Povídání k páté sérii

Jak název napovídá, mřížové body mají cosi společného s mříží. Uvažme nekonečnou mříž, kde svislé a vodorovné tyče jsou na sebe kolmé, mají nulovou tloušťku a jsou umístěné v pravidelných rozestupech (mříž tedy má podobu nekonečné čtvercové sítě). Průsečíky svislých a vodorovných tyčí jsou právě ony mřížové body. Matematicky situaci popíšeme nejlépe takto: Mřížové body v rovině jsou ty body roviny, které mají obě souřadnice celočíselné. Analogicky můžeme hovořit o mřížových bodech ve vícerozměrných prostorech, množina mřížových bodů v $\mathbb{R}^n$ je tedy $\mathbb{Z}^n$. Chceme-li matematicky popsat šachovnici, můžeme za mřížové body považovat rohy jednotlivých políček nebo (lépe) jejich středy.

O mřížových bodech platí mnoho pěkných tvrzení, jako ukázku uvádíme tzv. Pickovu formuli. Jmenuje se podle vídeňského rodáka George Picka (1859–1942), který většinu své matematické kariéry strávil na německé univerzitě v Praze.

Věta (Pickova formule) Buď M mnohoúhelník[1] s vrcholy v mřížových bodech v rovině. Nechť h je počet mřížových bodů ležících na jeho hranici (včetně jeho vrcholů) a u počet mřížových bodů ležících uvnitř. Pak obsah M je roven $u + h/2 - 1$.

Důkaz: Všechny mnohoúhelníky, o nichž budeme hovořit, mají všechny vrcholy v mřížových bodech. Napřed malé pozorování: Mějme nepřekrývající se mnohoúhelníky M_1 a M_2, jejichž hranice se protínají v souvislém úseku (je to lomená čára, která obsahuje všechny společné vrcholy M_1 a M_2) – ten obsahuje s mřížových bodů, přičemž $s \geq 2$ (minimálně oba konce společné části hranice jsou vrcholy obou mnohoúhelníků a tudíž mřížové body). Označme jako M sjednocení M_1 a M_2. Pokud Pickova formule platí pro M_1 a pro M_2, pak platí i pro M. Pokud platí pro M a pro M_1, platí i pro M_2. Pokud platí pro M a mnohoúhelníky M_1 a M_2 jsou shodné, pak formule platí i pro M_1.

Toto dokážeme velice snadno. Označme u, h jako výše, analogicky u_1, h_1, u_2, h_2. Snadno spočítáme, že $u = u_1 + u_2 + s - 2$ a $h = h_1 + h_2 - 2s + 2$, tedy také

$$u + \frac{h}{2} - 1 = \left(u_1 + \frac{h_1}{2} - 1\right) + \left(u_2 + \frac{h_2}{2} - 1\right).$$

Navíc obsah M je součtem obsahů M_1 a M_2. Odsud již plyne naše pozorování.

Pickova formule zjevně platí pro jednotkový čtverec. Díky našemu pozorování můžeme tyto čtverce nalepovat a zjistit tak, že formule platí pro všechny obdélníky. Rozřízneme-li takový obdélník jeho úhlopříčkou, dostaneme dva shodné trojúhelníky, pro ně tedy formule platí také. Zatím jsme tedy platnost formule dokázali pro všechny obdélníky a pro všechny trojúhelníky, jejichž dvě strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Ukážeme nyní její platnost pro všechny trojúhelníky. Vezměme libovolný trojúhelník. Veďme jeho nejvyšším a nejnižším vrcholem vodorovnou přímku, jeho nejlevějším a nejpravějším vrcholem svislou přímku. Přímky vytvoří obdélník, který lze rozložit na výchozí trojúhelník, dva nebo tři trojúhelníky a případně jeden obdélník, pro něž už jsme formuli dokázali. Díky našemu pozorování tedy Pickova formule platí i pro výchozí trojúhelník. Nyní už můžeme formuli dokázat pro

[1] Mnohoúhelník může být i nekonvexní, ale nesmí mít „díry“, tj. jeho hranice je jedna neprotínající se uzavřená lomená čára.

libovolný mnohoúhelník. Stačí si rozmyslet, že každý n-úhelník lze rozdělit pomocí $n-3$ neprotínajících se úhlopříček na $n-2$ trojúhelníků. (Pozor, pro nekonvexní mnohoúhelníky to vůbec není jasné!) A tím je důkaz hotov.

5th series

Topic: Lattice Points

Date due: 12 February, 2001

PROBLEM 1 (3 points)
We want to cross a square-shaped swamp filled with foul smelling frogs and radioactive isotopes. Fortunately, on every lattice point $[x, y]$ (for $1 \le x \le n$, $1 \le y \le n$) there was a stone on which we can step, and we can only hop between stones with distance 1. But this is too easy, so imagine that a hideous vandal stole some of the stones, simply to torture you. What is the largest number of stones he could possibly have stolen so that we can still cross the swamp from top to bottom, or from left to right? (I.e. we can traverse from the stone on the point $[x, n]$ to the stone $[x', 1]$ or from $[1, y]$ to $[n, y']$.)

PROBLEM 2 (3 points)
The King of Orthogonal Land rules a kingdom which closely resembles a chessboard with $(2n+1) \times (2n+1)$ squares. A true egoist, his throne is positioned in the exact center of his kingdom. Indeed, he even insists on walking in orthogonal patterns; refusing to walk to another square unless that square shares an edge with his own. For which n can he walk off of his throne in the central square, walk through each square of his kingdom exactly once and rest on his throne again with his next move? For which n can he finish his journey in a center of some border of the board?

PROBLEM 3 (3 points)
Is it possible to cover the pig by non-overlapping T-tetrominoes (see the figure on page 26)?

PROBLEM 4 (5 points)
A certain mathematician lives in an n-dimensional space, he uses only the lattice points of his space. He can move from a lattice point A to a point B if and only if B is a lattice point and the distance $|AB|$ is an integer. Prove that when the mathematician returns to his original position after several moves, the total distance he travelled is an even number.

PROBLEM 5 (5 points)
The King of Diagonal (he moves diagonally to a neighboring square) rules a kingdom – a $(2n+1) \times (2n+1)$ chessboard, with a throne on a central vertex. He want to start on his

throne, visit every part of his kingdom he can reach and get back to his throne. Prove that he needs at least $2(n+1)^2$ moves for it.

PROBLEM 6 (5 points)
On a $n \times n$ chessboard, k of the squares are marked. On one of the marked squares is a drunken rook. It moves like a usual rook (i.e. horizontally or vertically, arbitrarily far), but it must finish each of its moves on a marked square. In addition, it must also follow a horizontal move with a vertical one and vice versa. Prove, that if $k \geq 2n$, the rook can start on some marked square and return to its original position after several moves.

PROBLEM 7 (5 points)
For two odd natural numbers a and b, which are coprime, we define the sum

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{(b-1)/2} \lfloor \frac{ia}{b} \rfloor .$$

Here $\lfloor x \rfloor$ denotes the floor of x, i.e. the largest integer less than or equal to x. E.g. $S(15,7) = \lfloor 15/7 \rfloor + \lfloor 30/7 \rfloor + \lfloor 45/7 \rfloor = 2+4+6 = 12$ and $S(7,15) = 0+0+1+1+2+2+3 = 9$. Prove that always

$$S(a,b) + S(b,a) = \frac{(a-1)(b-1)}{4} .$$

PROBLEM 8 (5 points)
For which $n \geq 3$ is there a regular n-gon in a plane such that all its vertices are lattice points?

Serie N. 5

Thema:	Die Gitterpunkte
Termin der Absendung:	12. FEBRUAR 2001

AUFGABE N. 1 (3 punkte)
Wir möchten einen quadratischen Sumpf überqueren. Auf jedem Gitterpunkt $[x,y]$ ($1 \leq x \leq n$, $1 \leq y \leq n$) war ein Stein, auf den man treten konnte; wir können nur Schritte der Länge 1 machen. Ein schlimmer Vandale hat einige Steine weggebracht. Wie groß ist die maximale Anzahl der Steine, die er hätte stehlen können, so dass wir sicher sein können, dass wir den Sumpf trotzdem von oben nach unten oder von links nach rechts überqueren können (d. h., wir können den Sumpf von dem Stein auf dem Punkt $[x,1]$ zum Stein auf dem Punkt $[x',n]$ oder von $[1,y]$ nach $[n,y']$ überqueren)?

AUFGABE N. 2 (3 punkte)
Der König Lotrecht I. bewegt sich nur vertikal oder horizontal auf das Nachbarfeld (das Feld mit der gemeinsamen Seite). Er regiert ein Königreich in Form eines Schachbrettes, das $(2n+1) \times (2n+1)$ Felder hat. Für welche n kann er von seinem Thron im Mittelfeld des Schachbrettes hinausgehen, genau einmal durch jedes Feld seines Königreiches gehen und sich in seinem letzten Zug auf seinen Thron zurücksetzen? Für welche n kann er seinen Weg auf dem Grenzübergang in der Mitte der Seite des Schachbrettes beenden?

AUFGABE N. 3 (3 punkte)
Entscheide, ob es möglich ist das Schwein in Stücke mit T–Form bestehend aus vier Quadraten zu teilen.

AUFGABE N. 4 (5 punkte)
Ein Mathematiker lebt in einem n-dimensionalen Raum. Er bewegt sich nur auf Gitterpunkte. Er kann sich von einem Gitterpunkt A zu einem Punkt B bewegen, genau dann wenn B ein Gitterpunkt ist und die Distanz $|AB|$ eine ganze Zahl ist. Beweise, dass wenn der Mathematiker in seine Anfangsposition nach einigen Zügen zurückkommt, die gesamte Länge seines Wegs eine gerade Zahl ist.

AUFGABE N. 5 (5 punkte)
Der König Schief II. (er bewegt sich diagonal auf das Nachbarfeld zu) regiert das Königreich, dass die Form des Schachbrettes mit $(2n+1) \times (2n+1)$ Feldern hat, mit dem Thron auf dem zentralen feld. Er möchte seinen Thron verlassen, jedes Feld seines Königreiches besuchen, das er besuchen kann, und zu seinem Thron zurückkommen. Beweise, dass er mindestens $2(n+1)^2$ Züge für seinen Weg braucht.

AUFGABE N. 6 (5 punkte)
Auf dem $n \times n$ Schachbrett gibt es k gefärbte Felder. Auf einem von ihnen steht ein betrunkender Schachturm. Er bewegt sich wie ein gewöhnlicher Schachturm (waagrecht oder senkrecht, beliebig weit), jedoch muß er jeden Zug auf einem gefärbten Feld beenden. Nach einem waagerechten Zug muß ein senkrechter folgen und umgekehrt. Beweise, dass wenn $k \geq 2n$ ist, er auf einem gefärbten Feld anfangen kann und nach einigen Zügen auf dasselbe Feld zurückkommen kann.

AUFGABE N. 7 (5 punkte)
Für zwei ungerade teilefremde natürliche Zahlen definieren wir die Summe

$$\frac{S(a,b) := \sum_{i=1}^{(b-1)/2} \lfloor ia}{b\rfloor},$$

$\lfloor x \rfloor$ bedeutet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Z. B. $S(15,7) = \lfloor 15/7 \rfloor + \lfloor 30/7 \rfloor + \lfloor 45/7 \rfloor = 2+4+6 = 12$ und $S(7,15) = 0+0+1+1+2+2+3 = 9$. Beweise, dass

$$S(a,b) + S(b,a) = \frac{(a-1)(b-1)}{4}$$

gilt.

AUFGABE N. 8 (5 punkte)
Für welche n gibt es n Gitterpunkte in der Ebene, die die Ecken eines regelmässigen n-Eckes sind.

5. série

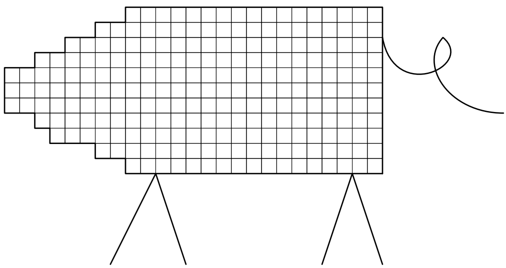
Téma: Mřížové body

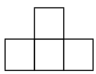
Termín odeslání: 12. ÚNORA 2001

1. ÚLOHA
Chceme přejít bažinu ve tvaru čtverce. Na všech mřížových bodech $[x, y]$ (pro $1 \leq x \leq n$, $1 \leq y \leq n$) byly umístěny kameny, po kterých můžeme chodit, přičemž můžeme dělat jen kroky délky 1. Škaredý vandal několik kamenů odnesl. Kolik nejvíce jich mohl odnést, abychom měli jistotu, že můžeme bažinu přejít shora dolů nebo zleva doprava? (Tj. že můžeme z nějakého kamene na bodě $[x, n]$ přejít na kámen $[x', 1]$ nebo z $[1, y]$ na $[n, y']$.)

2. ÚLOHA
Sousední král se pohybuje vždy na sousední políčko (sousedící hranou). Vládne království v podobě šachovnice $(2n+1)\times(2n+1)$ políček. Pro která n může vyjít z trůnu na prostředním políčku, obejít každé pole svého království právě jednou a dalším tahem usednout opět na svůj trůn? Pro která n může svou obhlídku ukončit na hraničním přechodu uprostřed strany čtverce?

3. ÚLOHA
Rozhodněte, zda lze oblast ve tvaru prasete (viz obrázek vlevo) beze zbytku vyplnit nepřekrývajícími se díly ve tvaru T složenými ze 4 čtverečků (viz obrázek vpravo).





4. ÚLOHA

Matfyzák se pohybuje po mřížovych bodech v n-rozměrném prostoru. Může se pohnout z bodu A do bodu B právě tehdy, když vzdálenost $|AB|$ je celé číslo. Dokažte, že když se matfyzák po několika tazích vrátí na počáteční pozici, tak celkově urazil sudou vzdálenost.

5. ÚLOHA

Šikmý král (pohybuje se o jedno pole po diagonále) vládne království v podobě šachovnice $(2n+1)\times(2n+1)$ políček, uprostřed které má postavený trůn. Chce vyjít z trůnu, obhlédnout tu část svého království, kam se může dostat, a usednout opět na trůn. Dokažte, že na svou obhlídku potřebuje nejméně $2(n+1)^2$ tahů.

6. ÚLOHA

Na šachovnici $n \times n$ je k políček obarveno. Na jednom z nich stojí opilá věž. Pohybuje se jako normální šachová věž (tj. svisle či vodorovně libovolně daleko), avšak každý její tah musí skončit na obarveném políčku, po vodorovném tahu musí následovat svislý a naopak. Dokažte, že pokud $k \geq 2n$, pak může věž z nějakého obarveného políčka vyjít a vrátit se po několika tazích zpět.

7. ÚLOHA

Pro dvě lichá přirozená čísla a a b, která jsou nesoudělná, definujeme součet

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{(b-1)/2} \left\lfloor \frac{ia}{b} \right\rfloor .$$

Zde $\lfloor x \rfloor$ označuje dolní celou část reálného čísla x, tedy největší celé číslo, které je menší nebo rovno x. Například $S(15,7) = \lfloor 15/7 \rfloor + \lfloor 30/7 \rfloor + \lfloor 45/7 \rfloor = 2+4+6 = 12$ a $S(7,15) = 0+0+1+1+2+2+3 = 9$. Dokažte, že pak vždy platí

$$S(a,b) + S(b,a) = \frac{(a-1)(b-1)}{4}.$$

8. ÚLOHA

Pro která $n \geq 3$ existuje pravidelný n-úhelník v rovině, jehož vrcholy jsou mřížové body čtvercové sítě?

Řešení 5. série

1. úloha
Chceme přejít bažinu ve tvaru čtverce. Na všech mřížových bodech $[x, y]$ (pro $1 \leq x \leq n$, $1 \leq y \leq n$) byly umístěny kameny, po kterých můžeme chodit, přičemž můžeme dělat jen kroky délky 1. Škaredý vandal několik kamenů odnesl. Kolik nejvíce jich mohl odnést, abychom měli jistotu, že můžeme bažinu přejít shora dolů nebo zleva doprava? (Tj. že můžeme z nějakého kamene na bodě $[x, n]$ přejít na kámen $[x', 1]$ nebo z $[1, y]$ na $[n, y']$.)

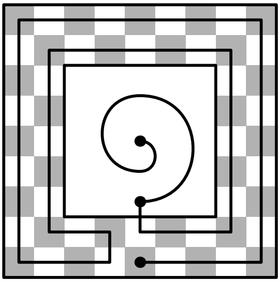
Pokud vandal odnesl všechny kameny ležící na diagonále čtverce, pak samozřejmě bažinu přejít nemůžeme. Vandal tedy jistě odnesl méně než n kamenů. Pokud vandal odnesl $n - 1$ kamenů, pak najdeme řádku, ze které neodnesl ani jeden kámen, a můžeme tedy po této řádce přeskákat na druhou stranu (samozřejmě, pokud bychom chtěli, můžeme analogicky najít i vhodný sloupec).

Poznámky opravovatele: Opravovat tuto úlohu nebylo, věřte mi, žádným potěšením. Úloha sice nebyla těžká, mnoho řešitelů ale zadání nepochopilo správně (a chyba tentokrát, myslím, nebyla jen na jejich straně). Někteří nepochopili, že mají zloduchovi dovolit vzít jen tolik kamenů, aby mohli *vždy* přejít bažinu. Smíme-li si předepsat, které kameny má zloduch vzít, úloha se tím velmi zjednoduší. Dávala jsem proto nejvýše +i pro útěchu.

Další problémy se týkaly nesprávného přečtení spojek a/nebo. Někteří zas nepřišli na to, jak zloduch umí zabránit přechodu ukradnutím pouhých n kamenů. Poslední, snadná, ale důležitá věc, na kterou mnozí zapomněli: je potřeba ukázat, že když zloduch ukradne $n - 1$ kamenů, pak vždy umíme bažinu přejít.

2. úloha
Sousední král se pohybuje vždy na sousední políčko (sousedící hranou). Vládne království v podobě šachovnice $(2n+1) \times (2n+1)$ políček. Pro která n může vyjít z trůnu na prostředním políčku, obejít každé pole svého království právě jednou a dalším tahem usednout opět na svůj trůn? Pro která n může svou obhlídku ukončit na hraničním přechodu uprostřed strany čtverce?

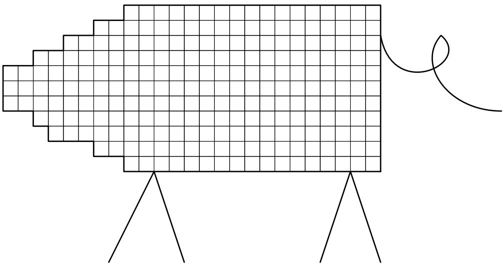
Král se nemůže za daných podmínek vrátit na svůj trůn, do středu strany může dojít právě tehdy, když n je sudé. Při svém pohybu král pravidelně střídá barvu políček, proto když projde všechna políčka (je jich lichý počet!), mají jeho výchozí a cílové políčko tutéž barvu. Rozhodně tedy nemohou tato políčka sousedit, tudíž se král nemůže dalším tahem vrátit na trůn. Pro lichá n snadno zjistíme, že střed čtverce a střed jeho strany mají různou barvu, proto ani v tomto případě není obchůzka možná. Pro sudá n trasu krále snadno zkonstruujeme, například indukcí. Pro $n = 0$ není co řešit (král zůstane na místě). Pokud umíme najít nějakou trasu krále vedoucí ze středu čtverce $(2n + 1) \times (2n + 1)$ do středu jeho strany, můžeme ji podle následujícího obrázku nastavit na cestu pro čtverec $(2(n + 1) + 1) \times (2(n + 1) + 1)$.

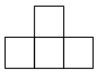


Poznámky opravovatele: Ze správných řešení všechna využívala myšlenku podobnou té ve vzorovém řešení – až na dvě, která v části (a) zapojila Pickovu formuli. Ze špatných řešení, jichž byla menšina, převládalo opomenutí ověření schopnosti krále projít pro sudá n svou zemi, jak bylo požadováno. Krom toho řešitelé ignorovali možnost $n = 0$, což jim bylo odpuštěno.

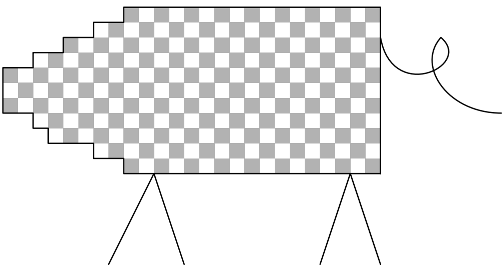
3. úloha

Rozhodněte, zda lze oblast ve tvaru prasete (viz obrázek vlevo) beze zbytku vyplnit nepřekrývajícími se díly ve tvaru T složenými ze 4 čtverečků (viz obrázek vpravo).





Prase nelze uvedenými dílky vyplnit. Nejsnáze to dokážeme, pokud si čtverečky šachovnicovitě obarvíme (viz obrázek). Snadno spočítáme, že počet černých i bílých políček je stejný



a že celkový počet políček je 236, což není dělitelné osmi. Předpokládejme pro spor, že plochu lze dílky vyplnit. Nazvěme černým takový dílek tetromina, který leží na třech černých a jednom bílém políčku, bílým takový, který leží na třech bílých a jednom černém. Černých políček je stejně jako bílých, musí tedy být stejný i počet černých a bílých tetromin, z čehož plyne, že počet použitých dílků je sudý a tedy že počet políček je dělitelný osmi. On však osmi dělitelný není, tedy jsme dostali kýžený spor, který ukazuje, že plochu vyplnit nelze.

Poznámky opravovatele: Čtvrtina důkazů neexistence spočívala ve vyšetřování počátečních možností, jak prasátko pokrýt, a ukázání, že v každém případě se dostaneme do neřešitelné situace. Za tato řešení jsem nemilosrdně strhával i-čka, jelikož počátečních možností je nesmírně mnoho a obecně prohledávání všech možností vede k exponenciální časové složitosti.

4. úloha

Matfyzák se pohybuje po mřížovych bodech v n-rozměrném prostoru. Může se pohnout z bodu A do bodu B právě tehdy, když vzdálenost $|AB|$ je celé číslo. Dokažte, že když se matfyzák po několika tazích vrátí na počáteční pozici, tak celkově urazil sudou vzdálenost.

Obarvěme mřížové body šachovnicovitě, tj. bod $[a_1, \ldots, a_n]$ bude bílý právě tehdy, když je číslo $a_1+\cdots+a_n$ sudé, v opačném případě bude černý. Nejprve dokážeme, že matfyzák se svým tahem dostane na políčko opačné barvy právě tehdy, když ten tah má lichou délku. K tomu si stačí uvědomit, že pro libovolné celé číslo k mají k a k^2 stejnou paritu. Pokud se matfyzák svým tahem posunul o vektor $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, měl jeho tah délku $d = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Čísla d, $d^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ i $x_1 + \cdots + x_n$ mají stejnou paritu. Barva políčka je dána paritou součtu souřadnic a tento součet se změní právě o $x_1 + \cdots + x_n$, tedy jeho parita se změní právě tehdy, když toto číslo je liché, neboli když d je liché.

Zbytek důkazu už je jednoduchý. Po návratu do výchozí polohy změnil matfyzák barvu navštíveného políčka suděkrát, čili učinil sudý počet tahů liché délky. Takže délka trasy matfyzáka je součet sudého počtu lichých čísel (a nějakého počtu sudých čísel), čili číslo sudé.

Poznámky opravovatele: Správná řešení této úlohy byla vesměs podobná řešení autorskému. Využívala tedy faktu, že v pravoúhlém trojúhelníku s celočíselnými délkami stran je parita součtu délek odvěsen rovna paritě délky přepony. Pouze *Martin Doubek* tuto myšlenku zobecnil i pro nepravoúhlé trojúhelníky, čímž dostal řešení poněkud originálnější. Nejčastější chybou bylo, že řešitel zapomněl, že se matfyzák může pohybovat také diagonálně. Pak si ovšem úlohu hodně zjednodušil a přišel o část bodů.

5. úloha

Šikmý král (pohybuje se o jedno pole po diagonále) vládne království v podobě šachovnice $(2n+1)\times(2n+1)$ políček, uprostřed které má postavený trůn. Chce vyjít z trůnu, obhlédnout tu část svého království, kam se může dostat, a usednout opět na trůn. Dokažte, že na svou obhlídku potřebuje nejméně $2(n+1)^2$ tahů.

Vyznačme na šachovnici všechna lichá políčka v lichých řadách – tj. roh, políčko ob jedno ve vodorovném i svislém směru, atd. Celkem vyznačíme $(n+1)^2$ políček. Každé z nich musí král při své obchůzce projít, při cestě mezi libovolnými dvěma z nich musí udělat alespoň dva tahy, tudíž celkový počet tahů je alespoň $2(n+1)^2$. Snadno také nahlédneme (což už po nás zadání úlohy nevyžaduje), že víc není potřeba. Stačí ukázat, že normálním králem je možno (pro libovolné k) obejít šachovnici $k \times k$ pomocí k^2 tahů, a pak z této cesty (pro $k = n+1$) vyrobit cestu šikmého krále. Detaily si zkus domyslet sám.

Poznámky opravovatele: Většina řešení byla správná a podobná autorskému. Někteří řešitelé královi poradili, jak má skrze království své kroky vážit, leč nevysvětlili mu, že to lépe nelze (prostě dokázali opačnou nerovnost). Někteří neudělali ani to, ale to už tak bývá.

6. úloha

Na šachovnici $n \times n$ je k políček obarveno. Na jednom z nich stojí opilá věž. Pohybuje se jako normální šachová věž (tj. svisle či vodorovně libovolně daleko), avšak každý její tah musí skončit na obarveném políčku, po vodorovném tahu musí následovat svislý a naopak. Dokažte, že pokud $k \geq 2n$, pak může věž z nějakého obarveného políčka vyjít a vrátit se po několika tazích zpět.

Začneme trochu zeširoka, k řešení naší úlohy můžeme s výhodou využít jednoduché tvrzení z teorie grafů. *Grafem* rozumíme nějakou množinu bodů (říkejme jim *vrcholy*) a množinu jejich spojnic (*hran*), přičemž mezi dvěma vrcholy vede nejvýše jedna hrana, každá hrana spojuje dva různé vrcholy. *Cyklus* v grafu je posloupnost jeho vrcholů (ne nutně všech) $(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ (kde $l \geq 3$), ve které se žádný vrchol nevyskytuje dvakrát, mezi vrcholy v_i a v_{i+1} vede hrana pro $i = 1, \ldots, l-1$, hrana vede též mezi v_1 a v_l.

Dokážeme, že pokud graf s n vrcholy má alespoň n hran, pak v něm existuje cyklus (kdo už o teorii grafů něco ví, ten toto tvrzení hbitě odvodí z toho, že strom s n vrcholy má $n-1$ hran). Důkaz provedeme indukcí podle n. Pro $n = 1$ neexistuje žádný graf s jedním vrcholem a alespoň jednou hranou, tedy tvrzení platí. Nechť je tedy $n > 1$. Pokud v grafu existuje vrchol, z nějž vede jediná hrana, vynecháme z grafu tento vrchol a tuto hranu. Tím získáme graf s $n-1$ vrcholy a $n-1$ hranami, ten dle indukčního předpokladu obsahuje cyklus. Analogicky postupujeme, pokud z nějakého vrcholu nevede žádná hrana. Takže z každého vrcholu v našem grafu vycházejí alespoň dvě hrany. Zkonstruujeme posloupnost vrcholů grafu takto: zvolme libovolně v_1. Je-li již určen v_i, pak za v_{i+1} vybereme libovolný vrchol spojený s v_i, ovšem tak, aby $v_{i+1} \neq v_{i-1}$ (pro $i = 1$ toto omezení odpadá). Takový vrchol v_{i+1} existuje – právě tady využijeme to, že z každého vrcholu (a tedy i z v_i) vedou alespoň dvě hrany. V této posloupnosti se jednou začnou vrcholy opakovat (máme jen n vrcholů a tvoříme nekonečnou posloupnost), nechť první opakování je v j-tém kroku, kdy pro nějaké $i < j$ platí $v_i = v_j$. Pak ovšem $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1})$ je cyklus.

Zpět k naší úloze. Sestrojíme graf s vrcholy $R \cup S$, kde $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$, $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Je-li políčko (i, j) na šachovnici obarveno, spojíme vrcholy r_i a s_j hranou, jiné hrany v grafu nebudou. Náš graf má $2n$ vrcholů a $k \geq 2n$ hran, podle předchozího odstavce tedy obsahuje nějaký cyklus, označme jej $(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ (všimněme si, že v tomto cyklu se pravidelně střídají vrcholy z R a z S). Každá z hran tohoto cyklu (tedy z hran v_1v_2, v_2v_3, … , $v_{l-1}v_l$,

$v_l v_1$) odpovídá nějakému obarvenému políčku, políčka jdoucí po sobě v této posloupnosti leží střídavě ve stejném řádku a ve stejném sloupci (podle toho, jestli je jejich společný vrchol prvek R nebo S), čili tvoří kýžený tah opilé věže.

Poznámky opravovatele: Jen málo z vás použilo k řešení teorii grafů (a ti, co tak učinili, s výjimkou jednoho něco opomněli), většinou jste úlohu řešili přímější, i když ne tak elegantni metodou – dokázali jste, že pro malou šachovnici to platí a že velkou umíte zmenšovat. Protože za formální chyby při indukci shora jsem body nestrhávala, odnesla si většina řešitelů plný počet bodů.

7. úloha

Pro dvě lichá přirozená čísla a a b, která jsou nesoudělná, definujeme součet

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{(b-1)/2}\left\lfloor\frac{ia}{b}\right\rfloor.$$

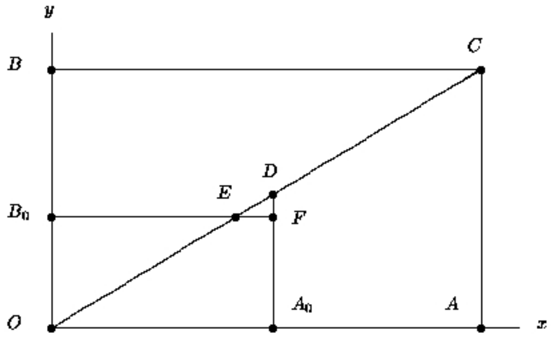
Zde $\lfloor x\rfloor$ označuje dolní celou část reálného čísla x, tedy největší celé číslo, které je menší nebo rovno x. Například $S(15,7)=\lfloor 15/7\rfloor+\lfloor 30/7\rfloor+\lfloor 45/7\rfloor=2+4+6=12$ a $S(7,15)=0+0+1+1+2+2+3=9$. Dokažte, že pak vždy platí

$$S(a,b)+S(b,a)=\frac{(a-1)(b-1)}{4}.$$

Nechť $a>b$. Na obrázku níže $O=(0,0)$, $A=(a,0)$, $A_0=(\frac{1}{2}(a-1),0)$, $B=(0,b)$, $B_0=(0,\frac{1}{2}(b-1))$, $C=(a,b)$ a $F=(\frac{1}{2}(a-1),\frac{1}{2}(b-1))$. Body E a D jsou průsečíky přímky OC s přímkami B_0F a A_0F. Skutečně $D_y=\frac{1}{2}(a-1)(b/a)>F_y=\frac{1}{2}(b-1)$.

Nejdříve si uvědomíme, že jelikož a je nesoudělné s b, uvnitř úsečky OC neleží žádný mřížový bod. Snadno nahlédneme, že číslo $\lfloor\frac{ib}{a}\rfloor$ je počet mřížových bodů ležících na přímce $x=i$ nad osou x a pod přímkou OC. Odtud sečtením vidíme, že číslo $S(b,a)$ je rovno počtu mřížových bodů v trojúhelníku OA_0D (včetně bodů na úsečce A_0D, nepočítáme však body na ose x). Analogickou úvahou dojdeme k tomu, že číslo $S(a,b)$ je počet mřížových bodů v trojúhelníku OB_0E (včetně úsečky B_0E, nepočítáme však body na ose y).

Úsečka FD neobsahuje mřížový bod kromě F, protože $D_y=\frac{1}{2}(a-1)(b/a)<\frac{1}{2}(b+1)=F_y+1$. V trojúhelníku EFD proto mimo stranu EF neleží mřížový bod. $S(a,b)+S(b,a)$ se proto rovná počtu mřížových bodů v obdélníku OA_0FB_0 bez os x a y. Což je $\frac{1}{2}(a-1)\cdot\frac{1}{2}(b-1)$.



Poznámky opravovatele: Všechna správná řešení až na jedno porovnávala počet bodů v obdélníku s počtem bodů ve dvou trojúhelnících. Někteří však zapomněli dokázat, že složením oněch dvou trojúhelníků skutečně vznikne obdélník.

8. úloha
Pro která $n \geq 3$ existuje pravidelný n-úhelník v rovině, jehož vrcholy jsou mřížové body čtvercové sítě?

Nejdříve dokážeme tři klíčová lemmata:

Lemma 1: Nechť v rovině existuje pravidelný n-úhelník s vrcholy v mřížových bodech. Pak $\cos 2\pi/n$ je racionální.[2]

Důkaz: Předpokládejme, že máme daný pravidelný n-úhelník s vrcholy v mřížových bodech. Označme a délku jeho strany a b délku jeho nejkratší úhlopříčky (pro $n = 3$ volíme $b = a$). Z Pythagorovy věty plyne (vrcholy n-úhelníku jsou mřížové body), že a^2 i b^2 jsou přirozená čísla. Tři po sobě jdoucí vrcholy n-úhelníku tvoří rovnoramenný trojúhelník se základnou délky b a rameny délky a, která navíc svírají úhel $\pi(1-2/n)$. Z kosinové věty tedy dostáváme $b^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(\pi(1 - 2/n))$. Odtud dostáváme

$$\cos 2\pi/n = -\cos(\pi(1-2/n)) = \frac{b^2 - 2a^2}{2a^2}.$$

Je tedy jasné, že $\cos 2\pi/n$ je racionální.

---

[2]Omlouvám se všem, kteří nejsou zvyklí používat „obloukovou míru“, kterou v tomto řešení při značení velikosti úhlů používám. Symbolem π rozumíme velikost přímého úhlu, tedy úhlu o velikosti 180 stupňů.

Lemma 2: Neexistuje rovnostranný trojúhelník s vrcholy v mřížových bodech.[3]

Důkaz: Pro spor předpokládejme, že takový rovnostranný trojúhelník existuje. Nechť a je délka jeho strany. Pak a^2 je přirozené číslo. Pro obsah S tohoto trojúhelníku tedy máme $S = a^2\sqrt{3}/4$, což je zjevně iracionální číslo. Na druhou stranu je snadno vidět, že libovolný trojúhelník s vrcholy v mřížových bodech má obsah roven $k/2$ pro nějaké přirozené číslo k, tedy racionální číslo. To můžeme nahlédnout například z Pickovy formule (viz úvod k této sérii), vhodným „dokreslením" trojúhelníku na obdélník, nebo i jinak. Tím jsme dostali kýžený spor.

Lemma 3: Pro $n \geq 5$ liché neexistuje pravidelný n-úhelník v rovině, jehož vrcholy jsou mřížové body.

Poznámka: Toto lemma dokážeme dvěma (poněkud odlišnými) způsoby. První z nich je původní autorský záměr, na druhý možný způsob (mnohem elegantnější) přišel jeden z řešitelů.

První důkaz: Nechť $n \geq 5$ je liché. Podle lemmatu 1 stačí ukázat, že $\cos 2\pi/n$ je iracionální. Pro $n = 5$ je $\cos 2\pi/5 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, což je iracionální číslo. Pro $n \geq 7$ už je přímý výpočet obtížný, ne-li nemožný, musíme postupovat chytřeji. Podle Moivreovy věty platí rovnost

$$1 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = (\cos 2\pi/n + i \sin 2\pi/n)^n.$$

Rozepíšeme-li pravou stranu rovnosti podle binomické věty a porovnáme-li v získané nerovnosti reálné části, dostaneme

$$\begin{aligned} 1 = (\cos 2\pi/n)^n - \binom{n}{2}(\cos 2\pi/n)^{n-2}(\sin 2\pi/n)^2 + \cdots \\ \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{n-1}(\cos 2\pi/n)^1(\sin 2\pi/n)^{n-1}. \end{aligned}$$

Použijeme ještě rovnost $(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2$. Předchozí rovnost pak upravíme na tvar $1 = a_n(\cos 2\pi/n)^n + a_{n-2}(\cos 2\pi/n)^{n-2} + \cdots + a_1(\cos 2\pi/n)^1$. Snadno můžeme spočíst $a_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} = 2^{n-1}$. Vidíme, že číslo $\cos 2\pi/n$ je kořenem polynomu $P(x) = 2^{n-1}x^n + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x - 1$, kde a_k jsou celá čísla. Ze známého kritéria pro existenci racionálních kořenů polynomu dostáváme: Je-li $x = p/q$ kořen polynomu P zapsaný jako zlomek v základním tvaru, pak $p| - 1$ a $q|2^{n-1}$. Tedy $p = \pm 1$ a $q = 2^k$. Je-li $\cos 2\pi/n$ racionální, pak $\cos 2\pi/n = \pm 1/2^k$. Jelikož ale $n \geq 7$ a funkce cos je na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ klesající, dostáváme $\cos 0 = 1 > \cos 2\pi/n > \cos 2\pi/6 = 1/2$. Odtud je vidět, že číslo $\cos 2\pi/n$ nemůže být tvaru $\pm 1/2^k$. Tím jsme dostali spor s racionalitou čísla $\cos 2\pi/n$. Důkaz je hotov.

Druhý důkaz (upraveno podle *Josefa Cibulky*): Pro spor předpokládejme, že takový n-úhelník existuje. Označme $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ jeho vrcholy. Označme d délku jeho strany. Dále označme A'_k bod, jehož souřadnice dostaneme jako dvojnásobek souřadnic bodu A_k. Pak A'_1, A'_2, …, A'_n tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníku, jehož strana má délku $2d$ a jehož vrcholy mají

[3] Toto lemma je potřeba dokázat jinak než použitím lemmatu 1, jelikož $\cos 2\pi/3 = -1/2$ je racionální.

sudé souřadnice. Označme B_k středy nejdelších úhlopříček tohoto n-úhelníka, přesněji buď B_1 střed úsečky $A'_1 A'_{\frac{n-1}{2}}$, B_2 střed úsečky $A'_2 A'_{\frac{n+1}{2}}$ atd. Je zřejmé, že body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ jsou mřížové a tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníku. Z podobnosti snadno dopočteme, že délka jeho strany je $2d \sin \pi/2n$. Jelikož $n \geq 5 > 3$, snadno dostáváme $q = 2 \sin \pi/2n < 1$. Ukázali jsme, že z existence vyhovujícího n-úhelníku o straně délky d plyne existence vyhovujícího n-úhelníku o straně délky qd. Opakováním téhož postupu dostaneme existenci vyhovujícího n-úhelníku o straně délky $q^l d$ pro libovolné l přirozené. Jelikož $q < 1$, bude pro dostatečně velké l výsledná délka strany menší než 1. To je ale spor, každé dva mřížové body mají vzájemnou vzdálenost alespoň 1, tedy i délka strany příslušného n-úhelníku nemůže být menší než 1. Tím je důkaz hotov.

Nyní již bude poměrně snadné vyřešit úlohu.

Věta: Jediné přirozené číslo, pro které existuje pravidelný n-úhelník v rovině s vrcholy v mřížových bodech, je $n = 4$.

Důkaz: Čtverec zjevně požadovaným způsobem nakreslit v rovině lze (volíme např. vrcholy $[\pm 7, \pm 7]$), zbývá si tedy uvědomit, že jiná čísla než $n = 4$ nevyhovují. Dokážeme to sporem. Nechť $n \neq 4$ vyhovuje úloze. Pokud n je liché číslo, pak pro $n = 3$ dostaneme spor s lemmatem 2, pro $n \geq 5$ dostáváme spor s lemmatem 3. Pokud $n = kl$, kde $l \geq 3$ je liché číslo, pak si stačí uvědomit, že pokud umíme nakreslit vyhovující kl-úhelník, umíme nakreslit i vyhovující l-úhelník (stačí brát každý k. vrchol v nakreslení kl-úhelníku). Jenže lichá čísla jsme před chvíli vyloučili, tedy l-úhelník nakreslit nelze, takže nelze nakreslit ani kl-úhelník. Zbývá tedy případ, kdy $n \neq 4$ je mocnina dvojky. Tedy $n = 2^k$, $k \geq 3$. Pokud lze nakreslit n-úhelník, pak podle předchozí úvahy lze nakreslit i 8-úhelník, jenže $\cos 2\pi/8 = \sqrt{2}/2$ je iracionální. Dostáváme tedy spor s lemmatem 1.

Tím je tedy úloha vyřešena, jediné řešení je $n = 4$.

Poznámka: Zkus se zamyslet, jak by to dopadlo, kdybychom pravidelné n-úhelníky kreslili do jiných mřížek, např. pravidelné trojúhelníkové, případně do krychlové v prostoru (zkus vymyslet i jiné varianty). Tyto případy lze vyřešit malou modifikací uvedeného postupu.

Poznámky opravovatele: Mezi čtyřmi správnými řešeními se vyskytly tři odlišné přístupy. *Honza Kynčl* a *Katarína Quittnerová* vymysleli řešení podobné vzorovému, dokazovali v něm iracionalitu čísel $\operatorname{tg} \pi/n$ pro $n \neq 4$. *Josef Cibulka* vymyslel elegantní řešení, jehož část jsme uvedli ve vzorovém řešení, a *Martin Tancer* využil ideu šachovnicového obarvování, která také vedla k cíli.

Ostatní řešitelé se daleko nedostali, za drobné součásti řešení (důkaz racionality různých goniometrických funkcí a pod.) jsem uděloval po bodu.