Povídání k osmé sérii

Závěrečná série je již tradičně vyvrcholením semináře. Řešitelé se v ní setkávají s příklady, z nichž každý je motivován jednou z předcházejících sérií. Tomu je uzpůsoben i systém bodování. Každá úloha sestává ze dvou částí. Z nich první je jednodušší, je určena řešitelům, kteří doposud nemají větší zkušenosti s řešením obdobných příkladů, její řešení je občas dobrým návodem pro řešení druhé části. Ta pak obsahuje opravdový oříšek i pro špičkové řešitele. Za část (a) je možno získat až dva body, za část (b) tři.

Pokud máš pocit, že některému pojmu nebo značení v zadání nerozumíš, pravděpodobně se stačí vrátit k příslušné sérii. K řešení úloh vskutku nejsou potřeba žádné speciálnější znalosti.

8. série

Téma: Finální myš (maš)

Termín odeslání: 14. května 2001

1. Úloha

V mythologii lovců lebek z ostrova Borneo lze najít následující představy posmrtného života: Po své smrti přijde bojovník do jeskyně, kde v kruhu okolo gigantického ohně sedí 642 démonů. Do rukou jednoho z nich (démona příjemce) složí bojovník lebky všech nepřátel, které získal během svého života. Poté je bojovník uveden do rajské zahrady a v jeskyni probíhá rituál zatracení. Jeden z démonů, kteří mají alespoň dvě lebky, předá po jedné lebce svým dvěma sousedům. Pak totéž učiní jiný démon, který má alespoň dvě lebky, a tak dále. Pokud žádný z démonů nemá alespoň dvě lebky, rituál končí a bojovník je unesen z rajské zahrady a svržen do propasti zatracení.

(a) Ukažte, že bojovník, který přemůže alespoň 642 nepřátel, nebude zatracen. (2 body)

(b) Co se stane s bojovníkem, který přemůže méně než 642 nepřátel? (3 body)

2. Úloha

Ultramagickým čtvercem řádu n a síly K budeme rozumět čtvercovou tabulku $n \times n$, která je vyplněna po dvou různými[1] přirozenými čísly tak, že součin čísel v každém řádku i sloupci je roven K.

(a) Dokažte, že existuje ultramagický čtverec řádu 3 a síly 5040. (2 body)

(b) Dokažte, že pro každé liché n existuje ultramagický čtverec řádu n a síly K pro nějaké $K < 2^{n^2}$. (3 body)

[1]Tato formulace se často používá a znamená, že žádná dvě čísla v tabulce nejsou stejná.

3. ÚLOHA

Dne 28. 2. 2001 byla všem obyvatelům SRN měřena tělesná teplota nepřetržitě po dobu devíti hodin. Na počátku měření byla teplota všech obyvatel mezi 36 a 40 stupni Celsia a nikdy se neměnila větší (okamžitou) rychlostí než 0,1 stupně za hodinu. SRN má 80 miliónů obyvatel.
(a) Ukažte, že v městečku s více než 1000 obyvateli najdeme dva lidi, jejichž teplota se v žádném okamžiku prvních dvou hodin měření nelišila o více než 0,1 stupně Celsia. (2 body)
(b) Ukažte, že v SRN existují dva lidé, jejichž teplota se po celých 9 hodin v žádném okamžiku nelišila o víc než 0,1 stupně Celsia. (3 body)

4. ÚLOHA

Nechť a, b, c jsou strany trojúhelníku. Buď $a_1 = \frac{1}{\sqrt{bc}}$, $b_1 = \frac{1}{\sqrt{ac}}$, $c_1 = \frac{1}{\sqrt{ab}}$.
(a) Dokažte, že a_1, b_1, c_1 jsou strany trojúhelníku. (2 body)
(b) Nechť α, β, γ jsou úhly v trojúhelníku se stranami a_1, b_1, c_1. Dokažte, že

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2.$$

(3 body)

5. ÚLOHA

Dokažte, že na kružnici se středem v počátku a poloměrem $5^{5^{5^5}}$ leží alespoň k mřížových bodů. Řešte pro
(a) $k = 13$, (2 body)
(b) $k = 5^{5^5}$, (3 body)
(c) co největší k. (prestižní úloha mimo soutěž)
Uzávorkování v patrových mocninách se řídí podle standardní konvence $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

6. ÚLOHA

Nechť jsou dány kružnice k a l, které se dotýkají v bodě A, přičemž kružnice k leží uvnitř kružnice l. Nechť jsou na kružnici l dány dva různé body B, C takové, že přímka BC se dotýká kružnice k v bodě D, a nechť $|BA| \neq |CA|$.
(a) Dokažte, že přímka AD je osou úhlu $\sphericalangle BAC$. (2 body)
(b) Označme $B_1 \neq A$ průsečík kružnice k s přímkou AB, $C_1 \neq A$ průsečík kružnice k s přímkou AC. Nechť $B_2 \neq B_1$ je takový bod přímky AB, že $|B_1D| = |B_2D|$, obdobně $C_2 \neq C_1$ takový bod přímky AC, že $|C_1D| = |C_2D|$. Dokažte, že body B, C, B_2 a C_2 leží na společné kružnici. (3 body)

7. ÚLOHA

Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla.
(a) Dokažte, že polynom $P(x) = x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc$ má právě jeden reálný kladný kořen (označme ho x_0). (2 body)
(b) Dokažte, že $\frac{2}{3}(a + b + c) \leq x_0 < a + b + c$. (3 body)

Řešení 8. série

1. úloha
V mythologii lovců lebek z ostrova Borneo lze najít následující představy posmrtného života: Po své smrti přijde bojovník do jeskyně, kde v kruhu okolo gigantického ohně sedí 642 démonů. Do rukou jednoho z nich (démona příjemce) složí bojovník lebky všech nepřátel, které získal během svého života. Poté je bojovník uveden do rajské zahrady a v jeskyni probíhá rituál zatracení. Jeden z démonů, kteří mají alespoň dvě lebky, předá po jedné lebce svým dvěma sousedům. Pak totéž učiní jiný démon, který má alespoň dvě lebky, a tak dále. Pokud žádný z démonů nemá alespoň dvě lebky, rituál končí a bojovník je unesen z rajské zahrady a svržen do propasti zatracení.
(a) Ukažte, že bojovník, který přemůže alespoň 642 nepřátel, nebude zatracen. (2 body)
(b) Co se stane s bojovníkem, který přemůže méně než 642 nepřátel? (3 body)

(a) Pokud bojovník přemohl více než 642 nepřátel, tak (z Dirichletova principu) má vždy některý z démonů alespoň dvě lebky, tedy rituál nikdy neskončí a bojovník nebude zatracen. Bojovník, který přemohl přesně 642 nepřátel, nám dá více práce. Nejprve si démony očíslujeme (v pořadí, v němž sedí v kruhu) čísly 0, 1, ... , 641 (démona příjemce označíme 0). Nyní můžeme v každém okamžiku spočítat tzv. lebkové číslo: pro každou lebku vezmeme číslo démona, který ji drží, těchto 642 čísel sečteme a spočítáme zbytek po dělení 642. Všimněme si, že lebkové číslo je invariant – tj. nezmění se, když nějaký démon předá oběma svým sousedům po jedné lebce. Na počátku je lebkové číslo rovno 0, musí tedy být rovno nule stále. Kdyby rituál někdy skončil, tak by každý z démonů měl přesně jednu lebku, lebkové číslo by tedy bylo

$$(0 + 1 + 2 + \cdots + 641) \bmod 642 = \frac{642 \cdot 641}{2} \bmod 642 = 321\,.$$

To není možné, takže bojovník zatracen nebude.
(b) Bojovník určitě bude zatracen, tj. i kdyby démoni nechtěli, rituál musí skončit. Toto dokážeme sporem, předpokládejme tedy, že rituál nikdy neskončí. Nyní provedeme malý trik: lebky si označíme. Když **poprvé** putuje nějaká lebka mezi démonem a a démonem b, tak tuto lebku označíme jako tzv. ab-lebku. Dále démony požádáme, aby ab-lebku nedostal nikdy jiný démon než a či b. To na rituálu vpodstatě nic nezmění, pouze si démon a, drže ab-lebku a předávaje ji, musí dát pozor, aby ji předal démonu b a ne druhému svému sousedu (a analogicky musí být opatrný démon b). Toto označení provedeme pro všechny dvojice sousedních démonů a, b. Díky tomu, že ab-lebka se nedostane k jinému démonu, než k a, b, je každá lebka označena maximálně jednou. Protože lebek je méně než dvojic sousedních démonů, tak existuje dvojice sousedních démonů, kteří si žádnou lebku nepředali. Tudíž existuje démon (dokonce dva takoví), kteří lebky předali jen konečněkrát (dokonce ani jednou, tj. nulakrát). Na druhou stranu rituál trvá nekonečně dlouho, takže existuje nějaký démon, který lebky předal nekonečněkrát. Musí tedy existovat dva sousední démoni k, n takoví, že k předal lebky jen konečněkrát, zatímco n nekonečněkrát. To ovšem znamená, že se lebky

hromadí u démona k (od n jich dostane nekonečně mnoho, jen konečně mnoho z nich vydá), což je spor, protože lebek je jen konečně mnoho.

Poznámka: Na ostrově Celebes se traduje podobná legenda, liší se jen ve dvou drobných detailech: démoni nesedí okolo ohně, ale okolo ústředního topení, a jejich počet není 642, nýbrž jen 211. Jak dopadne rituál v tomto případě? (Zejména si všimněte toho, co se stane, když je lebek stejně jako démonů, tj. 211.)

Poznámky opravovatele: Nejčastější chyba by se dala shrnout slovy „ono je to vlastně jasné“ ... Řešitel ukázal jeden z možných průběhů rituálu, zjistil, že tento průběh je nekonečný (v části (a)), příp. konečný (v části (b)), a tím jeho řešení končilo; navíc ono „zjistil“ často znamenalo spíše „bez důkazu tvrdil“. Varianta téže chyby je předpokládat, že démoni si lebky předávají „symetricky“ (nalevo i napravo od démona příjemce vypadá situace stejně). Potíž je v obou případech v tom, že démoni si mohou lebky předávat i jinak, než řešitel předpokládá (jako těžký domácí úkol zkuste spočítat počet možných průběhů rituálu), proto jsem tato řešení ocenil jedním bodem. Aby uvedený postup byl korektní, bylo by tedy třeba dokázat, že **pokud je některý průběh rituálu konečný, tak jsou konečné všechny.** To je skutečně pravda, ale jen řídké výjimky řekly, že takové tvrzení používajíi, a skutečně ho dokázaly.

Uvedené chybě se vyhnuli řešitelé, kteří postupovali podobně jako autorské řešení. Takových bylo v části (a) povícero (někteří našli lepší invariant – počet lebek „sudých démonů“ je stále sudý), v části (b) necelé jedno (jedno z řešení *Katky Quittnerové* bylo založeno na stejné myšlence). Zcela správně byla jen tři řešení (mezi nimi impozantní řešení *Martina Tancera* na deseti stránkách se sedmi pomocnými lemmaty).

2. úloha

Ultramagickým čtvercem řádu n a síly K budeme rozumět čtvercovou tabulku $n \times n$, která je vyplněna po dvou různými[2] přirozenými čísly tak, že součin čísel v každém řádku i sloupci je roven K.

(a) Dokažte, že existuje ultramagický čtverec řádu 3 a síly 5040. (2 body)

(b) Dokažte, že pro každé liché n existuje ultramagický čtverec řádu n a síly K pro nějaké $K < 2^{n^2}$. (3 body)

Nejdříve si dokážeme pomocné lemma:

Lemma: Nechť n je liché a nechť existují dvě n-prvkové množiny $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ a $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ přirozených čísel takové, že součiny $a_i b_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ jsou po dvou různé (tj. nabývají n^2 různých hodnot). Pak existuje ultramagický čtverec řádu n a síly $K = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_n$.

[2] Tato formulace se často používá a znamená, že žádná dvě čísla v tabulce nejsou stejná.

Důkaz: Ultramagický čtverec zkonstruujeme podle následujícího schématu:

$$\begin{matrix} a_1b_1 & a_2b_2 & a_3b_3 & \dots & a_nb_n \\ a_2b_3 & a_3b_4 & a_4b_5 & \dots & a_1b_2 \\ a_3b_5 & a_4b_6 & a_5b_7 & \dots & a_2b_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_{n-1} & a_1b_n & a_2b_1 & \dots & a_{n-1}b_{n-2} \end{matrix}$$

Nyní je snadné si rozmyslet, že v každém řádku i sloupci je součin čísel roven číslu K a že každý součin a_ib_j se v tabulce vyskytuje právě jednou, takže díky tomu, že tyto součiny jsou po dvou různé, jsou čísla v tabulce také po dvou různá. Sestrojili jsme tedy ultramagický čtverec řádu n a síly K.
(a) V této části stačí do právě dokázaného lemmatu dosadit množiny $A = \{2, 5, 7\}$ a $B = \{3, 4, 6\}$. Snadno se ověří předpoklady lemmatu, výsledný ultramagický čtverec bude mít tvar

$$\begin{matrix} 6 & 20 & 42 \\ 30 & 21 & 8 \\ 28 & 12 & 15 \end{matrix}$$

Jeho síla je zřejmě rovna $K = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.
(b) Zde zvolíme množiny následovně

$$A = \{1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}\},$$
$$B = \{1, 3, 7, \dots, 2^n - 1\}.$$

Ukážeme, že součiny čísel $a_i = 2^{i-1}$ a $b_j = 2^j - 1$ jsou po dvou různé. Buď $a_ib_j = m = a_{i'}b_{j'}$ pro nějaká i, i', j, j'. Pak snadno vidíme, že musí být nejvyšší mocnina dvojky, která dělí m, rovna jak a_i, tak $a_{i'}$ a tedy $i = i'$. Odtud už snadno $j = j'$. Podle lemmatu tedy existuje ultramagický čtverec, jehož síla je

$$K = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdots 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdots (2^n - 1) < 2^{1+2+3+\dots+(n-1)+1+2+\dots+n} = 2^{n^2}.$$

Tím je důkaz hotov.

Poznámky opravovatele: Většina došlých řešení byla správná. U těch zbylých se stala kamenem úrazu formulace „čísla v tabulce jsou po dvou různá“, která znamená, že každá dvě čísla jsou různá (čili že jsou všechna různá).

3. úloha

Dne 28. 2. 2001 byla všem obyvatelům SRN měřena tělesná teplota nepřetržitě po dobu devíti hodin. Na počátku měření byla teplota všech obyvatel mezi 36 a 40 stupni Celsia a nikdy se neměnila větší (okamžitou) rychlostí než 0,1 stupně za hodinu. SRN má 80 miliónů obyvatel.

(a) Ukažte, že v městečku s více než 1000 obyvateli najdeme dva lidi, jejichž teplota se v žádném okamžiku prvních dvou hodin měření nelišila o více než 0,1 stupně Celsia.(2 body)
(b) Ukažte, že v SRN existují dva lidé, jejichž teplota se po celých 9 hodin v žádném okamžiku nelišila o víc než 0,1 stupně Celsia. (3 body)

Rozdělme si teplotní interval 36 až 40 stupňů na intervaly délky 0,1 stupně, tj. celkem 40 intervalů $I_1, \ldots, I_{40}$. Vyberme si nyní libovolného občana SRN a zkoumejme, jak se může měnit jeho teplota během měření. Jeho teplotu v čase t (v hodinách) budeme označovat $T(t)$.

Protože okamžitá rychlost změny teploty je nejvýše $0{,}1^\circ/h$, může se teplota během hodiny změnit nejvýše o $0{,}1^\circ$. Pokud se tedy někdy v průběhu hodiny nachází v intervalu I_k, nemůže se v jiném okamžiku téže hodiny nacházet v intervalu I_l, kde $|k-l| > 1$. Pokud se tedy teplota naměřená v celou hodinu h nachází v intervalu I_j (tj. $T(h) \in I_j$), pak musí nastat jeden z následujících případů:

(1) $T(h+1) \in I_{j+1}$,
(2) $T(h+1) \in I_{j-1}$,
(3) $T(h+1) \in I_j$.

Tento třetí případ ještě rozdělíme na tři podpřípady:

(3a) $T(t) \in I_j$ pro všechna $t \in \langle h, h+1\rangle$,
(3b) $T(t) \in I_j \cup I_{j+1}$ pro všechna $t \in \langle h, h+1\rangle$ a existuje $t_0 \in \langle h, h+1\rangle$ takové, že $T(t_0) \in I_{j+1}$
(3c) $T(t) \in I_j \cup I_{j-1}$ pro všechna $t \in \langle h, h+1\rangle$ a existuje $t_0 \in \langle h, h+1\rangle$ takové, že $T(t_0) \in I_{j-1}$.

Nyní bychom chtěli ze znalosti intervalu, v němž je teplota na počátku hodiny, a jednoho z pěti uvedených případů dostatečně přesně popsat vývoj teploty příslušné osoby. Dále $t \in \langle 0, 1\rangle$ bude označovat časový okamžik v hodině, pro snadnější vyjadřování označme symbolem $I + t$ interval I posunutý o t, tj. $\langle a, b\rangle + t = \langle a+t, b+t\rangle$. Snadno zjistíme, že platí:

- $T(h) \geq a \implies T(h+t) \geq a - 0{,}1 \cdot t$,
- $T(h) \leq b \implies T(h+t) \leq b + 0{,}1 \cdot t$,
- $T(h+1) \geq c \implies T(h+t) \geq c - 0{,}1 \cdot (1-t)$,
- $T(h+1) \leq d \implies T(h+1) \leq d + 0{,}1 \cdot (1-t)$.

V jednotlivých případech odtud snadno plyne

(1) $T(h+t) \in I_j + 0{,}1 \cdot t$ pro všechna $0 \leq t \leq 1$.
(2) $T(h+t) \in I_j - 0{,}1 \cdot t$ pro všechna $0 \leq t \leq 1$.
(3a) $T(h+t) \in I_j$ pro všechna $0 \leq t \leq 1$.
(3b) $T(h+t) \in I_j + 0{,}1 \cdot t$ pro $0 \leq t \leq 1/2$, $T(t+h) \in I_j + 0{,}1 \cdot (1-t)$ pro $1/2 \leq t \leq 1$.
(3c) $T(h+t) \in I_j - 0{,}1 \cdot t$ pro $0 \leq t \leq 1/2$ a $T(t+h) \in I_j - 0{,}1 \cdot (1-t)$ pro $1/2 \leq t \leq 1$.

Z výše uvedeného plyne, že $T(t)$ je v každém okamžiku t v pevně daném intervalu délky 0,1 (nějak posunutém intervalu I_j). Máme-li tedy dva občany, jejichž teploty jsou na začátku hodiny ve stejném intervalu a během následující hodiny vyhovují témuž z výše uvedených pěti případů, pak se jejich teploty po celou tuto hodinu neliší o více než $0{,}1^\circ$. Nyní stačí spočítat počet možností. Na počátku leží teplota každého občana v jednom ze 40 intervalů a poté v každou celou hodinu volíme z pěti možností. Celkový počet možností je tedy $40 \cdot 5^n$, kde n je počet hodin, po které trvá měření, to znamená v části (a) 1 000 a v části (b) 78 125 000.

Podle Dirichletova principu tedy najdeme dva občany, kteří vyhovují téže možnosti, což znamená, že se jejich teplota po celou dobu měření nelišila o víc než 0,1°.

Poznámky opravovatele: Zadání úlohy okamžitě svádělo k použití Dirichletova principu. Nu dobrá, avšak jak tedy rozdělíme lidi do přihrádek, aby se v žádné nelišila teplota o více než 0,1°C? To musíme kontrolovat obecně v nekonečném počtu okamžiků během měření. Spojitý průběh teploty tedy bude nutno nějak diskretizovat. A v tom byl kámen úrazu. Všichni, jimž jsem do řešení napsal stručné „Chybná diskretizace“, vycházeli z následujícího předpokladu: Existují-li dva lidé, jimž se teplota v každou celou hodinu nelišila o více než o 0,1°C, pak se těmto lidem teplota nelišila více ani v kterémkoli okamžiku *mezi* celými hodinami. To však není pravda, představte si např. člověka A, který měl mezi 6.00 a 7.00 stálou teplotu 37,01°C, a člověka B, který měl teploty: 6.00: 37,09°C, 6.30: 37,14°C, 7.00: 37,09°C (nakreslete si graf!).

4. úloha

Nechť a, b, c jsou strany trojúhelníku. Buď $a_1 = \frac{1}{\sqrt{bc}}$, $b_1 = \frac{1}{\sqrt{ac}}$, $c_1 = \frac{1}{\sqrt{ab}}$.

(a) Dokažte, že a_1, b_1, c_1 jsou strany trojúhelníku. (2 body)

(b) Nechť α, β, γ jsou úhly v trojúhelníku se stranami a_1, b_1, c_1. Dokažte, že

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2.$$

(3 body)

(a) BÚNO budeme předpokládat $a \geq b \geq c$. Potom zřejmě i $a_1 \geq b_1 \geq c_1$, takže nám stačí dokázat $a_1 < b_1 + c_1$. Z trojúhelníkové nerovnosti pro původní trojúheník máme $a < b + c$, po vydělení číslem abc dostaneme $\frac{1}{bc} < \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}$, neboli

$$a_1^2 < b_1^2 + c_1^2. \tag{$\heartsuit$}$$

Po přičtení kladného čísla $2b_1c_1$ k pravé straně a odmocnění dostáváme kýžené $a_1 < b_1 + c_1$ a úloha je vyřešena.

(b) Podle vztahu ($\heartsuit$) z části (a) vidíme, že trojúhelník se stranami a_1, b_1 a c_1 je ostroúhlý (stačí využít např. kosinovou větu). Proto $\frac{\pi}{2} > \alpha \geq \beta \geq \gamma > 0$, dokonce $\alpha \geq \beta > \frac{\pi}{4}$. Odtud vidíme, že $\sin\alpha > \cos\alpha > 0$ a $\sin\beta > \cos\beta > 0$. Dále vidíme $\sin\alpha > \sin^2\alpha$ a $\sin\beta > \sin^2\beta$. Dále si uvědomíme, že $\sin\alpha > \sin\beta$ a $\cos\alpha < \cos\beta$. Podle Čebyševovy nerovnosti tedy $\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha > \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta$. Nyní již stačí upravovat:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) =$$

$$= \sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta >$$

$$> \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta >$$

$$> \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 2.$$

V posledních dvou nerovnostech jsme využili všechny předcházející nerovnosti.

5. úloha

Dokažte, že na kružnici se středem v počátku a poloměrem $5^{5^{5^5}}$ leží alespoň k mřížových bodů. Řešte pro

(a) $k = 13$, (2 body)

(b) $k = 5^{5^5}$, (3 body)

(c) co největší k. (prestižní úloha mimo soutěž)

Uzávorkování v patrových mocninách se řídí podle standardní konvence $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Vyřešíme rovnou část (b), ze které snadno plyne (a). Klíčem k řešení bude následující lemma:

Lemma: Pro každé $m \in \mathbb{N}$ existují celá čísla a_m a b_m nedělitelná pěti taková, že $a_m^2 + b_m^2 = 5^m$.

Důkaz: Zvolíme $a_1 = 2$ a $b_1 = 1$ a posloupnosti a_m a b_m definujeme rekurentně následujícím způsobem:

$$a_{l+1} = 2a_l - b_l, \qquad b_{l+1} = a_l + 2b_l.$$

Nyní je zřejmé, že $a_{l+1}^2 + b_{l+1}^2 = 5(a_l^2 + b_l^2)$, takže se nám snadno podaří matematickou indukcí dokázat, že $a_m^2 + b_m^2 = 5^m$. Zbývá ověřit, že čísla a_m a b_m nejsou dělitelná pěti. Z rekurentního předpisu pro tyto posloupnosti však matematickou indukcí snadno dokážeme, že

$$a_{2l-1} \equiv 2 \pmod 5, \quad a_{2l} \equiv 3 \pmod 5,$$
$$b_{2l-1} \equiv 1 \pmod 5, \quad b_{2l} \equiv 4 \pmod 5.$$

Detaily přenechávám laskavému čtenáři. Tím je lemma dokázané.

Poznámka: Možná Tě zajímá, jak se na takový rekurentní předpis pro posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dá přijít. Ukážeme zde zajímavou souvislost s komplexními čísly. Volíme-li $c_1 = 2 + i$ a $c_n = c_1^n$, snadno vidíme, že $|c_n|^2 = |c_1|^{2n} = \sqrt{5}^{2n} = 5^n$. Nyní volíme $a_n = \operatorname{Re} c_n$, $b_n = \operatorname{Im} c_n$ a odtud $a_n^2 + b_n^2 = |c_n|^2 = 5^n$, rekurentní předpis pro posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ již dostaneme roznásobením vztahu $a_{n+1} + ib_{n+1} = (a_n + ib_n)(2 + i)$.

Nyní již najdeme dostatečný počet mřížových bodů na kružnici s poloměrem $5^{5^{5^5}}$ a středem v počátku. Sestrojíme posloupnost bodů $A_n = [x_n, y_n]$ ležících na této kružnici pomocí volby

$$x_n = 5^n a_{2(5^{5^5} - n)}, \quad y_n = 5^n b_{2(5^{5^5} - n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, 5^{5^5} - 1.$$

Je zřejmé, že body A_n jsou navzájem různé, jelikož nejvyšší mocnina pětky, která dělí souřadnice bodu A_n, je 5^n. Dále je jasné, že $x_n^2 + y_n^2 = 5^{2\cdot 5^{5^5}}$, takže všechny body leží na naší kružnici. Tím jsme na kružnici našli 5^{5^5} mřížových bodů. Ke každému A_n můžeme najít dalších sedm bodů ležících na téže kružnici (případnou záměnou pořadí souřadnic a případnou záměnou znaménka jednotlivých souřadnic). Tyto body budou navzájem různé (neboť $|x_n|$

a $|y_n|$ jsou různá kladná čísla), také budou různé body, které vznikly z různých A_n (opět uvážíme nejvyšší mocninu pětky ...). Navíc na kružnici zjevně leží další 4 body – průsečíky se souřadnými osami. Celkem se nám tedy podařilo najít $8 \cdot 5^{5^5} + 4$ bodů.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů zdárně vyřešila první část. Všichni, kteří správně vyřešili druhou část, došli ke stejnému k jako je ve vzorovém řešení. Žádná kladná i jsem neudělovala, naopak jsem i-čka strhávala za zbytečně nepřehledná a komplikovaná řešení.

6. úloha

Nechť jsou dány kružnice k a l, které se dotýkají v bodě A, přičemž kružnice k leží uvnitř kružnice l. Nechť jsou na kružnici l dány dva různé body B, C takové, že přímka BC se dotýká kružnice k v bodě D, a nechť $|BA| \neq |CA|$.
(a) Dokažte, že přímka AD je osou úhlu $\sphericalangle BAC$. (2 body)
(b) Označme $B_1 \neq A$ průsečík kružnice k s přímkou AB, $C_1 \neq A$ průsečík kružnice k s přímkou AC. Nechť $B_2 \neq B_1$ je takový bod přímky AB, že $|B_1D| = |B_2D|$, obdobně $C_2 \neq C_1$ takový bod přímky AC, že $|C_1D| = |C_2D|$. Dokažte, že body B, C, B_2 a C_2 leží na společné kružnici. (3 body)

(a) Uvažujme kruhovou inverzi se středem v A a libovolným poloměrem. Kružnice k a l v ní přejdou v rovnoběžné přímky k' a l', l' je blíž bodu A. Přímka BC přejde v kružnici m, která prochází bodem A, dotýká se přímky k' v bodě D' (obraz bodu D) a protíná přímku l' v bodech B' a C' (obrazy bodů B a C). Nyní je ze symetrie zřejmé, že $|B'D'| = |C'D'|$, a tedy podle věty o obvodových úhlech (pro kružnici m) je $|\sphericalangle B'AD'| = |\sphericalangle C'AD'|$. Nyní již stačí uvážit, že bod B (resp. C, D) leží na polopřímce AB' (resp. AC', AD'), takže i $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAD|$, což jsme potřebovali dokázat.
(b) Uvažujme kruhovou inverzi se středem v A a poloměrem $|AD|$. Obrazy bodů v této kruhové inverzi budeme značit „čárkovaně“. Trojúhelníky ABD a ADB' jsou podobné, takže

$$|\sphericalangle AB'D| = |\sphericalangle ADB| = \pi - |\sphericalangle ADC| = \pi - |\sphericalangle AB_1D| = |\sphericalangle BB_1D|.$$

Třetí rovnost jsme dostali z věty o obvodovém a dotykovém úhlu pro tětivu AD. Když si uvědomíme, že bod B' leží na polopřímce AB, vidíme, že trojúhelník B_1DB' je rovnoramenný se základnou B_1B', takže je nutně $B' = B_2$. Analogicky dokážeme $C' = C_2$. Z definice kruhové inverze pak dostáváme

$$|AB| \cdot |AB_2| = |AD|^2 = |AC| \cdot |AC_2|.$$

Podle věty o mocnosti bodu ke kružnici tedy body B, C, B_2 a C_2 leží na jedné kružnici. Tím je důkaz hotov.

Poznámky opravovatele: Obě části úlohy šly celkem schůdně řešit i bez kruhové inverze, řešení pomocí kruhové inverze se častěji vyskytovala pouze v části (a).

7. úloha

Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla.

(a) Dokažte, že polynom $P(x) = x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc$ má právě jeden reálný kladný kořen (označme ho x_0). (2 body)
(b) Dokažte, že $\frac{2}{3}(a + b + c) \le x_0 < a + b + c$. (3 body)

(a) Ukážeme o něco silnější tvrzení, pro libovolná kladná p, q má rovnice $x^3 - px = q$ právě jeden kladný kořen. Všimněme si, jak vypadá graf funkce $x^3 - px$. Tato funkce má kořeny v bodech 0, $-\sqrt{p}$, $\sqrt{p}$, na intervalu $(0, \sqrt{p})$ je záporná, na intervalu $(\sqrt{p}, \infty)$ kladná a rostoucí. Odtud už plyne, že rovnice $x^3 - px = q$ nemá na intervalu $(0, \sqrt{p})$ žádný kořen, na intervalu $\langle\sqrt{p}, \infty)$ nejvýše jeden kořen. Když ještě uvážíme, že tato funkce je spojitá, v bodě $\sqrt{p}$ je rovna 0 a roste do nekonečna, vidíme, že má vskutku právě jeden kořen na intervalu $(0, \infty)$.
(b) Rovnici $P(x) = 0$ si přepišme do výhodnějšího tvaru

$$x^3 = (a^2 + b^2 + c^2)x + 2abc\,. \qquad (*)$$

Z toho, že x_0 je jediný kladný reálný kořen, plyne, že (pro kladná x) $x \le x_0$ právě tehdy, když

$$x^3 \le (a^2 + b^2 + c^2)x + 2abc\,.$$

Potřebujeme tedy dokázat dvě nerovnosti:

- $(a + b + c)^3 > (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) + 2abc$
- $\frac{8}{27}(a + b + c)^3 \le \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) + 2abc$.

První z těchto nerovností je triviální: při roznásobení dostaneme na levé straně $1\cdot a^3$, $3\cdot a^2b$, $6 \cdot abc$, zatímco na pravé straně $1 \cdot a^3$, $1 \cdot a^2b$, $2 \cdot abc$, analogicky pro „zpřeházené proměnné“. Dokažme tedy druhou nerovnost. Obě její strany jsou homogenní stupně 3, můžeme tedy rovnici vydělit vhodnou konstantou a předpokládat, že $a = 1$. Zvolme dále x, y tak, aby platilo $b = 1 + x$, $c = 1 + y$. Navíc (díky symetrii původní rovnice vzhledem k záměně proměnných) můžeme předpokládat, že $a \le b, c$, neboli $x, y \ge 0$. Po dosazení a (poněkud pracném) roznásobení dostáváme nerovnost ekvivalentní té původní:

$$9(x^2 + y^2 - xy) + 3\left(x^3 + y^3 - xy(x + y)\right) + 2(x^3 + y^3) \ge 0\,.$$

Tato nerovnost ovšem vždy platí, dokonce každá ze závorek je nezáporná: poslední očividně, první je větší nebo rovna $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \ge 0$, u prostřední využijeme toho, že zjevně platí

$$2xy(x + y) \le (x^2 + y^2)(x + y) = x^3 + y^3 + xy(x + y)\,.$$

Tím je důkaz hotov.

Poznámky opravovatele: V první části úlohy řešitelé používali nejčastěji Viètovy vztahy nebo intervaly monotonie polynomu zjištěné z vlastností derivace. Téměř všichni, kteří vyřešili druhou část, používali Darbouxovu vlastnost spojité funkce, k jejímuž použití bylo třeba zjistit, jaké znaménko má hodnota polynomu v bodech $\frac{2}{3}(a + b + c)$ a $a + b + c$. To, že jsou znaménka různá, dokazovali řešitelé použitím mnoha různých nerovností.

Nejčastější chybou při použití Viètových vztahů v první části byl skrytý předpoklad, že polynom má tři reálné kořeny. Mnozí řešitelé zapomněli na to, že dva z kořenů mohou být komplexní a tuto možnost nerozebrali, proto za tuto část dostali jen 1 bod. Za použití Cardanových vzorců jsem strhával i, protože to vedlo ke zbytečně složitému řešení.