1. série

Co víme o přirozených číslech

1. ÚLOHA
Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $4p + 3$, kde p je přirozené číslo.

2. ÚLOHA
Jestliže přirozené číslo n je větší než 4 a jestliže n není prvočíslo, potom číslo $(n-1)!$ je dělitelné číslem n. Dokažte. (Uměli byste dokázat, že za uvedených předpokladů je dokonce $(n-3)!$ dělitelné číslem n?)

3. ÚLOHA
Dokažte, že jestliže přirozená čísla a, b, c splňují vztah $a^2 + b^2 = c^2$, potom

(a) aspoň jedno z čísel a, b je dělitelné třemi,
(b) aspoň jedno z čísel a, b je dělitelné čtyřmi,
(c) aspoň jedno z čísel a, b, c je dělitelné pěti.

4. ÚLOHA
Nalezněte všechna prvočísla, pro která $4p^2 + 1$ a $6p^2 + 1$ jsou prvočísla.

5. ÚLOHA
První dvě, jako i poslední dvě cifry čtyřciferného přirozeného čísla n se shodují, přitom n je čtvercem přirozeného čísla. Nalezněte všechna taková n.

Řešení 1. série

1. ÚLOHA

Předpokládejme, že prvočísel tohoto tvaru je konečně mnoho. Vynásobme tedy všechny a v případě, že je jich sudý počet, přičtěme k výsledku dvojku, pokud jich je lichý počet, přičtěme čtyřku. Získáme tím číslo, které je tvaru $4k + 3$ a určitě není dělitelné žádným prvočíslem tvaru $4k+3$ (po vydělení libovolným z nich dává zbytek 2, resp. 4), ale součin prvočísel tvaru $4k + 1$ je opět tvaru $4k + 1$, což je spor.

2. ÚLOHA

Pokud n není prvočíslo, dá se napsat jako součin dvou čísel větších než jedna a menších než n. Pokud jsou tato čísla různá, pak jsou různými členy součinu $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n - 1$, čímž je tvrzení dokázáno. Pokud jsou tato čísla stejná, je $n = m^2$, jistě $m > 2$, tedy $2m < m^2 = n$ a $2m$ je druhým členem, vyskytujícím se v rozpisu $n!$. Pro $(n - 3)!$ se tvrzení dokazuje stejně, jen je potřeba zvlášť ošetřit případy $n = 5, 6$.

3. ÚLOHA

(i) Pokud je $a = 3k \pm 1$, $b = 3l \pm 1$, pak $a^2 = 3m + 1$, tedy $a^2 + b^2$ by bylo tvaru $3n + 2$, což je spor s tím, že druhá mocnina přirozeného čísla je tvaru $3n$ nebo $3n + 1$.

(ii) Snadno se ukáže, že druhá mocnina přirozeného čísla může být pouze tvaru $16k$, $16k+1$, $16k+4$ nebo $16k+9$. Sečtením druhých mocnin dvou čísel, která nejsou dělitelná čtyřmi tedy získáme číslo tvaru $16k+1+1$, $16k+1+4$, $16k+1+9$, $16k+4+4$, $16k+4+9$ nebo $16k + 9 + 9$, což nemůže být druhá mocnina přirozeného čísla.

(iii) Druhá mocnina přirozeného čísla musí být tvaru $5k$, $5k + 1$ nebo $5k + 4$. Pokud a, b nejsou dělitelná pěti, pak součet jejich druhých mocnin je tvaru $5k+1+1$, $5k+4+4$ nebo $5k + 1 + 4$. Protože první dva tvary nemohou být druhou mocninou přirozeného čísla, musí nastat třetí možnost, tedy $c^2 = 5l$, tedy c je dělitelné pěti.

4. ÚLOHA

Pokud je p tvaru $5k \pm 1$, pak $4p^2 + 1$ je dělitelné pěti, pokud je tvaru $5k \pm 2$, pak je $6p^2 + 1$ dělitelné pěti. Jediné prvočíslo, které zbývá, je $p = 5$, pro toto prvočíslo jsou $4p^2 + 1$ i $6p^2 + 1$ prvočísla. Jediné prvočíslo splňující podmínku ze zadání je 5.

5. ÚLOHA

Nechť první dvě cifry jsou rovny a a poslední dvě b. Číslo tedy vypadá takto: $aabb$. Toto číslo můžeme vydělit jedenácti: $aabb = 11 \cdot a0b$. Stačí vyzkoušet všechna čísla mezi 30 a 100, která jsou dělitelná jedenácti.