1. seriálová série

Téma: Geometrie

Termín odeslání: 8. ledna 2001

1. úloha (5 bodů)

Mějme trojúhelník ABC a příčky AX, BY, CZ procházející jedním bodem. Nechť X', Y', Z' jsou body souměrné s X, Y, Z podle středů stran BC, AC, AB (v tomto pořadí). Dokažte, že příčky AX', BY', CZ' procházejí jedním bodem.

2. úloha (5 bodů)

Mějme trojúhelník ABC a příčky AX, BY, CZ procházející bodem P. Dokažte rovnost

$$\frac{|AP|}{|XP|} = \frac{|AY|}{|CY|} + \frac{|AZ|}{|BZ|}.$$

3. úloha (5 bodů)

Zjistěte, který význačný bod trojúhelníka ABC je těžištěm soustavy

$$S = [(A, \sin 2\alpha), (B, \sin 2\beta), (C, \sin 2\gamma)].$$

2. seriálová série

Téma: Geometrie

Termín odeslání: 5. března 2000

4. úloha (5 bodů)

Je dán trojúhelník ABC. Sestrojte bod X, aby výraz $|AX|^2 + 2\,|BX|^2 + 3\,|CX|^2$ byl nejmenší možný.

5. úloha (5 bodů)

Pomocí délek stran trojúhelníku ABC vyjádřete velikosti těžnic a os úhlů.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte Steinerovu větu (tj. větu 10 ze seriálu).

3. seriálová série

Téma: Geometrie

Termín odeslání: 14. KVĚTNA 2001

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti úhlopříček a úhel jimi sevřený, velikost strany a ($a = |AB|$) a úhlu α ($\alpha = |\sphericalangle BAD|$). Proveďte diskusi.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

V libovolném čtyřúhelníku při standardním značení velikostí stran a úhlopříček platí

$$4e \leq \sqrt{3a^2 - b^2 - c^2 + 3d^2 + 3e^2 - f^2} + \sqrt{-a^2 + 3b^2 + 3c^2 - d^2 + 3e^2 - f^2},$$

rovnost nastává právě pro rovnoběžník. Dokažte.

9. ÚLOHA (5 BODŮ)

Je dán tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Kružnice vepsaná má střed S a poloměr 1. Body dotyku kružnice vepsané se stranami AB, BC, CD, DA označme po řadě K, L, M, N. Označme ještě X průsečík úseček KM a LN. Vyjádřete co nejelegantněji vzdálenost $|XS|$ pomocí velikosti vnitřních úhlů.

Řešení seriálové série

1. úloha

Mějme trojúhelník ABC a příčky AX, BY, CZ procházející jedním bodem. Nechť X', Y', Z' jsou body souměrné s X, Y, Z podle středů stran BC, AC, AB (v tomto pořadí). Dokažte, že příčky AX', BY', CZ' procházejí jedním bodem.

Důkaz provedeme podobně jako ve větě 8 ze seriálu. Soustavu S zvolíme tak, aby bod T_S ležel na příčkách AX, BY, CZ. Vytvoříme změněnou soustavu S' takto:

$$m'_A = \frac{1}{m_A}, \quad m'_B = \frac{1}{m_B}, \quad m'_C = \frac{1}{m_C}.$$

Pro bod $X'' = T_{S'}(B,C)$ máme

$$\frac{|BX''|}{|CX''|} = \frac{m'_C}{m'_B} = \frac{m_B}{m_C} = \frac{|CX|}{|BX|}.$$

Pro bod X' platí

$$\frac{|BX'|}{|CX'|} = \frac{|CX|}{|BX|}.$$

Odtud už snadno plyne $X' = X''$ a podobně $Y' = Y'', Z' = Z''$. Z toho plyne, že příčky AX', BY', CZ' procházejí jedním bodem (totiž bodem $T_{S'}$).

Poznámky opravovatele: Řešení této úlohy byla dvojího druhu. První a častější se sestávalo z využití Cèvovy věty a zachování vzdáleností při symetrii podle středů stran. V druhém se nalezly nové hmotnosti bodů A, B a C tak, aby příčky AX, BY a CZ měly požadované vlastnosti. V tomto řešení naprostá většina řešitelů zapomněla okomentovat případ, kdy některé z původních bodů A, B a C mají nulovou hmotnost.

2. úloha

Mějme trojúhelník ABC a příčky AX, BY, CZ procházející bodem P. Dokažte rovnost

$$\frac{|AP|}{|XP|} = \frac{|AY|}{|CY|} + \frac{|AZ|}{|BZ|}.$$

Zvolíme soustavu $S = [(A, m_A), (B, m_B), (C, m_C)]$, aby bylo $T_S = P$. Ze seriálu víme, že $T_S(A,B) = Z$, $T_S(B,C) = X$, $T_S(C,A) = Y$ a platí vztahy:

$$\frac{|AY|}{|CY|} = \frac{m_C}{m_A}, \quad \frac{|AZ|}{|BZ|} = \frac{m_B}{m_A}, \quad \frac{|AP|}{|XP|} = \frac{m_B + m_C}{m_A}.$$

A nyní je již dokazovaná rovnost očividná.

Poznámky opravovatele: Úloha byla jednoduchá a většina řešitelů ji bez problému vyřešila stejným způsobem jako v autorském řešení. Vyskytlo se i několik čistě geometrických řešení, z nichž nejelegantnejší bylo řešení *Jana Kynčla*, které jsem odměnil jedním imaginarním bodem.

3. úloha
Zjistěte, který význačný bod trojúhelníka ABC je těžištěm soustavy

$$S=[(A,\sin 2\alpha),(B,\sin 2\beta),(C,\sin 2\gamma)].$$

Dokážeme, že hledaným bodem je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC – označme jej O. Dále označme X, Y, Z průsečíky přímek AO, BO, CO s přímkami BC, CA, AB (v tomto pořadí). Nyní stačí ukázat, že $X=T_S(B,C)$, $Y=T_S(C,A)$, $Z=T_S(A,B)$. Předpokládejme, že trojúhelník ABC je ostroúhlý (tedy bod O leží uvnitř). Z věty o obvodovém a středovém úhlu dostaneme $|\sphericalangle BOC|=2\alpha$, tedy $|\sphericalangle BOZ|=\pi-2\alpha$. Podobně $|\sphericalangle AOZ|=\pi-2\beta$. Využitím sinových vět pro trojúhelníky AOZ a BOZ dostaneme

$$\frac{|AZ|}{\sin 2\beta}=\frac{|AZ|}{\sin(\pi-2\beta)}=\frac{|AO|}{\sin|\sphericalangle AZO|}=\frac{|AO|}{\sin(\pi-|\sphericalangle BZO|)}=$$

$$=\frac{|AO|}{\sin|\sphericalangle BZO|}=\frac{|BZ|}{\sin(\pi-2\alpha)}=\frac{|BZ|}{\sin 2\alpha},$$

$$|AZ|\sin 2\alpha=|BZ|\sin 2\beta.$$

Uvážíme-li ještě znaménka hmotností bodů A, B (ta jsou kladná) a polohu bodu Z (uvnitř úsečky AB), obdržíme $Z=T_S(A,B)$. Zbylé dva vztahy vzniknou cyklickou záměnou. Pro pravoúhlý a tupoúhlý trojúhelník je důkaz obdobný.

Poznámky opravovatele: Většina řešení byla správná. Někteří postupovali metodou ukázanou v seriálu, jiní dokazovali přímo z definice těžiště. Prvně jmenovaná řešení měla nevýhodu v tom, že bylo nutné rozebrat několik případů (ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý trojúhelník). Několik řešitelů na to pozapomnělo, strhával jsem bod. Druhý typ řešení byl při vhodně zvolené souřadnicové soustavě přímočarý, ale vyskytlo se i neuvěřitelně komplikované řešení $(-i)$. *Katka Quittnerová* mi ukázala oba typy, za což si zaslouží pochvalu vyjádřenou $+i$.

4. úloha
Je dán trojúhelník ABC. Sestrojte bod X, aby výraz $|AX|^2+2|BX|^2+3|CX|^2$ byl nejmenší možný.

Řešení dostaneme snadno z poznámky za Steinerovou větou. Uvažujeme nyní soustavu $S=[(A,1),(B,2),(C,3)]$. Moment setrvačnosti soustavy S vzhledem k libovolnému bodu X je roven $|AX|^2+2|BX|^2+3|CX|^2$. Ze zmíněné poznámky plyne, že tento součet je nejmenší pro těžiště soustavy S. Hledaným bodem je tedy T_S. Ten sestrojíme např. takto. Na úsečce AB sestrojíme bod D tak, aby $|AD|:|BD|=2:1$ (to snad každý umí). Tím jsme dostali těžiště podsoustavy $[(A,1),(B,2)]$. T_S je nyní těžištěm soustavy [(D,3),(C,3)], což je střed úsečky CD.

5. úloha
Pomocí délek stran trojúhelníku ABC vyjádřete velikosti těžnic a os úhlů.

Označíme t_x (resp. u_x) těžnici na stranu x (resp. osu úhlu protějšího ke straně x). Stejnými písmeny budeme značit jejich délky.

V obou případech použijeme Stewartův vzorec. Velikost těžnice získáme bez potíží (dosadíme $p = q = \frac{1}{2}$).

$$t_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2,$$

$$t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Velikosti t_a, t_b získáme cyklickou záměnou.

Označme D průseečík osy u_c se stranou c. Sinová věta pro trojúhelníky ADC a BDC nám dává

$$\frac{|AD|}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\sin|\sphericalangle ADC|}, \quad \frac{|BD|}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{\sin|\sphericalangle BDC|}.$$

Z toho snadným výpočtem obdržíme (uvědomíme-li si, že $\sin|\sphericalangle ADC| = \sin|\sphericalangle BDC|$):

$$p = \frac{|AD|}{c} = \frac{|AD|}{|AD| + |BD|} = \cdots = \frac{b}{a+b},$$

$$q = \frac{a}{a+b}.$$

(Ke stejnému výsledku jsme se mohli dopracovat využitím soustavy $S = [(A, a), (B, b), (C, c)]$, jejíž těžiště je střed vepsané kružnice.) Dosadíme do Stewartova vzorce a upravíme např. na tvar:

$$u_c = \frac{\sqrt{ab((a+b)^2 - c^2)}}{a+b}.$$

Zbylé délky získáme cyklickou záměnou.

6. úloha

Dokažte Steinerovu větu (tj. větu 10 ze seriálu).

Pokud umíme pracovat s vektory, můžeme Steinerovu větu dokázat tímto výpočtem:

$$J_S(X) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot |XA_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot XA_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (XT_S + T_SA_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot XT_S{}^2 + 2 \cdot XT_S \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot T_SA_i\right) + \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot T_SA_i{}^2 =$$

$$= m_S \cdot XT_S{}^2 + 2 \cdot XT \cdot 0 + J_S(T_S) = m_S \cdot |XT_S|^2 + J_S(T_S).$$

Bez použití vektorového počtu bude důkaz poněkud obtížnější (ale obtíže jsou technického rázu). Budeme dokazovat indukcí podle počtu bodů (n) s nenulovou hmotností (ty, co mají nulovou hmotnost, předem vyškrtneme). Pro $n = 1$ Steinerova věta zřejmě platí. Nyní máme $n > 1$ a víme, že Steinerova věta platí pro $n-1$ bodů. Mezi našimi n body existují dva, které mají nenulový součet hmotností (to plyne snadno z podmínky $m_S \neq 0$). Ať jsou to body A_1, A_2 (obecnost nepřijde k újmě). Označme $A = T_S(A_1, A_2)$ a S' soustavu, která vznikne z S nahrazením hmotných bodů (A_1, m_1) a (A_2, m_2) jedním hmotným bodem (A, m_1+m_2). Víme, že $T_{S'} = T_S, m_{S'} = m_S$. Vezmeme libovolný bod X. Soustava S' má $n-1$ bodů, takže můžeme použít indukční předpoklad a dostaneme:

$$(m_1+m_2)\cdot|XA|^2 + \sum_{i=3}^{n} m_i\cdot|XA_i|^2 = (m_1+m_2)\cdot|T_SA|^2 + \sum_{i=3}^{n} m_i\cdot|T_SA_i|^2 + m_S\cdot|XT_S|^2\,.$$

Dokážeme-li

$$m_1\,|XA_1|^2 + m_2\,|XA_2|^2 - (m_1+m_2)\,|XA|^2 = m_1\,|T_SA_1|^2 + m_2\,|T_SA_2|^2 - (m_1+m_2)\,|T_SA|^2\,,$$

dostaneme sečtením těchto dvou rovností Steinerovu větu pro našich n bodů.

Rovnost upravíme na ekvivalentní tvar

$$m_1(|XA_1|^2 - |XA|^2 - |T_SA_1|^2 + |T_SA|^2) = -m_2(|XA_2|^2 - |XA|^2 - |T_SA_2|^2 + |T_SA|^2).$$

Druhé mocniny vzdáleností vyjádříme pomocí průmětů na přímku A_1A_2 a vzdáleností od těchto průmětů (Pythagorova věta), využijeme zákon páky (pro body A_1, A_2) a zbytek je již jen úprava výrazů. Zde právě nastanou technické obtíže, neboť je buď nutné rozebrat několik (dost) případů, nebo se tomuto vyhnout, např. přes orientovanou velikost úsečky.

7. úloha

Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti úhlopříček a úhel jimi sevřený, velikost strany a ($a = |AB|$) a úhlu α ($\alpha = |\sphericalangle BAD|$). Proveďte diskusi.

Úloha byla bohužel zadána tak, že šla snadno řešit bez využití význačného rovnoběžníku. Pokuste se před přečtením řešení řešit podobnou úlohu, kde místo úhlu α je zadán úhel δ!

(1) Sestrojíme nejprve význačný rovnoběžník $BB'D'D$ čtyřúhelníku $ABCD$. Máme dány délky stran a úhel jimi sevřený (to jsou velikosti úhlopříček a úhel jimi sevřený) – máme dvě možnosti, podle toho, který z úhlů máme zadán.

(2) Sestrojíme bod C, o kterém víme, že $|B'C| = a$ a $|\sphericalangle B'CD'| = \alpha$ (použijeme běžnou konstrukci – nejprve sestrojíme množinu bodů, ze kterých vidíme úsečku $B'D'$ pod úhlem α (to budou dva oblouky kružnic, jejich sjednocení označíme l) a potom kružnici k o středu B' a poloměru a.)

(3) Posuneme bod C směrem $B'B$ a získáme bod A. Vznikne buď konvexní čtyřúhelník, nebo nekonvexní čtyřúhelník, nebo body $ABCD$ vůbec čtyřúhelník netvoří.

Podle polohy bodu C vzhledem k $BB'D'D$ poznáme, jak bude vypadat výsledný čtyřúhelník:

(a) Pokud bod C leží uvnitř $BB'D'D$, pak čtyřúhelník $ABCD$ je konvexní.
(b) Pokud bod C neleží uvnitř $BB'D'D$ ani na stranách, ale leží v pásu určeném přímkami BB' a DD' nebo v pásu určeném přímkami BD a $B'D'$, pak $ABCD$ je nekonvexní.
(c) V ostatních případech body $ABCD$ čtyřúhelník netvoří.

Podrobná diskuse je značně ztížena tím, že nebylo určeno, že čtyřúhelník musí být konvexní. Za toto se řešitelům omlouvám. Plný počet bodů byl udělován za správně určený možný počet řešení. Úloha má 0–7 řešení, všechny tyto případy mohou nastat.

Poznámky opravovatele: Úloha byla velmi jednoduchá. Každý, kdo ji řešil, nalezl nějaký způsob, kterým lze hledaný čtyřúhelník zkonstruovat. Za to jsem udělil 3 body.

Nelíbila se mi ale diskuse počtu řešení. Počtem řešení většinou rozumíme počet neshodných útvarů vyhovujících zadání. Proto rčení jako „a dalších n řešení ve druhé polorovině“ nemají větší smysl. Například pokud je u trojúhelníku dáno (při standardním značení) a, b, α, existují v závislosti na vztahu velikostí a a $b \sin \alpha$ 0, 1 nebo 2 řešení, nikoli ale 4 řešení, jak se někteří domnívali!

Za závažné chyby v diskusi jsem uděloval pouze 3 body, za drobnější nepřesnosti 4 body.

8. úloha

V libovolném čtyřúhelníku při standardním značení velikostí stran a úhlopříček platí

$$4e \le \sqrt{3a^2 - b^2 - c^2 + 3d^2 + 3e^2 - f^2} + \sqrt{-a^2 + 3b^2 + 3c^2 - d^2 + 3e^2 - f^2},$$

rovnost nastává právě pro rovnoběžník. Dokažte.

Vezmeme soustavu $S = [(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)]$. Z Jacobiho vzorce vypočteme

$$J_S(T_S) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2}{4}.$$

Z definice vypočteme

$$J_S(A) = a^2 + d^2 + e^2,$$
$$J_S(C) = b^2 + c^2 + e^2.$$

Použijeme Steinerovu větu a vyjde nám

$$4\,|AT_S| = \sqrt{3a^2 - b^2 - c^2 + 3d^2 + 3e^2 - f^2}\,,$$
$$4\,|CT_S| = \sqrt{-a^2 + 3b^2 + 3c^2 - d^2 + 3e^2 - f^2}\,.$$

Použijeme trojúhelníkovou nerovnost pro body A, C, T_S a máme dokazovanou nerovnost.

Rovnost nastane právě tehdy, když T_S leží na úsečce AC, což nastává nejen, když $ABCD$ je rovnoběžník – v zadání byla chyba. Těžiště bodů A, C leží na přímce AC. Aby T_S ležel na přímce AC, je proto nutné a stačí, když těžiště bodů B, D leží na přímce AC. Jinými slovy, když přímka AC půlí úsečku BD. Pro konvexní čtyřúhelník je toto nutná a postačující podmínka pro rovnost, protože těžiště leží uvnitř $ABCD$. Pro nekonvexní čtyřúhelník je třeba dát si pozor, aby T_S ležel na úsečce AC (nejen na přímce AC). Shrnutí:

Označme S průsečík přímek BD a AC. Rovnost nastává právě tehdy, když platí následující dvě podmínky:

(a) $|BS| = |DS|$

(b) S leží na úsečce AC, nebo S leží na polopřímce CA a $2|SA| \leq |AC|$, nebo S leží na polopřímce AC a $2|SC| \leq |AC|$.

Poznámky opravovatele: Někteří řešitelé ukázali, že pro rovnoběžník rovnost platí. Obdrželi 1 bod. Ostatní si správně všimli chyby v zadání a někteří ji i správně opravili. Zajímavé byly různé volby soustav hmotných bodů. *Alexandr Kazda* a *Jan Kynčl* zvolili soustavy $[(B,1),(C,1),(D,1)]$ a $[(A,1),(B,1),(D,1)]$, *Katarína Quittnerová* zvolila soustavu $[(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)]$, *Jan Prachař* zvolil $[(A,3),(B,1),(C,-1),(D,1)]$. Některým stačila Eulerova věta o čtyřúhelníku, což mě nepotěšilo, protože řešení byla dlouhá a nehezká.

9. úloha

Je dán tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Kružnice vepsaná má střed S a poloměr 1. Body dotyku kružnice vepsané se stranami AB, BC, CD, DA označme po řadě K, L, M, N. Označme ještě X průsečík úseček KM a LN. Vyjádřete co nejelegantněji vzdálenost $|XS|$ pomocí velikosti vnitřních úhlů.

Označme $x = |AK| = |AN|$, $y = |BK| = |BL|$, $z = |CL| = |CM|$, $v = |DM| = |DN|$. Tyto vzdálenosti snadno vyjádříme pomocí velikostí vnitřních úhlů:

$$x = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}, \quad y = \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}, \quad \ldots$$

Snadno také vyjádříme vzdálenosti $|SA|$, $|SB|$, $|SC|$, $|SD|$:

$$|SA| = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \ldots$$

Z kosinové věty vyjádříme $|AC|$ pomocí velikosti vnitřních úhlů:

$$|AC| = \sqrt{(x+y)^2 + (y+z)^2 - 2(x+y)(y+z)\cos\beta}$$

Podobně vyjádříme $|BD|$.

Vezmeme soustavu $O = [(A,yzv),(B,xzv),(C,xyv),(D,xyz)]$. Snadno ověříme, že těžišti dvojic bodů (A,B), (B,C), (C,D), (D,A) jsou body K, L, M, N. Tedy $T_O = X$. $J_O(X)$ vypočteme z Jacobiho vzorce, $J_O(S)$ přímo z definice. Vše, co k tomu potřebujeme, máme vyjádřeno pomocí velikosti vnitřních úhlů. Vzdálenost $|XS|$ vypočteme ze Steinerovy věty a jsme hotovi, až na požadavek na co nejelegantnější tvar.