6. série

Metoda minimálního prvku

1. ÚLOHA

Do čtvercové tabulky 5×5 je napsáno 25 reálných čísel takových , že každé číslo je aritmetickým průměrem sousedních čísel (sousední čísla se nacházejí vedle sebe v tom samém řádku či sloupci). Dokažte, že všechna vepsaná reálná čísla jsou si rovna.

2. ÚLOHA

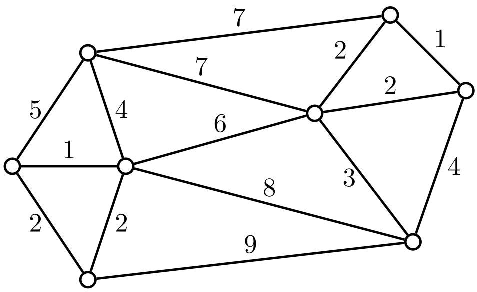
Dokažte, že kostku nelze složit z konečného počtu menších kostek, jejichž rozměry jsou navzájem různé.

3. ÚLOHA

V rovině je dáno 7 různých bodů tak, že žádných šest neleží na jedné přímce. Dokažte, že těchto 7 bodů určuje alespoň 9 různých přímek.

4. ÚLOHA

Mezi osmi vesnicemi je potřeba vybudovat síť bezprašných cest tak, aby bylo možné dostat se z každé vesnice do libovolné jiné po bezprašné cestě. Na mapce vidíte původní síť prašných cest i s délkami jednotlivých cest v km. Které cesty je potřeba přebudovat na bezprašné, jestliže chceme modernizovat co nejméně km starých cest? Navrhněte všechna rovnocenná řešení.



5. ÚLOHA

V rovině je dána konečná množina navzájem různoběžných přímek P s vlastností: Pro libovolné přímky $p, q \in P$, $p \neq q$ platí: jestliže se p, q protínají v bodě X, potom bodem X prochází aspoň jedna další přímka z množiny P. Dokažte, že všechny přímky z množiny P procházejí jedním bodem.

Řešení 6. série

1. ÚLOHA

Nechť h je minimální hodnota z 25 čísel uvažované tabulky. Předpokládejme, že ne všechna vepsaná čísla jsou si navzájem rovna. Potom existují taková dvě různá sousední čísla, že jedno z nich (označme ho a) má hodnotu h (kdyby neexistovala, musela by mít všechna čísla hodnotu h). Všechna sousední čísla a jsou větší nebo rovna h a jedno z nich je dokonce ostře větší než h, pak ale jejich aritmetický průměr musí být větší než h, což je spor.

2. ÚLOHA

Předpokládejme, že jsme kostku K takovým způsobem sestavili, nechť její hrana má délku 1. Mezi kostkami, které vyplňují dolní podstavu kostky K vezměme tu, jejíž hrana je nejkratší, označme ji K_1. To můžeme provést, protože kostek je konečný počet. Pro délku h_1 hrany kostky K_1 jistě platí $h_1 < 1/2$. Tato nejmenší kostka nemůže ležet na kraji dolní podstavy kostky K, protože pak bychom ji nemohli obklopit kostkami s většími hranami. Kostka K_1 je tedy obklopena ze všech stran kostkami o hraně větší než h_1, její horní stěna tedy musí být vyplněna dolními podstavami menších kostek, mezi nimi vybereme nejmenší K_2, která neleží na kraji podstavy kostky K_1 a pro jejíž hranu musí platit $h_2 < 1/2 \cdot h_1 < 1/4$. Po konečném počtu takovýchto konstrukcí musíme narazit na horní stranu kostky K, musí tedy platit $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 1$, což je spor s tím, že $h_i < (1/2)^i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. ÚLOHA

Dokažme nejprve pomocné tvrzení s problémem zdánlivě nesouvisející.

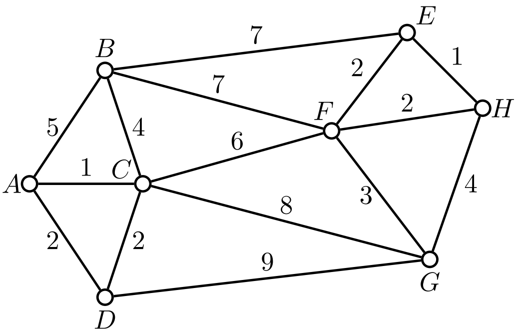
Lemma 1. Mějme konečnou množinu M bodů takovou, že každá přímka procházející jejími dvěma obsahuje aspoň jeden další bod z množiny M. Potom všechny body dané množiny leží na téže přímce.

Důkaz: Nechť tvrzení neplatí, potom ke každé přímce p procházející aspoň dvěma body množiny M najdeme bod z M, který na ní neleží. Ze všech dvojic (p, X), kde p je přímka procházející aspoň dvěma body množiny M a X je bod, který neleží na p, vybereme tu, pro kterou je vzdálenost $d(p, X)$ nejmenší (to můžeme provést, protože dvojic je konečný a nenulový počet (uvažujme M aspoň dvouprvkovou)). Nechť (p, X) je zvolená dvojice. Pravoúhlý průmět P bodu X na přímku p rozděluje přímku p na dvě uzavřené polopřímky. Kdyby na jedné z těchto polopřímek ležely dva body A, B z M, mohli bychom tím z nich, který je dál od P (nechť je to A) vést přímku procházející též bodem X (označme ji p'), potom by ale platilo $d(B, p') < d(X, p)$ a to není možné vzhledem k volbě dvojice (p, X). Tedy na přímce p leží nejvýše dva body z M, což je spor.

Dále rozlišíme tři případy: Leží-li ze sedmi bodů uvedených v zadání pět na přímce p, pak oněch sedm bodů určuje aspoň deset přímek. Leží-li právě čtyři body na jedné přímce, pak rozborem snadno zjistíme, že daných sedm bodů určuje nejméně jedenáct přímek. Třetí možnost je, že žádné čtyři body neleží na jedné přímce. Označme a_2 (resp. a_3) počet přímek procházejících právě dvěma (resp. právě třemi) body. Zřejmě platí, že $a_2 + 3a_3 = \binom{7}{2} = 21$, tj. počet všech dvojic bodů z daných sedmi. Z lemmatu 1 plyne, že $a_2 \neq 0$, tedy $a_2 \geq 3$ a $a_3 \leq 6$, z čehož konečně dostáváme, že $a_2 + a_3 \geq 9$, což jsme chtěli dokázat.

4. ÚLOHA

Hrana AB je stejně dlouhá jako cesta z A do B vedoucí přes C, můžeme ji tedy odstranit. Nechť G_1 resp. G_2 je podgraf uvažovaného grafu G složený z uzlů A, B C, D resp. E, F, G, H a hran grafu G je spojujících. Součet délek všech hran grafu G_1 je 9 a grafu G_2 12, je tedy menší než součet dvou nejkratších spojnic mezi grafy G_1 a G_2, což je 13. Úlohu nyní můžeme vyřešit samostatně pro graf G_1 a G_2. Vzniklé souvislé grafy pak spojíme nejkratší spojnicí CF mezi grafy G_1 a G_2 a takto získáme čtyři přípustná řešení.



5. ÚLOHA

Nechť M je množina všech průniků přímek z P. Podle předpokladu je M neprázdná, ale také konečná. Předpokládejme, že tvrzení neplatí a tedy, že ke každému bodu $X \in M$ existuje $p \in P$ jím neprocházející. Ze všech dvojic (p, X), kde $p \in P$, $X \in M$ a p neprochází X, vybereme tu, pro kterou je vzdálenost $d(X, p)$ nejmenší a označme ji (p_0, X_0). Bodem X_0 procházejí aspoň tři přímky z množiny P různoběžné s p_0, které tuto přímku protínají aspoň ve třech bodech, což je spor s tím, co jsme dokázali v závěru důkazu lemmatu 1.