nejmenší (může si vybrat počáteční polohu kostky). Jakého nejmenšího součtu může docílit?

Nejlepší způsob, jak nalézt správnou odpověď, je nakreslit si všechny možné cesty kostky po šachovnici (rozmyslete si, že těchto cest je dvacet, ovšem stačí zkoumat jen deset, ostatní jsou symetrické[3]) a pozorovat, jak se mění číslo, které je zrovna nahoře. Takto při troše pozornosti přijdeme na to, že když postavíme na začátku kostku číslem 2 nahoru, číslem

[2] Tj. kostka ve tvaru krychle, na jejíž stěnách jsou čísla od 1 do 6 rozmístěna standardním způsobem – vždy na protilehlých stěnách jsou dvojice čísel 1 – 6, 2 – 5 a 3 – 4.

[3] Při troše šikovnosti se lze dokonce omezit jen na sedm různých cest (pozn. aut.).

3 vlevo a číslem 1 směrem k nám a pohybujeme s ní dvakrát nahoru, vpravo, nahoru a dvakrát vpravo, objeví se na horní straně postupně čísla 2, 1, 5, 3, 6, 2, 1, jejich součet je 20. Také se nám nepodaří najít cestu s menším součtem, ovšem kdybychom to chtěli dokázat takto přímočaře, museli bychom vypsat všechny cesty a všechny počáteční polohy kostky.

To naštěstí dělat nemusíme, stačí učinit několik jednoduchých objevů, které popisují vlastnosti společné všem těmto cestám. Jejich pomocí pak dokážeme, že pro žádnou cestu není součet menší než 20. Pro snazší vyjadřování nazveme hodnotou políčka (přes které kostka přešla) číslo, které bylo nahoře, když kostka na tomto políčku stála.

(1) Pokud z políčka s hodnotou a posuneme kostku nahoru, tak první další pohyb kostky nahoru povede na políčko s hodnotou $7 - a$. Stačí si uvědomit, že po prvním pohybu nahoru míří strana kostky s číslem $7-a$ (tj. ta, která byla předtím dole) směrem k spodní straně šachovnice, to se při pohybu vpravo nezmění, dalším pohybem nahoru se tato strana stane stranou horní.
(2) Analogické tvrzení platí, pokud první pohyb učiníme vpravo.
(3) Pokud nad políčkem s hodnotou a jsou alespoň dvě řady a vpravo od něj alespoň dva sloupce, tak kostka přešla přes políčko s hodnotou $7-a$. To zjistíme spojením předchozích dvou bodů, pokud první tah z políčka s hodnotou a vede např. nahoru, tak podle prvního bodu stačí počkat na další tah nahoru, ten ovšem musí někdy přijít, jelikož ještě nejsme v horní řadě.
(4) Mezi dvěma políčky s hodnotou a projde kostka přes políčko s hodnotou $7-a$. To dokážeme podobně jako první dva body, pokud z prvního políčka s hodnotou a vyjdeme např. nahoru, tak při pohybu doprava se číslo a zopakovat nemůže (je na straně kostky mířící od nás), při prvním pohybu nahoru narazíme na číslo $7 - a$.

Uvažme nyní první dvě políčka na cestě kostky, označme jejich hodnoty a a b. Podle třetího pozorování se na cestě vyskytnou políčka s hodnotami $7 - a$ a $7 - b$. Označme tato políčka jako P, množinu jejich hodnot jako A. Množina A obsahuje čtyři různá čísla (a a b leží na sousedních stranách kostky), takže P je tvořeno čtyřmi políčky. Víme už, že součet jejich hodnot je roven 14. Stačí ukázat, že součet hodnot zbylých políček naší cesty je alespoň šest. Pokud se na zbylých políčkách žádné číslo neopakuje, jsme hotovi (dostaneme součet alespoň $1+2+3=6$), nechť se tedy některá z hodnot opakuje, tj. tři neprozkoumaná políčka mají hodnoty x, x a y. Pokud x není rovno žádnému z čísel z A, tak mezi dvěma x leží $7-x$, což musí být rovno y. Pokud je $x \in A$, tak existují tři políčka s hodnotou x (jedno z těchto políček je v P), v každé ze dvou „mezer" leží políčko s hodnotou $7-x$, jedno z nich leží v P, druhé však nikoli, jeho hodnota je tedy y, čili opět $y = 7 - x$. V obou případech je součet všech čísel roven $21 + x > 20$. Tím jsme dokázali, že každá cesta má součet alespoň 20, jednu cestu se součtem 20 jsme objevili, takže 20 je správná odpověď!

Poznámky opravovatele: Hlavní myšlenka většiny řešení by se dala shrnout do věty: „Je jasné, že každé číslo se nahoře objeví aspoň jednou a jedno se objeví dvakrát, nejmenší součet je tudíž $1+2+3+4+5+6+1 = 22$." Bohužel, nic takového nejen že není jasné, ale dokonce to vůbec neplatí (takže $0+0i$). Ti řešitelé, kteří dospěli ke správnému výsledku (20), většinou nějakým způsobem rozebírali všechny možnosti. *Martin Dungl* objevil, že existují dvě různé kostky vyhovující zadání (zkuste si to také rozmyslet), byl oceněn i-čkem. *Zdeněk*

Tichý dokázal velmi pěkný odhad nejmenšího a největšího součtu u šachovnice o rozměrech $n \times n$ $(+2i)$.

4. úloha
Najděte reálná čísla p, q tak, aby rovnice $x^2 + px + q + 1 = 0$ měla reálné řešení a součet $p^2 + q^2$ byl nejmenší možný.

Nejprve si povšimněme, že zadaná rovnice má reálné řešení právě tehdy, když je diskriminant rovnice $p^2 - 4(q+1)$ nezáporný, neboli když

$$p^2 \geq 4(q+1)\,.$$

Pokud platí tato nerovnost, snadno odvodíme odhad

$$p^2 + q^2 \geq 4q + 4 + q^2 = (q+2)^2.$$

Dále máme zjevnou nerovnost

$$p^2 + q^2 \geq q^2.$$

Nyní si stačí uvědomit, že vždy je alespoň jedno z čísel q^2 a $(q+2)^2$ větší nebo rovno jedné (stačí rozebrat případy $|q| \geq 1$ a $|q| < 1$). Odtud dostáváme, že vždy platí

$$p^2 + q^2 \geq 1.$$

Z výše provedených úvah snadno přijdeme na to, že rovnost bude splněna právě tehdy, když $p = 0$ a $q = -1$. Tato dvojice je tedy řešením úlohy.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů nalezla vhodné parametry p a q, ale problémem bylo dokázat, že jsou nejlepší. Spousta řešitelů argumentovala slovy: Potřebujeme nejmenší hodnotu výrazu $p^2 + q^2$, tedy nejlepší bude nejmenší hodnota $|p|$ nebo $|q|$. Z následujícího příkladu bude ale zřejmé, že je potřeba více argumentů.

Příklad: Nechť p a q jsou reálná čísla, pro něž platí rovnost $p + q = 1$. Nalezněte nejmenší hodnotu výrazu $p^2 + q^2$. Řešením je dvojice $p = q = \frac{1}{2}$ a nejmenší hodnota je $\frac{1}{2}$.

5. úloha
Kolik nejvíce šachových jezdců je možné rozmístit na šachovnici $2n \times 2n$ ($n \geq 1$ je přirozené číslo) tak, aby se žádní dva z nich neohrožovali?

Pro $n = 1$ rozmisťujeme na jezdce šachovnici 2×2. V tomto případě lze postavit jezdce na všechna čtyři políčka a žádní dva se neohrožují. Pro větší n je hledaný počet roven $2n^2$, tj. polovina ze všech políček. Nalézt umístění tolika jezdců je snadné, stačí šachovnici obarvit obvyklým způsobem a umístit jezdce na všechna bílá políčka. Protože jezdec na bílém poli ohrožuje jen pole černá, je toto umístění vyhovující. Zbývá tedy dokázat, že více navzájem se neohrožujících jezdců už umístit nelze. K tomu stačí, když políčka šachovnice rozdělíme do párů tak, že umístíme-li na dvě políčka libovolného páru jezdce, budou se ohrožovat. Pokud se nám to podaří, bude jasné, že z každého páru políček je nejvýše jedno obsazeno jezdcem, čili je obsazena maximálně polovina políček.

Takové rozdělení do párů (zkráceně párování) je snadné pro obdélník 4×2 (zkus si nakreslit obrázek!). Pokud je n sudé, můžeme šachovnici $2n\times 2n$ pokrýt obdélníky 4×2, takže párování nalezneme lehce. Pro n liché (a větší než 1) je postup složitější. Uvážíme zvlášť centrální šachovnici $2(n-2)\times 2(n-2)$ a zvlášť pás o šířce dvou políček na okraji. Pás snadno rozdělíme na obdélníky 4×2, takže v něm párování najdeme. Stačí tedy najít párování ve čtverci se stranou o čtyři kratší. Takto dojdeme až k dělení čtverce 6×6 na čtverec 2×2 a vnější pás. Označme horní políčka malého čtverce jako a, b. Když si nakreslíme obrázek, tak si snadno všimneme, že v horním obdélníku 4×2 existuje pár (A,B) tak, že A je na skok jezdce vzdáleno od a, B od b. Můžeme tedy místo páru (A,B) vzít páry (a,A) a (b,B). Symetricky naložíme se spodními políčky vnitřního čtverce. Tím jsme dokázali, že v každé šachovnici $2n\times 2n$ pro $n\geq 2$ existuje párování, čímž je důkaz hotov.

Poznámky opravovatele: Řešení se mělo skládat ze dvou částí – z dolního odhadu a z horního odhadu. Nejprve se mělo ukázat, že jezdců (tj. koňů, někteří řešitelé si pletli jezdce se střelcem) lze na šachovnici umístit alespoň $2n^2$. Tuto část měla většina řešitelů správně. Dostali za ni jeden bod. S druhou částí řešení už 90% řešitelů mělo problémy. Muselo se **dokázat**, že neexistuje rozestavení více než $2n^2$ jezdců na šachovnici, které vyhovuje zadání. Jiné správné důkazy než ty podobné autorskému řešení se neobjevily. Mnozí z vás se snažili svá tvrzení dokázat tak, že na šachovnici postavili libovolně jednoho jezdce a nějakým způsobem postupně probírali možnosti, kam přidat další, či sestavili nějaké rozestavení s $2n^2$ jezdci a pak dokazovali nemožnost přidání dalšího jezdce různými přesuny jiných jezdců, či prostě konstatovali, že maximálního počtu dosáhneme tehdy, když bude každé neobsazené pole maximálně ohrožované atp. Takovéto postupy většinou nikam nevedou, protože se téměř vždy na něco zapomene a zbydou pak nějaké neprozkoumané možnosti. Kde jsem mohl, uváděl jsem k neplatným tvrzením různé protipříklady. Za tuto část řešení jsem dával maximálně čtyři body.

6. úloha

Nechť je dán trojúhelník ABC. Uvažujme bod P strany BC. Nechť Q je ten průsečík úsečky AP s kružnicí trojúhelníku ABC vepsanou, který je blíž bodu A. Pro který bod P nabývá výraz $|AQ|/|AP|$ svého (a) maxima, (b) minima?

Označme k kružnici vepsanou, l kružnici připsanou ke straně BC, tj. kružnici, která se dotýká úsečky BC, přímek AC, AB a leží vně trojúhelníku ABC. Označme D_A dotykový bod l a BC, analogicky označme body D_B, D_C. Označme t koeficient stejnolehlosti se středem v bodě A, která převádí kružnici k na l, označme dále Q' obraz bodu Q v této podobnosti. Při tomto označení platí

$$\frac{|AQ|}{|AP|}=\frac{|AQ'|}{t\cdot|AP|}\geq\frac{1}{t}\,,$$

přičemž v poslední nerovnosti nastává rovnost právě tehdy, když je $P=Q'$, neboli $P=D_A$. V tomto bodě (a jenom v něm) tedy zkoumaný poměr nabývá svého minima. Svého maxima nabyde, bude-li P rovno tomu z bodů B, C, který je blíž k A. Abychom toto dokázali, uvědomme si, že hodnota poměru $|AQ'|/|AP|$ je vlastně koeficient stejnolehlosti se středem v bodě A, která zobrazuje úsečku BC na úsečku $B'C'$, která prochází bodem Q'. Svého maxima tedy poměr $|AQ'|/|AP|$ nabyde v případě, kdy vzdálenost úsečky $B'C'$ od bodu A bude maximální. Je snadno vidět, že to nastane ve zmíněném případě.

Poznámky opravovatele: Riešení prišlo mnoho, no ani polovička z nich nebola správne. Zhrnula by som to takto: rozbor (nie všetkých) špeciálnych prípadov na vyriešenie úlohy zďaleka nestačí. A taktiež, ani tvrdé finty z oblasti diferenciálneho počtu by ste nemali očakávať, veď geometria má aj názornejšie metódy.

7. úloha

Matematik Norbert má dvě chaty. Poblíž vede (nekonečně) dlouhá silnice ve směru východozápadním, obě chaty jsou na sever od ní, žádná jiná silnice poblíž není. Norbert chce vybudovat silnice (s co nejkratší celkovou délkou), po nichž by se mohl do obou svých chat z východozápadní silnice dostat. Jak to má udělat? (Poznámka: Jak každý ví, Země je placatá.)

Lehce nahlédneme, že Norbert má jen dvě principiálně odlišné možnosti, jak postupovat: První je budovat od obou chat silnice nezávisle, tj. od každé přímo na jih, v tomto případě postaví silnice v celkové délce rovné součtu vzdáleností obou chat od hlavní silnice. Druhá možnost je vést od každé z chat přímou silnici na rozcestí (označme ho R) a z něj kolmo k hlavní silnici (patu kolmice označíme P), eventuálně může rozcestí být v jedné z chat. Prozkoumejme, jaká je optimální volba rozcestí v této druhé možnosti. Označme Norbertovy chaty A a B. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že A leží na jih a na západ od B (tj. x-ová i y-ová souřadnice bodu A je menší nebo rovna příslušné souřadnici bodu B). Kdyby tomu tak nebylo, můžeme chaty přeznačit, případně provést osovou souměrnost podle nějaké severo–jižní přímky. Uvažme rotaci okolo bodu A o úhel $60°$ proti směru hodinových ručiček, označme B' a R' obrazy bodů B a R, dále označme Q patu výšky z B' na hlavní silnici. Lehce nahlédneme, že $|BR| = |B'R'|$ (otočení zachovává vzdálenosti) a $|AR| = |RR'|$ (trojúhelník ARR' je rovnostranný). Tudíž Norbert v tomto případě postaví silnice o délce

$$|AR| + |BR| + |RP| = |B'R'| + |R'R| + |RP|\,.$$

Na pravé straně je délka lomené čáry $B'R'RP$, tato délka je zjevně alespoň rovna $|B'Q|$. Bod R je tedy optimální, pokud body $B'R'RP$ leží v tomto pořadí na úsečce $B'Q$. Pokud bod A leží západně od $B'Q$, tak takový bod R nalezneme snadno, stačí z bodu A vést polopřímku pod azimutem $120°$, její průsečík s $B'Q$ je kýžený bod R. Pokud bod A leží východně od $B'Q$, tak bod R uvedených vlastností neexistuje, optimální volbou je v tomto případě $R = A$. Abychom toto dokázali, označme O patu kolmice z bodu A na hlavní silnici. Pokud by bylo rozcestí západně od A (tím myslíme, že rozcestí má menší x-ovou souřadnici, tj. nemusí být přesně na západ), můžeme ho posunout na východ (až na úsečku AO), a tak délku silnic zmenšit. Pokud je rozcestí severněji než úsečka AB, posuneme je na jih (až na úsečku AB), pokud východně od B, tak na západ. V obou případech se tak délka silnic zmenší. V souhrnu zjišťujeme, že bod R leží na jih od úsečky AB. Chceme nyní odhadnout délku lomené čáry $B'R'RP$. Uvažujme přímku a procházející bodem A rovnoběžnou s hlavní silnicí. Ta určitě protíná lomenou čáru $B'R'RP$, průsečík si označme A' a patu kolmice z bodu A' na hlavní silnici si označme jako O'. Je nyní vidět, že délka lomené čáry $B'R'RP$ je alespoň rovna délce lomené čáry $B'A'O'$ a ta je alespoň rovna délce lomené čáry $B'AO$, tedy $|BA| + |AO|$. Jinými slovy, žádná z poloh bodu R není lepší než $R = A$ (a dokonce všechny ostatní polohy jsou horší).

Můžeme tedy shrnout, že optimální rozmístění silnic je jedno z následujících (stále předpokládáme, že A je na jih a na západ od B):

(1) z obou chat vede silnice přímo k hlavní silnici;
(2) z B vede silnice do A a odtud přímo k hlavní silnici;
(3) silnice tvoří „Y", rozcestí nalezneme výše popsaným způsobem pomocí rotace okolo A.

Norbert tedy změří každou z těchto variant a vybere nejlepší z nich. Může případně z úhlu mezi AB a hlavní silnicí poznat, jestli je lepší druhá možnost (to bude pro úhel alespoň $30°$) nebo třetí možnost (pro úhel menší než $30°$). Jestli je nejlepší první možnost, zjistíme nejsnáze změřením její délky a délky lepší z druhých dvou.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů zapomněla na některou možnost, jak cesty postavit, jiní nezapomněli, ale neodůvodnili. K těm druhým jsem byl velmi shovívavý. Za řešení bez použití derivování jsem udělil $+i$.

8. úloha

Začínající zahradník pan Chrudoš Zahradník chce oplotit u svého domku zahrádku. Má k dispozici n kůlů ($n \geq 3$) a l metrů pletiva, zahrádka má přiléhat ke zdi jeho domku, která je dlouhá s metrů ($s < l$). Zahrádka tedy bude mít tvar n-úhelníku, jehož jednu stranu bude tvořit s metrů dlouhá zeď domku (celá) a ostatních $n - 1$ stran bude mít součet délek maximálně l metrů. Jak má pan Zahradník postupovat, aby oplotil co největší plochu?

Úlohu lze přeformulovat asi takto: *Nalezněte n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ maximálního obsahu, je-li $|A_1A_n| = s$ a $|A_1A_2| + |A_2A_3| + \cdots + |A_{n-1}A_n| \leq l$, kde s a l jsou daná kladná čísla, $s < l$.*

Na úvod je dobré poznamenat, že maximální obsah dostaneme, nastane-li zadané nerovnosti rovnost, tedy použijeme-li celé pletivo.[4] Toto tvrzení snadno nahlédneme. To, že se vyplatí použít všechny kůly, je již součástí řešení, neboť každé řešení s méně než n kůly odpovídá n-úhelníku, ve kterém jsou některé úhly přímé.

Intuitivně odhadneme, že hledaným maximálním řešením bude *tětivový* n-úhelník, pro který platí $|A_1A_2| = |A_2A_3| = \cdots = |A_{n-1}A_n|$. Pracovně tento n-úhelník nazývejme *symetrický n-úhelník.* (Rozmyslete si, že definice symetrického n-úhelníku je již jednoznačná.)

---

[4] Přesněji tím rozumíme toto: Pro každý n-úhelník, který nevyužije celou délku pletiva existuje n-úhelník s větším obsahem, který využije celou délku pletiva. Předem totiž nevíme, zda existuje nějaká optimální situace.

Postupů, jak dokázat, že symetrický n-úhelník je řešením úlohy, je celá řada. Na okraj uveďme „fyzikální" přístup, kdy uvažujeme, že uvnitř n-úhelníku je plyn o nějakém tlaku a soustava je v silové rovnováze, právě když je obsah maximální. Podobné úvahy jsou sice názorné, nicméně k jejich preciznímu matematickému provedení je třeba velmi silný aparát, který přesahuje rámec našeho semináře.

Většina řešitelů použila následující postup. Řešení úlohy pro $n = 3$ je zřejmé. Vyřešme úlohu pro $n = 4$, tedy nalezněme čtyřúhelník s danou stranou a obvodem, který má maximální obsah. Podle *Brahmaputrovy věty* nebo též *Heronova vzorce* pro čtyřúhelník platí pro obsah čtyřúhelníka

$$P \leq \sqrt{(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c)(\sigma - d)}, \text{ kde } \sigma = \frac{a + b + c + d}{2},$$

přičemž rovnost nastává pro tětivové čtyřúhelníky. Naznačme alespoň, jak se toto zajímavé tvrzení dokáže. Zřejmě platí $P = (ef/2)\sin\varphi$, kde e, f jsou délky úhlopříček a φ úhel jimi sevřený. Několikanásobným použitím kosínové věty lze navíc ukázat rovnost $|a^2 - b^2 + c^2 - d^2| = 2ef|\cos\varphi|$. Odtud se snadno vyjádří $16P^2 = 4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$. Použijeme-li nyní *Ptolemaiovu nerovnost* $ef \leq ac + bd$ (rovnost nastává pro tětivové čtyřúhelníky), dostaneme po úpravách Heronův vzorec.

Nechť je tedy dané d a $l = a + b + c > d$. Pak podle AG-nerovnosti platí

$$(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c) \leq \frac{(3\sigma - l)^3}{27},$$

odkud podle Heronova vzorce plyne

$$P \leq \frac{1}{36}\sqrt{3(l - d)(l + 3d)^3}.$$

Rovnost nastává pouze v případě tětivového čtyřúhelníka s $a = b = c$, tento čtyřúhelník má tedy maximální obsah.

Nyní uvažme pro $n > 4$ libovolný nesymetrický n-úhelník. Určitě existují jeho body A_k, A_{k+1}, A_{k+2}, A_{k+3} tak, že čtyřúhelník $A_kA_{k+1}A_{k+2}A_{k+3}$ není symetrický a podle výše dokázaného tvrzení lze jeho změnou na symetrický čtyřúhelník zvětšit obsah celého n-úhelníku.

Odtud ještě ale neplyne, že symetrický n-úhelník je hledaným řešením. Je třeba dokázat, že maximum vůbec existuje. Komu se to zdá zbytečné, nechť zváží, nakolik je tato úloha podobná tvrzení, že 1 je největší přirozené číslo, protože libovolné jiné přirozené číslo lze umocněním na druhou zvětšit.

V zásadě existují tři způsoby, jak se s tímto problémem vypořádat. Buď použijeme nějakou relativně silnou obecnou větu, ze které existence maxima jednoduše plyne[5]. Druhou možností je přímo využít „spojitost" problému, přesněji to, že pokud dva n-úhelníky mají blízké velikosti stran a úhlů, mají i blízké obsahy. Lze například dokázat, že po konečném

[5]Pro zkušenější čtenáře poznamenejme, že v našem případě lze použít tvrzení, že každá spojitá funkce na kompaktu nabývá svého maxima.

počtu popsaných úprav zvětšujících obsah aplikovaných na jakýkoliv n-úhelník lze jeho obsah libovolně přiblížit obsahu symetrického n-úhelníku. Kdyby existoval n-úhelník s obsahem větším než obsah symetrického n-úhelníku, nebylo by toto možné.

A zatřetí lze existenci maxima dokázat elementárně konstrukcí, při které konečným počtem úprav zvětšujících obsah převedeme libovolný n-úhelník na symetrický. Takový důkaz je ale velmi pracný.

Poznámky opravovatele: Úloha byla obtížná a odpovídal tomu i počet řešitelů, kteří ji správně vyřešili. Všichni použili stejný postup – dokázali, že když hledaný útvar nemá všechny strany stejně dlouhé nebo mu nejde opsat kružnice, tak lze najít jiný s větším obsahem. Z toho pak plyne, že pokud n-úhelník daných vlastností s maximální plochou existuje, pak je to právě tětivový n-úhelník se stejně dlouhými stranami (až na jednu stranu tvořenou stěnou domu).

Je tedy třeba dokázat buď, že řešení opravdu existuje, což sice není těžké, ale je třeba mít alespoň minimální znalosti o spojitých funkcích na metrických prostorech, nebo ukázat, že od libovolného útvaru lze konečným počtem úprav zvětšujících plochu přejít k hledanému řešení. Druhá možnost je sice pracná, nicméně elementárně proveditelná.

Za tuto logickou chybu jsem body nestrhával. Jediný, kdo si problém uvědomil, byl *Martin Tancer*, který přiznal, že existenci řešení musí předpokládat. Zasloužil si tím $+2i$.

Asi dvěma řešitelům jsem udělil $+i$ za diskusi toho, že se skutečně vyplatí použít všechno pletivo i všechny kůly.