Seriál – Geometrie

Těžiště a moment setrvačnosti v geometrii

Úvod

Na téma letošního seriálu mě přivedla série článků Doc. Jaromíra Šimšy v časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 97. Články jsou o velice zajímavé a ne příliš známé metodě (rozuměj: já jsem ji neznal), jak lze „fyzikálně“ nahlížet na řadu geometrických tvrzení, ne vždy triviálních. Jak již název nenapovídá, budeme se zaměřovat na vybrané věty z geometrie trojúhelníku a čtyřúhelníku. Teorie je sice inspirována fyzikou, ale nebojte se, vše budeme dělat „čistě matematicky“. No tak to by snad na úvod stačilo.

Těžiště

Definice. *Hmotným bodem* nazveme dvojici (X, m), kde X je bod v rovině a m reálné číslo. Číslo m nazveme *hmotnost* bodu X.

Poznámka: Někdy budeme říkat „hmotný bod X“ a budeme tím rozumět hmotný bod (X, m). Nedorozumění snad nehrozí.

Poznámka: Omezení na rovinu je zbytečné. Vše lze dělat např. v prostoru.

Množině hmotných bodů budeme říkat *soustava*[1] a budeme ji psát do hranatých závorek (např. $S = [(A, 1), (A, 3), (B, -2)]$ je soustava. Označíme m_X součet hmotností všech bodů v soustavě X, tj. „celkovou hmotnost soutavy“ (tedy $m_S = 1 + 3 - 2 = 2$).
Definice. Bod T_S nazveme *těžištěm* soustavy $S = [(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, b_n)]$, pokud

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{T_S A_i} = 0.$$

Poznámka: $\overrightarrow{AB}$ zde značí vektor. Ti, co se s vektory nesetkali, mohou tuto definici bez obav ignorovat.

Věta 1. Pokud $m_S \neq 0$, pak existuje právě jedno těžiště soustavy S.

Důkaz: Provede se snadno z rovnosti (P je libovolný bod)

$$\overrightarrow{PT_S} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{PA_i}.$$

[1] Je to trochu divná množina, protože v ní nevylučujeme ani dva naprosto stejné hmotné body. Takže lépe řečeno soubor.

Věta 2. (lepení) Těžiště soustavy S se nezmění, zaměníme-li jakoukoliv podsoustavu P jedním hmotným bodem (T_P, m_P).

Věta 3. (štěpení) Těžiště soustavy S se nezmění, zaměníme-li libovolný bod (A, n) soustavou P takovou, že $T_P = A, m_P = n$.

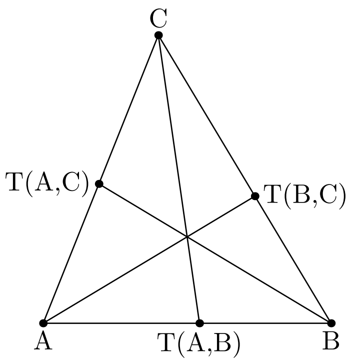
Těžiště podsoustavy soustavy S složené např. z hmotných bodů A, B budeme značit $T_S(A, B)$, její hmotnost $m_S(A, B)$.

Věta 4. Mějme soustavu hmotných bodů $S = [(A, m), (B, n)],\ m \neq 0, n \neq 0$. Těžiště T_S leží na přímce AB a platí $|m| \cdot |AT_S| = |n| \cdot |BT_S|$.

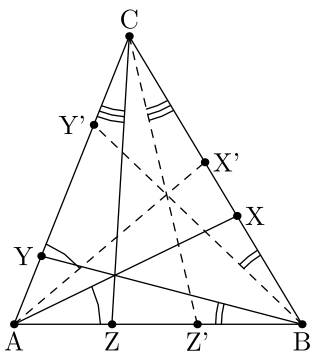
Poznámka: Věty 1 až 4 dovolují určit těžiště libovolné soustavy (ještě je třeba rozmyslet si cvičení 1). K těžišti se můžeme dopracovat různými způsoby, podle toho v jakém pořadí body slepujeme. Tento jednoduchý a názorný princip dovoluje řešit i řadu netriviálních úloh. Jeden z důsledků pro trojúhelník shrnuje věta 6.

Cvičení 1. Zkoumejte polohu bodu T v závislosti na znaménkách hmotností bodů A a B.

Cvičení 2. Zjistěte, co se stane, když $m = 0$.



obr.1



obr.2

Aplikace v trojúhelníku

Věta 5. Mějme libovolný trojúhelník ABC a bod X. Potom existují čísla m_A, m_B, m_C taková, že soustava $S = [(A, m_A), (B, m_B), (C, m_C)]$ má těžiště $T_S = X$.

Poznámka: Soustavu $S = [(A, m_A), (B, m_B), (C, m_C)]$ budeme nyní používat častěji, tak budeme psát pouze soustava S.

Cvičení 3. Dokažte věty 1 – 5.

Věta 6. Mějme libovolný trojúhelník ABC a soustavu S. Pak přímky $AT_S(B, C)$, $BT_S(A, C)$ a $CT_S(A, B)$ procházejí bodem T_S.

Důkaz: Situace je znázorněna na obr. 1. Označme $P = [(A, m_A), (T_S(B,C), m_S(B,C))]$. Podle věty 2 platí $T_P = T_S$. Věta 4 říká, že T_P leží na přímce $AT_S(B,C)$. Stejnou úvahu zopakujeme pro zbylé dvě příčky a jsme hotovi. Z věty 4 plyne též vzorec $|AT_S| \,/\, |T_S T_S(B,C)| = (m_B + m_C)/m_A$.

Těžiště trojúhelníku. Těžnice (tj. příčky spojující vrchol a střed protilehlé strany) v libovolném trojúhelníku procházejí jedním bodem.

Důkaz: Mějme libovolný trojúhelník ABC. Vezmeme soustavu $S = [(A,1),(B,1),(C,1)]$. Označíme X, Y, Z středy stran BC, AC, AB. Z věty 4 dostaneme $T_S(B,C) = X, T_S(A,C) = Y$ a $T_S(A,B) = Z$, aplikujeme větu 6 a jsme hotovi. Označíme-li těžiště T, dostáváme $|AT| : |TX| = 2 : 1$, atd.

Cvičení 4. Podobným postupem dokažte, že se výšky protínají v jednom bodě.

Věta 7. (Cèvova) Příčky AX, BY, CZ libovolného trojúhelníku ABC procházejí jedním bodem, právě když platí rovnost

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1. \tag{C}$$

Důkaz: Nechť příčky AX, BY, CZ procházejí bodem M. Vezmeme soustavu S tak, aby $T_S = M$ (což podle věty 5 lze). Těžištěm soustavy $X = [(A, m_A), (B, m_B)]$ musí být bod Z, protože T_S je též těžištěm soutavy $[(T_X, m_X), (C, m_C)]$ a $T_S \in CZ$. Z věty 4 dostaneme

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} = \frac{m_B}{m_A}, \quad \text{a podobně} \quad \frac{|BX|}{|CX|} = \frac{m_C}{m_B}, \quad \frac{|CY|}{|AY|} = \frac{m_A}{m_C}.$$

Odtud okamžitě plyne (C).

Platí-li naopak (C), zvolíme soustavu $S = [(A, |BZ| \cdot |CX|), (B, |AZ| \cdot |CX|), (C, |AZ| \cdot |BX|)]$. Těžišti dvojic hmotných bodů jsou body X, Y, Z (**Cvičení 5**). Tedy AX, BY, CZ procházejí jedním bodem (totiž bodem T_S).

Změna hmotností bodů. Uvažujme opět trojúhelník ABC a příčky AX, BY, CZ, které procházejí bodem M. Vezmeme soustavu S, aby $T_S = M$. Nyní libovolně změníme hmotnosti bodů, např. položíme $m'_A = m_A, m'_B = 2m_B, m'_C = 3m_C$. Ve změněné soustavě $S' = [(A, m'_A), (B, m'_B), (C, m'_C)]$ vzniknou příčky AX', BY', CZ', které prochází bodem $T_{S'}$. Některým takovým změnám hmotností odpovídají změny příček s jednoduchou geometrickou interpretací. Jako příklad poslouží následující věta.

Věta 8. Nechť AX, BY, CZ jsou příčky trojúhelníku ABC, které procházejí jedním bodem. Nechť X', Y', Z' jsou takové body na stranách BC, AC, AB, pro které $|\sphericalangle CAX| = |\sphericalangle BAX'|$, $|\sphericalangle ABY| = |\sphericalangle CBY'|$, $|\sphericalangle BCZ| = |\sphericalangle ACZ'|$. Potom příčky AX', BY' a CZ' procházejí jedním bodem.

Důkaz: Situace je znázorněna na obr. 2. Zvolíme jako obvykle soustavu S. Hmotnosti změníme takto:

$$m'_A = \frac{|BC|^2}{m_A}, \quad m'_B = \frac{|AC|^2}{m_B}, \quad m'_C = \frac{|AB|^2}{m_C}.$$

Pro bod $X'' = T_{S'}(B, C)$ platí:

$$\frac{|BX''|}{|CX''|} = \frac{m'_C}{m'_B} = \frac{m_B\,|AB|^2}{m_C\,|AC|^2} = \frac{|CX|}{|BX|}\frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$

Ze sinových vět pro trojúhleníky ABX, ACX, ABX', ACX' dostaneme (**Cvičení 6**) rovnost

$$\frac{|BX'|}{|CX'|} = \frac{|CX|}{|BX|}\frac{|AB|^2}{|AC|^2},$$

tedy $X' = X''$, podobně obdržíme $Y' = Y''$ a $Z' = Z''$. A důkaz je hotov.

Štěpení a lepení

Věta 9. Každá přímka, která protíná trojúhelník alespoň ve dvou bodech a dělí obsah i obvod daného trojúhelníku ve stejném poměru, prochází středem kružnice jemu vepsané.

Důkaz: Vezměme si libovolnou přímku p, která dělí obsah i obvod daného trojúhelníku ve stejném poměru, a označíme si vrcholy trojúhelníku tak, aby p protínala strany AB a AC a neprocházela bodem A, průsečíky si označíme pořadě D, E. Chceme dokázat, že p prochází středem kružnice vepsané. Za tímto účelem si zvolíme soustavu $S = [(A, a), (B, b), (C, c)]$ (a, b, c jsou délky patřičných stran). Těžiště této soustavy je střed kružnice vepsané (**Cvičení 7**).

A teď hlavní trik důkazu – rozštěpíme hmotný bod (A, a) na dva hmotné body $A_1 = (A, a_1), A_2 = (A, a_2), a_1 + a_2 = a$. Víme, že soustava $S' = [(A, a_1), (A, a_2), (B, b), (C, c)]$ má stejné těžiště jako soustava S. Ale o těžišti soustavy S' také víme, že leží na přímce $D'E'$, kde $D' = T_{S'}(A_1, B), E' = T_{S'}(A_2, C)$! Těžiště S' totiž můžeme počítat tak, že nejprve určíme těžiště D' hmotných bodů A_1, B a těžiště E' hmotných bodů A_2, C a poté určíme těžiště hmotných bodů D' a E', které jistě leží na přímce $D'E'$. Nyní již stačí zvolit čísla a_1 a a_2, aby $D' = D, E' = E$, a důkaz bude hotov. Aby bod D byl těžištěm A_1, B, musí platit

$$|AD|\,a_1 = |BD|\,b,$$

$$a_1 = \frac{b(c - |AD|)}{|AD|}.$$

Podobně

$$a_2 = \frac{c(b - |AE|)}{|AE|}.$$

Zbývá ověřit, že $a_1 + a_2 = a$. Využijeme k tomu podmínku v zadání o rovnosti poměrů:

$$\frac{S(AED)}{S(ABC)} = \frac{|AE| + |AD|}{a + b + c},$$

$$\frac{\frac{1}{2}\,|AE|\,|AD|\sin\alpha}{\frac{1}{2}bc\sin\alpha} = \frac{|AE| + |AD|}{a + b + c}.$$

Nyní je ověření rovnosti $a_1 + a_2 = a$ již jen technickou záležitostí (**Cvičení 8**).

Moment setrvačnosti

Definice Uvažujme soustavu $S = [(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)]$. *Momentem setrvačnosti* soustavy S vzhledem k bodu X naveme číslo

$$J_S(X) := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot |XA_i|^2.$$

Věta 10. (Steinerova) Nechť $m_S \neq 0$. Pak pro libovolný bod X platí

$$J_S(X) = J_S(T_S) + m_S \cdot |XT_S|^2 .$$

Poznámka: Z této věty například vyplývá, že $J_S(X)$ je nejmenší (resp. největší) právě pro těžiště soustavy (nejmenší, pokud $m_S > 0$, největší, pokud $m_S < 0$).

Věta 11. (Jacobiův vzorec) Nechť $m_S \neq 0$. Potom

$$J_S(T_S) = \frac{1}{m_S} \cdot \sum_{1 \le i < k \le n} m_i m_k \cdot |A_i A_k|^2.$$

Důkaz: Z definice momentu setrvačnosti a Steinerovy věty pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ dostaneme rovnost

$$J_S(A_k) = \sum_{i=1, i \neq k}^{n} m_i \cdot |A_i A_k|^2 = J_S(T_S) + m_S \cdot |T_S A_k|^2 .$$

Nyní vynásobíme obě strany číslem m_k a všechny výsledné rovnosti sečteme. Dostaneme

$$2 \cdot \sum_{1 \le i < k \le n} m_i m_k \, |A_i A_k|^2 = J_S(T_S) \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k + m_S \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k \, |T_S A_k|^2 =$$

$$= J_S(T_S) \cdot m_S + m_S \cdot J_S(T_S),$$

což je po vydělení $2m_S$ dokazovaná rovnost.

Aplikace v trojúhelníku

Věta 12. Je dán trojúhelník ABC, jeho strany mají délky a, b, c a jeho těžnice mají délky t_a, t_b, t_c. Potom platí

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2).$$

Důkaz: Zvolíme soustavu $S = [(A,1),(B,1),(C,1)]$. Těžištěm této soustavy je „geometrické“ těžiště trojúhelníku ABC. Vyjádříme moment setrvačnosti této soustavy vzhledem k těžišti T z definice a poté z Jacobiova vzorce:

$$J_S(T) = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}t_a\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{2}{3}t_b\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{2}{3}t_c\right)^2 = \frac{4}{9}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2),$$

$$J_S(T) = \frac{1 \cdot 1 \cdot a^2 + 1 \cdot 1 \cdot b^2 + 1 \cdot 1 \cdot c^2}{1+1+1} = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

a důkaz je hotov.

Poznámka: Podíváme-li se na moment setrvačnosti soustavy S vzhledem ke středu kružnice opsané, dostaneme nerovnost $r \geq \frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (**Cvičení 9** – viz poznámku za Steinerovou větou).

Věta 13. (Stewartův vzorec) Je dán trojúhelník ABC s běžně označenými stranami a bod D na straně AB. Definujme čísla $p := \frac{|AD|}{c}$, $q := \frac{|BD|}{c}$ (je zřejmě $p+q=1$). Potom

$$|CD|^2 = pa^2 + qb^2 - pqc^2.$$

Důkaz: Zvolíme soustavu $S = [(A,q),(B,p)]$, těžištěm této soustavy je bod D. Vyjádříme-li moment setrvačnosti bodů C, D z definice a použijeme Steinerovu větu, dostaneme

$$J_S(C) = qb^2 + pa^2,$$

$$J_S(D) = qp^2c^2 + pq^2c^2 = pqc^2(p+q) = pqc^2,$$
$$J_S(C) = J_S(D) + |CD|^2,$$
$$qb^2 + pa^2 = pqc^2 + |CD|^2.$$

Věta 14. Je dán trojúhelník ABC, jeho kružnice vepsaná má střed S a poloměr ρ, kružnice opsaná má střed O a poloměr r. Pak $|OS| = \sqrt{r(r-2\rho)}$.

Důkaz: Tato netriviální věta má použitím naší teorie velice přirozené a přímočaré řešení. Zvolíme soustavu $S = [(A,a),(B,b),(C,c)]$. Těžištěm této soustavy je, jak víme, bod S. Využitím Jacobiova vzorce dostaneme

$$J_S(S) = \frac{1}{a+b+c}(abc^2 + acb^2 + bca^2) = abc.$$

Z definice momentu setrvačnosti a využitím Steinerovy věty pro bod O dostaneme

$$r^2(a+b+c) = J_S(O) = J_S(S) + (a+b+c)\,|OS|^2,$$

$$r^2(a+b+c) = abc + (a+b+c)\,|OS|^2,$$

$$|OS|^2 = r^2 - \frac{abc}{a+b+c}.$$

Zbývá nahlédnout, že $\frac{abc}{a+b+c} = 2r\rho$ a budeme hotovi. To ale plyne z následujícího dvojího vyjádření obsahu P trojúhelníku ABC:

$$(a+b+c)\rho = 2P = ab\sin\gamma = ab\frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{abc}{2r}.$$

Poznámka: Z dokázaného vzorce snadno plyne **Eulerova nerovnost** $r \geq 2\rho$.

Aplikace ve čtyřúhelníku

Nyní se pokusíme aplikovat naši teorii v geometrii čtyřúhelníku. Připomeňme na úvod několik pojmů. Čtyřúhelník se nazývá *tětivový*, pokud mu lze opsat kružnice, *tečnový*, pokud mu lze vepsat kružnice, a *dvojstředový*, pokud je tečnový i tětivový. Pokud má čtyřúhelník všechny vnitřní úhly menší než 180 stupňů, říkáme, že je *konvexní*.

Snadno lze nahlédnout, že konvexní čtyřúhelník je tečnový právě tehdy, když oba součty délek protilehlých stran jsou stejné. Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, když součet protilehlých úhlů je 180 stupňů. Později dokážeme i jiné kritérium tětivovosti vyjádřené pomocí délek stran a úhlopříček.

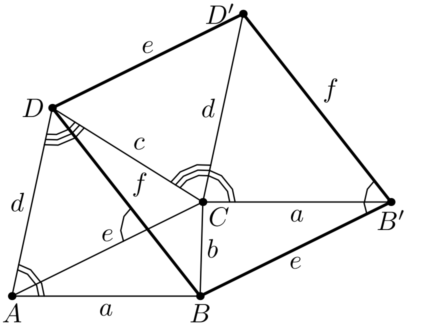
V dalším textu budeme vždy uvažovat čtyřúhelník $ABCD$ s běžně označenými stranami ($|AB| = a$, $|BC| = b$, …), úhlopříčkami ($|AC| = e$, $|BD| = f$) a úhly ($|\sphericalangle BAD| = \alpha$, …).

Věta 15. Úsečky spojující středy protilehlých stran a úsečka spojující středy úhlopříček libovolného čtyřúhelníku se protínají v jednom bodě.

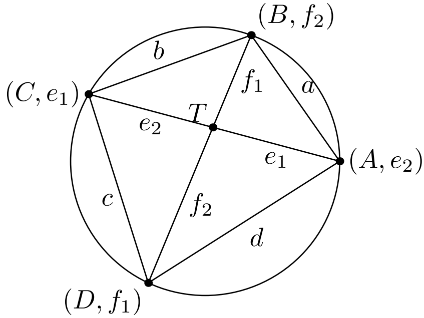
Důkaz: Mějme čtyřúhelník $ABCD$ a uvažujme soustavu $S = [(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)]$. Těžiště soustavy bude oním bodem, jímž procházejí všechny tři úsečky v zadání. K těžišti se můžeme dostat různými způsoby. Například tak, že nejprve určíme těžiště $T_S(A,B)$ a $T_S(C,D)$ a poté těžiště těchto dvou bodů. T_S je tedy středem úsečky spojující střed úsečky AB se středem úsečky CD. Podobně snadno obdržíme výsledek i pro zbylé dvě úsečky.

Poznámka: Dokázali jsme též, že společný bod všechny tři úsečky půlí. Z toho například plyne, že čtyřúhelník určený středy stran $ABCD$ je rovnoběžník. Tomuto rovnoběžníku se říká *Varignonův.*

Při konstrukčních úlohách často pomáhá *význačný rovnoběžník*, který je s Varignonovým stejnolehlý (střed stejnolehlosti je jeden z vrcholů $ABCD$, koeficient 2). Vznikne např. tak, že posunutím AC posuneme bod B do bodu B' a bod D do bodu D' a získáme rovnoběžník $BB'D'D$. V tomto rovnoběžníku (spolu s bodem C) je skryto mnoho prvků původního čtyřúhelníku $ABCD$. Velikosti stran $BB'D'D$ jsou velikosti úhlopříček $ABCD$, svírají spolu stejný úhel. Vzdálenosti vrcholů $BB'D'D$ od bodu C jsou velikosti stran $ABCD$. Sami si rozmyslete (nebo se podívejte na obrázek), kde najdeme úhly $ABCD$ a jaký význam mají úhlopříčky $BB'D'D$. Podle polohy bodu C navíc poznáme, je-li $ABCD$ konvexní – to nastane právě tehdy, když C leží uvnitř $BB'D'D$.



Význačný rovnoběžník



Obr. k Ptolemaiově větě

Věta 16. (Eulerova věta o čtyřúhelníku) V libovolném čtyřúhelníku platí

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4u^2,$$

kde u je vzdálenost středů úhlopříček.

Důkaz: Zatím jsme pracovali s těžištěm soustavy $S = [(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)]$. Nyní se podíváme na její moment setrvačnosti. Označme E, F středy úhlopříček e, f. Z Jacobiho vzorce dostaneme $J_S(T_S) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)$. Z definice nám vyjde $J_S(E) = \frac{1}{2}(e^2 + f^2 + 4u^2)$ (**Cvičení 10** – je třeba využít Steinerovu větu pro dvojici bodů B, D). A ze Steinerovy věty dostaneme po krátké úpravě dokazovanou rovnost.

Poznámka: Pro rovnoběžník odtud dostáváme známý vztah $2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$.

Věta 17. Je dán konvexní tětivový čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami, které se protínají v bodě X. Potom $|AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 + |DX|^2 = 4r^2$, kde r je poloměr opsané kružnice.

Důkaz: Použijeme stejnou soustavu jako v minulém důkazu. Podíváme-li se pozorně na dokazovaný vztah, zjistíme, že na levé straně je moment setrvačnosti S vzhledem k X a na pravé straně je moment setrvačnosti S vzhledem ke středu opsané kružnice. Momenty setrvačnosti S vzhledem ke dvěma bodům se rovnají, pokud jsou tyto body stejně vzdáleny od těžiště (to plyne ze Steinerovy věty). Vybaven touto myšlenkou již jistě čtenář důkaz úspěšně završí (**Cvičení 11**).

Věta 18. (Ptolemaiova věta) Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, když $ef = ac + bd$.

Důkaz: Dokážeme pouze jednu implikaci. Předpokládejme, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový. Označme T průsečík jeho úhlopříček. Dále označme úsečky AT, BT, CT, DT pořadě písmeny e_1, f_1, e_2, f_2. Stejnými písmeny budeme značit i jejich velikosti (značení viz obrázek). Platí $e_1 + e_2 = e$, $f_1 + f_2 = f$ (zřejmé) a $e_1e_2 = f_1f_2$ (viz Věta 19). Zvolíme hmotnosti vrcholů tak, aby T byl těžištěm naší soustavy – volíme $S = [(A, e_2), (B, f_2), (C, e_1), (D, f_1)]$.

Potom $T_S(A,C)=T, T_S(B,D)=T$, tedy $T_S=T$. Vyjádříme moment setrvačnosti S podle definice a z Jacobiho vzorce. Porovnáním obdržíme po krátké úpravě

$$2efe_1e_2 = e_2f_2a^2 + e_1f_2b^2 + e_1f_1c^2 + e_2f_1d^2. \qquad (*)$$

Vyjádříme dvojím způsobem obsahy trojúhelníků ABT a CDT:

$$2S(ABT) = e_1f_1 \sin|\sphericalangle ATB| = e_1 a \sin|\sphericalangle BAC|\,,$$

$$2S(CDT) = e_2f_2 \sin|\sphericalangle CTD| = f_2 c \sin|\sphericalangle BDC|\,.$$

Uvědomíme si, že úhly v horním řádku se rovnají úhlům v dolním řádku (věta o obvodovém úhlu) a srovnáním těchto vztahů dostaneme: $cf_1 = ae_2$. Obdobně $df_1 = be_1$. Nyní již snadno upravíme $(*)$ do tvaru $ef = ac + bd$.

Poznámka: Ptolemaiova věta plyne rovněž z **Bretschneiderovy** věty (někdy se jí říká *kosinová věta pro čtyřúhelník*): V konvexním čtyřúhelníku platí

$$e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma).$$

Z toho také dostaneme veledůležitou **Ptolemaiovu nerovnost** $ef \le ac + bd$ platnou pro libovolný čtyřúhelník s rovností právě pro tětivový čtyřúhelník. Pro konvexní čtyřúhelník provedeme důkaz takto:

$$(ef)^2 = e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha+\gamma) \le a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd = (ac+bd)^2.$$

Jak provést důkaz nerovnosti pro nekonvexní čtyřúhelník? (**Cvičení 12**)

Poznámka: Ptolemaiova nerovnost je „obraz trojúhelníkové nerovnosti v kruhové inverzi“. Ověřte toto heslo (**Cvičení 13** – za střed vezměte jeden z vrcholů čtyřúhelníku).

Ještě jedna aplikace

Věta 19. (Mocnost bodu ke kružnici) Je dána kružnice $k(S,r)$ a bod M. Bodem M veďme přímku p, která protíná kružnici k v bodech A, B. Potom $|MA|\cdot|MB| = \left|r^2 - |MS|^2\right|$. Součin $|MA|\cdot|MB|$ tedy nezávisí na volbě sečny p, nazývá se *mocnost bodu M ke kružnici k.*

Důkaz: Předpokládejme, že bod M leží uvnitř k. Důkaz pro druhý případ provedeme obdobně (**Cvičení 14**). Uvažujme soustavu $O = [(A,|MB|),(B,|MA|)$. Je zřejmě $T_S = M$. Z definice zjistíme, že

$$J_O(M) = |MB|\,|MA|^2 + |MA|\,|MB|^2 = |MA|\,|MB|\,|AB|\,,$$

$$J_O(S) = |MB|\cdot r^2 + |MA|\cdot r^2 = r^2\,|AB|\,.$$

A ze Steinerovy věty

$$r^2\,|AB| = |MA|\,|MB|\,|AB| + |MS|^2\,|AB|\,,$$

což je (již téměř) to, co jsme chtěli.

Závěrem

Závěr bude, podobně jako úvod, patřit k nejslabším částem seriálu, neboť mé pisatelské možnosti jsou, jak jste již zřejmě poznali, prekompaktní (tzn. totálně omezené).

Ač to abstraktní srdce matematika těžce nese, někdy vychytralá fyzikální úvaha pomůže najít cestu k řešení, případně též samotné řešení. Kromě příkladů využívajících úvahy o těžištích a momentu setrvačnosti lze v geometrii nalézt i jiná uplatnění fyzikálního přístupu. O jednom z nich pojednává článek „Potenciální energie a rovnováha sil v geometrii“, který vyšel opět v Rozhledech (rok 2000, číslo 1), autorem je opět Doc. J. Šimša (viz úvod). Další možná uplatnění čekají právě na vás, na čtenáře, kteří jste se dočetli až k těmto posledním řádkům letošního seriálu. A to je vše.