Povídání k šesté sérii

V úlohách šesté série máš k dispozici koulítko a rovinítko (případně jen koulítko). Koulítko funguje tak, že ho zabodneš do nějakého bodu trojrozměrného prostoru, nastavíš poloměr a opíšeš tomuto bodu sféru (podobně jako kružítkem opíšeš kružnici). Rovinítko umožňuje narýsovat rovinu určenou danými třemi body (podobně jako pravítkem narýsuješ přímku procházející dvěma body).

Zadání úloh většinou zní: „Sestrojte … “ Samozřejmě po Tobě nemůžeme chtít, abys konstrukce skutečně prováděl. Jednak doma asi nemáš koulítko (ani Matfyz, pokud víme, žádné nevlastní), a pak by se ta trojrozměrná řešení asi nevešla do obálek. Chceme po Tobě, abys přesně popsal, jak se dá konstrukce provést — např. „zabodnu koulítko do bodu B, opíšu kouli o poloměru $|BD|$, její průsečíky s přímkou p označím A_1, A_2“. Samozřejmě, že když v jedné úloze budeš dvacetkrát hledat střed koule opsané čtyřstěnu, tak stačí tuto konstrukci popsat jednou. Dále bychom chtěli (aspoň částečnou, dle možností) diskusi počtu řešení, tj. aby sis uvědomil, že přímka a koule se protnou buď ve dvou bodech, nebo v jednom, nebo vůbec, proto úloha bude mít buď dvě, jedno, nebo žádné řešení. A samozřejmě piš vysvětlení, proč děláš zrovna to, co děláš.

Něco o kruhové a kulové inverzi

K řešení mnoha konstrukčních úloh v rovině se používá zobrazení, kterému se říká kruhová inverze. Mějme bod S a kladné číslo r. Kruhová inverze se středem S a poloměrem r zobrazí bod X do bodu X', který leží na polopřímce SX a platí $|SX| \cdot |SX'| = r^2$ (tj. součin vzdálenosti vzoru a vzdálenosti obrazu od bodu S je roven číslu r^2). Rozmyslete si, že toto zobrazení zobrazí vnitřek kruhu se středem S a poloměrem r na vnějšek tohoto kruhu (tj. celý zbytek roviny) a vnějšek tohoto kruhu zase na jeho vnitřek. Body na kružnici $k(S, r)$ zůstanou na místě (proto se zobrazení nazývá „kruhová inverze“). Čím blíže je bod X k bodu S, tím dál bude jeho obraz X', bod S se „zobrazí do nekonečna“. Zobrazení je prosté a na (pokud uvažujeme rovinu bez bodu S) a pokud ho provedeme dvakrát po sobě, tak se všechny body roviny vrátí na svá místa (tedy X' se kruhovou inverzí zobrazí zpět do bodu X).

Některé důležité vlastnosti tohoto zobrazení:

(1) Kružnice, která prochází bodem S, se zobrazí na přímku neprocházející bodem S.
(2) Kružnice, která neprochází bodem S, se zobrazí zase na nějakou kružnici, která neprochází bodem S (pozor, střed kružnice se obecně nezobrazí do středu nové kružnice).
(3) Přímka procházející bodem S se zobrazí sama na sebe.
(4) Přímka neprocházející bodem S se zobrazí na kružnici, která prochází bodem S.

Ještě je důležité, jestli umíme narýsovat obraz X' bodu X. Pokud je X uvnitř kruhu $K(S, r)$, narýsujeme polopřímku SX, k té narýsujeme kolmici v bodě X a její průsečík s kružnicí $k(S, r)$ označíme Y. Pak sestrojíme v bodě Y tečnu k této kružnici (tj. kolmici na SY) a její průsečík s polopřímkou SX bude X' (rozmyslete si, že nám skutečně vyšel obraz bodu X — použijte podobnost trojúhelníků). Pokud je X vně tohoto kruhu, použijeme opačný postup — nejprve sestrojíme tečnu ke kružnici bodem X (bod dotyku Y najdeme pomocí Thaletovy kružnice), a pak kolmici na SX procházející bodem Y. Ta bude protínat polopřímku SX v bodě X'.

Další informace o kruhové inverzi a také některé řešené příklady můžeš najít např. v ročence 16. ročníku našeho semináře (1996/97).

Podobné zobrazení, říkejme mu kulová inverze, můžeme zavést ve trojrozměrném prostoru. Bude definováno úplně stejně: bod X se zobrazí na takový bod X' polopřímky SX, aby bylo $|SX| \cdot |SX'| = r^2$. Toto zobrazení zobrazuje vnitřek koule o středu S a poloměru r na její vnějšek a naopak. Vlastnosti (1) — (4) platí, pokud slovo přímka nahradíme slovem rovina a slovo kružnice slovem sféra. Obraz bodu X se také konstruuje podobně jako v rovině (rozmysli si jak). Tato fakta můžeš používat (bez důkazu) zejména při řešení 6. úlohy.

6. série

Téma: Geometrie

Termín odeslání: 13. března 2000

1. úloha (3 body)

Sestrojte kouli opsanou danému čtyřstěnu.

2. úloha (3 body)

Sestrojte rovinu, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s danou rovinou.

3. úloha (3 body)

Sestrojte čtyřstěn, jsou-li zadána těžiště jeho stěn.

4. úloha (5 bodů)

Sestrojte kouli vepsanou danému čtyřstěnu.

5. úloha (5 bodů)

Nechť jsou dány body S, S_{AB}, S_{BD}, S_{CD}, které neleží v jedné rovině. Sestrojte čtyřstěn $ABCD$ takový, že S je střed koule jemu opsané a S_{AB}, S_{BD}, S_{CD} jsou po řadě středy hran AB, BD, CD.

6. úloha (5 bodů)

Sestrojte kouli, která prochází danými dvěma body a dotýká se daných dvou koulí.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť jsou dány nekolineární[1] body T_A, V_A, T_C, přímka p mimoběžná s přímkou T_AV_A a úsečka délky d. Sestrojte čtyřstěn $ABCD$ takový, že T_A, resp. T_C, je těžiště stěny BCD, resp. ABD, V_A je pata výšky spuštěné z vrcholu A na stěnu BCD, bod B leží na přímce p a vzdálenost $|CV_A|$ je rovna d.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Sestrojte krychli **pouze koulítkem**, jsou-li dány délky stěnové a tělesové úhlopříčky.

Řešení 6. série

1. úloha

Sestrojte kouli opsanou danému čtyřstěnu.

Mějme čtyřstěn $ABCD$. Střed koule (sféry) opsané je bod, který má stejnou vzdálenost od všech vrcholů. Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodů A, B, je zřejmě rovina kolmá k úsečce AB, procházející středem této úsečky. Tuto rovinu (nazvěme ji osou úsečky) sestrojíme snadno — obdobně jako sestrojujeme osu úsečky v rovině: sestrojíme sféru se středem A a poloměrem například $|AB|$ (důležité je jen, aby byl poloměr větší, než $\frac{1}{2}|AB|$) a sféru se středem B a stejným poloměrem. Tyto sféry se protnou v kružnici k_1. Touto kružnicí umíme proložit rovinu ϱ_{AB} (jednoduše proložíme rovinu libovolnými jejími třemi body). Podobně sestrojíme roviny ϱ_{AC} a ϱ_{AD}, které budou osami úseček AC a AD. Protože úsečky AB, AC a AD jsou navzájem různoběžné a neleží všechny v jedné rovině, protnou se roviny ϱ_{AB}, ϱ_{AC} a ϱ_{AD} v právě jednom bodě a tento bod má stejnou vzdálenost od všech vrcholů čtyřstěnu, je tedy naším hledaným středem sféry opsané čtyřstěnu $ABCD$. Tu již zkonstruujeme snadno. Úloha má zřejmě právě jedno řešení pro každý čtyřstěn.

Poznámky opravovatele: Většina řešení vycházela z jedné z těchto myšlenek: buď sestrojení rovin souměrnosti hran (stejně jako autor úlohy) nebo sestrojení přímek kolmých k jednotlivým stěnám a procházejících středy kružnic opsaných těmto stěnám. Řešení prvního typu byla většinou správně (i když jen velmi málo z vás mělo řešení skutečně kompletní, i s diskusí počtu řešení), úvaha druhého typu je sice také správně, nicméně skoro nikdo ji nedotáhl do konce. Nemálo řešitelů sestrojovalo kružnice a přímky v rovině, aniž by se zmínili, jak se to dělá pomocí koulítka a rovinítka. Nejvíc se mi líbilo řešení *Dinovo* a *Honzy Kynčla.*

2. úloha

Sestrojte rovinu, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s danou rovinou.

[1] Tedy takové, že neleží na společné přímce.

Daný bod označme B a danou rovinu ϱ. V případě, že $B \in \varrho$, jsme hotovi, jinak budeme postupovat následujícím způsobem. Nejprve zapíchneme koulítko do bodu B a opíšeme sféru s dost velkým poloměrem, aby protnula rovinu ϱ — průsečíkem bude kružnice k. Na této kružnici zvolíme libovolné tři body A_1, A_2, A_3 a opíšeme jim sféry o poloměru $|A_1B| = |A_2B| = |A_3B|$. Společným průsečíkem těchto tří sfér budou právě dva body — bod B a bod C s ním souměrně sdružený podle roviny ϱ. Sestrojíme přímku BC — prostě narýsujeme libovolné dvě (různé) roviny, které procházejí body B, C a přímka BC bude jejich průsečíkem. Tato přímka bude kolmá k rovině ϱ.

Nyní stačí sestrojit rovinu, která je kolmá k této přímce a prochází bodem B. Sestrojme tedy libovolnou sféru se středem B a její průsečíky s přímkou BC označme P, Q. Jistě bod B leží ve středu úsečky PQ, takže stačí sestrojit osu úsečky PQ a to uděláme přesně tak, jako v řešení první úlohy.

Úloha má zřejmě pro libovolnou dvojici B, ϱ právě jedno řešení.

Poznámky opravovatele: Vyskytlo se překvapivé množství řešení; většina se podobala vzorovému, častá byla i konstrukce rovnoběžek ve dvou rovinách a proložení výsledné roviny. Přišla ale i řešení využívající kulovou inverzi (*Michal Malohlava*), „Thaletovu kouli“ (*Viktor Bachratý*), symetrických čtyřstěnů (*Dino*, samozřejmě s příběhem) a trojrozměrné podoby sestrojení rovnoběžky (*Zdeněk Neusser*). Naprostá většina řešitelů ovšem zapomněla na případ, kdy zadaný bod leží v zadané rovině, za což mi však připadalo kruté (a pro mě komplikované) strhávat body, zvlášť když postupy byly někdy použitelné i na tento zapomenutý případ.

3. úloha
Sestrojte čtyřstěn, jsou-li zadána těžiště jeho stěn.

Je celkem známá věc, že těžiště trojúhelníka leží ve třetině výšky trojúhelníka (tj. vzdálenost těžiště od strany trojúhelníka je třetinou vzdálenosti zbývajícího vrcholu od téže strany trojúhelníka). Odtud plyne, že vzdálenost těžiště stěny ABC od roviny BCD je třetinou vzdálenosti vrcholu A od roviny BCD. Ale totéž platí pro těžiště rovin ACD a ABD. To znamená, že rovina ϱ určená těžišti stěn ABC, ABD a ACD je rovnoběžná s rovinou BCD. A protože rovinu ϱ známe a v rovině BCD známe jeden bod (těžiště stěny BCD), stačí vést tímto bodem rovinu rovnoběžnou s ϱ — jak to udělat je popsáno v řešení předchozí úlohy. Podobně sestrojíme stěny ABC, ABD a ACD, vrcholy čtyřstěnu pak budou ležet v jejich průsečících.

Úloha má právě jedno řešení, pokud daná čtveřice bodů (těžiště jednotlivých stěn) neleží v jedné rovině. V opačném případě úloha nemá řešení.

4. úloha
Sestrojte kouli vepsanou danému čtyřstěnu.

Střed kružnice vepsané trojúhelníku leží v průsečíku os úhlů. Je to proto, že množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od daných dvou přímek (stran trojúhelníka), je právě osa úhlu, který tyto dvě přímky svírají.

V trojrozměrném prostoru je to podobné. Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od daných dvou (protínajících se) rovin, je rovina, kterou budeme nazývat osou úhlu dvou rovin. Stačí tedy najít osu rovin ABC a ABD, pak osu rovin ABC a ACD a nakonec osu rovin ABC a BCD. Bod ve společném průsečíku těchto tří os bude mít stejnou vzdálenost od všech čtyř rovin a bude to tedy střed koule vepsané čtyřstěnu.

Nyní popíšeme, jak najít osu dvou rovin — např. rovin ABC a ABD. Nejprve sestrojíme osu ϱ úsečky AB (postup je popsán v řešení první úlohy) — to je rovina, která je kolmá na AB, tj. společnou úsečku obou rovin. Rovina ϱ je tedy kolmá na obě roviny — ABC i ABD. Tyto roviny vytínají v rovině ϱ dvě přímky, označme je c a d. V rovině ϱ nyní sestrojíme osu úhlu těchto dvou přímek. To je rovinný problém. Rozmysli si, že koulítko můžeš používat jako kružítko a rovinítko jako pravítko, pokud uvažuješ jen průsečíky s danou rovinou ϱ. Osu úhlu (označme ji o) tedy sestrojíš sám. Nyní je zřejmé, že osa rovin ABC, ABD musí obsahovat osu o a jistě i přímku AB, bude to tedy rovina určená těmito dvěma přímkami.

Na závěr je ještě potřeba poznamenat, že osu úhlu dvou přímek (resp. rovin) tvoří ve skutečnosti dvě přímky (resp. roviny), nás však zajímá jen jedna z nich. Úloha bude mít vždy právě jedno řešení, protože každé dvě osy mají společný bod (A, resp. B, resp. C) a jejich průsečnice nejsou rovnoběžné, protože všechny směřují dovnitř čtyřstěnu.

Poznámky opravovatele: Mnoho řešení bylo založeno na nesprávném převedení poznatků z roviny do prostoru (např. množina bodů stejně vzdálených od tří hran čtyřstěnu *není* obecně totožná s množinou bodů stejně vzdálených od odpovídajících třech stěn apod.). Body jsem strhával též za nezkonstruování poloměru hledané koule (např. bodu dotyku) a za absenci vysvětlení, že zkonstruovaný bod je skutečně středem vepsané koule. Nejhezčí řešení měl *Jirka Dino Koula*, protože bylo pohádkové.

5. úloha

Nechť jsou dány body S, S_{AB}, S_{BD}, S_{CD}, které neleží v jedné rovině. Sestrojte čtyřstěn $ABCD$ takový, že S je střed koule jemu opsané a S_{AB}, S_{BD}, S_{CD} jsou po řadě středy hran AB, BD, CD.

Uvědomme si nejprve, že úsečka $S_{AB}S_{BD}$ je rovnoběžná s úsečkou AD a má poloviční délku (je to střední příčka v trojúhelníku ABD). Úsečka $S_{AC}S_{CD}$ je také rovnoběžná s úsečkou AD a má poloviční délku (je to střední příčka v trojúhelníku ACD). Tedy body $S_{AB}S_{AC}S_{CD}S_{BD}$ tvoří rovnoběžník. Sestrojit čtvrtý vrchol rovnoběžníka je rovinný problém (využijeme faktu, že úhlopříčky rovnoběžníka se navzájem půlí, sestrojíme tedy střed známé úhlopříčky, tímto bodem prochází druhá úhlopříčka a na ní už snadno najdeme zbývající vrchol).

Víme, že bod S leží v rovině, která je osou úsečky AB. Z toho je vidět, že úsečka AB je kolmá na úsečku SS_{AB}. Sestrojíme-li tedy rovinu ϱ_{AB}, která prochází bodem S_{AB} a je kolmá na SS_{AB}, bude jistě úsečka AB ležet v této rovině. Podobně můžeme sestrojit rovinu ϱ_{BD}, ve které bude jistě ležet úsečka BD a rovinu ϱ_{CD}, ve které bude ležet úsečka CD. Roviny ϱ_{AB} a ϱ_{BD} se určitě protínají, kdyby totiž byly rovnoběžné, musely by i přímky SS_{AB} a SS_{BD} být rovnoběžné, tj. totožné. Pak by ale všechny čtyři zadané body musely ležet v jedné rovině, což zadání vylučuje. Roviny ϱ_{AB} a ϱ_{BD} se tedy protínají v jisté přímce (označme ji p_B), na které nutně musí ležet bod B. Podobně bod D musí ležet na průsečnici rovin ϱ_{BD} a ϱ_{CD} (tato průsečnice rovněž existuje, označíme ji p_D).

Dále víme, že body B a D jsou souměrně sdružené podle bodu S_{BD}. Uděláme tedy to, že zobrazíme přímku p_D ve středové souměrnosti podle bodu S_{BD} (to je opět rovinný problém — vše se odehrává v rovině ϱ_{BD}). Obraz přímky označme q_D. Bod B nyní musí ležet v průsečíku přímek p_B a q_D a to je právě jeden bod (toto tvrzení je ekvivalentní s tím, že přímky p_B a p_D nejsou rovnoběžné a to plyne opět z toho, že body S, S_{AB}, S_{BD} a S_{CD} neleží v jedné rovině).

Když už máme bod B, stačí provést středovou souměrnost podle bodu S_{BD} (a dostaneme bod D) a podle bodu S_{CD} (a dostaneme bod C) a nakonec podle bodu S_{AB} a dostaneme bod A. Úloha má vždy právě jedno řešení.

Poznámky opravovatele: Všechna správná řešení byla podobná vzorovému. Jen *Filip Jaroš* přišel na to, že úloha nemusí mít řešení. Může se totiž stát, že body B a D splynou ($+2i$). Jedno i si vysloužil *Martin Tancer* a další $+2i$ *Dino*, který řešení pojal jako výpravnou ságu. Ten však přišel, stejně jako několik dalších, o jeden bod za chybějící diskusi.

6. úloha

Sestrojte kouli, která prochází danými dvěma body a dotýká se daných dvou koulí.

Označme zadané sféry s a r a zadané body B a C a předpokládejme, že $B \neq C$ a $s \neq r$. Hledanou sféru označme o. Středy sfér s, r, o označme po řadě S, R, O. Body S a R jednoduše zkonstruujeme. Stačí na příslušné sféře zvolit libovolné čtyři body, které neleží v jedné rovině a použít postup z prvního příkladu. Rozebereme nejprve méně zajímavé případy:

(a) Jeden bod je uvnitř některé sféry a druhý vně — pak úloha zřejmě nemá řešení.

(b) Bod B leží na sféře s a nenastává případ (a). Potom bod O už nutně musí ležet na přímce BS. Dále bod O musí jistě ležet na ose ϱ úsečky BC (tu najdeme stejně jako v řešení 1. úlohy). Pokud v průsečíku ϱ a BS leží právě jeden bod, můžeme mu opsat sféru O o poloměru OB a podíváme se, zda se tato sféra dotýká sféry R. Pokud ano, našli jsme jediné řešení, pokud ne, úloha nemá žádné řešení. Pokud je průnik ϱ a BS prázdný, úloha nemá řešení. Pokud je průnikem celá přímka BS, dostaneme spor s předpokladem $B \neq C$.

(c) Zbývá poslední případ, kdy oba body leží vně obou sfér, nebo uvnitř obou sfér, nebo oba uvnitř jedné a vně druhé. V tomto případě provedeme kulovou inverzi se středem v bodě B (poloměr volíme libovolně). Sféry s, r se zobrazí na sféry s', r', hledaná sféra o se zobrazí na rovinu o' (protože prochází středem kulové inverze). Bod C se zobrazí na bod C', bod B se zobrazí „do nekonečna“.

Ještě podrobný popis, jak sestrojíme obraz sféry s se středem S v kulové inverzi se středem B a poloměrem d. Nejprve sestrojíme sféru se středem B a poloměrem d a libovolnou rovinu obsahující body B a S. Následující se bude odehrávat v této rovině: narýsujeme přímku BS a její průsečíky A_1, A_2 se sférou s. Tyto dva body zobrazíme v kruhové inverzi se středem B a poloměrem d (podle návodu z minulých komentářů) na body A_1', A_2'. Najdeme střed úsečky $A_1'A_2'$ a to bude bod S', kolem něhož opíšeme sféru o poloměru $A_1'S'$ a to bude obraz sféry s.

Nyní chceme najít rovinu o', která se dotýká daných dvou sfér s', r' a prochází daným bodem C'. Nejprve uvažujme všechny roviny, které procházejí bodem C' a dotýkají se sféry s'. Jejich body dotyku se sférou s' vytvoří kružnici $k_{s'}$. Tuto kružnici sestrojíme jako průnik Thaletovy sféry nad průměrem $C'S'$ a sféry s' (Rozmyslete si, že množina všech bodů A takových, že úsečky $C'A$, $S'A$ svírají pravý úhel tvoří kouli se středem ve středu úsečky $C'S'$). Podobně sestrojíme kružnici $k_{r'}$.

Nyní uvažujme všechny roviny, které se dotýkají obou sfér (s' i r') a jejich body dotyku. Ty tvoří na sférách opět kružnice — na každé sféře vzniknou dvě kružnice (označme je $k_{s'1}$, $k_{s'2}$, $k_{r'1}$, $k_{r'2}$), protože máme dva druhy dotyku. V jednom případě jsou obě sféry v témže poloprostoru určeném dotykovou rovinou, ve druhém případě tato rovina obě sféry odděluje. Jak tyto kružnice dotyku nalézt? Protože všechny roviny s týmž typem dotyku se protínají s přímkou $S'R'$ v jednom bodě, stačí najít tento bod X a pak sestrojit Thaletovy sféry nad průměry XS' a XR'. Hledání bodu X převedeme na rovinný problém — vezmeme libovolnou rovinu obsahující přímku $S'R'$, průsečíky sfér s', r' s touto rovinou označme po řadě k_1, k_2, jejich středy jsou body S', R' a jejich poloměry r_1, r_2. Nechť $r_2 \geq r_1$. Sestrojme kružnici k_3 se středem R' a poloměrem $r_2 - r_1$ a Thaletovu kružnici nad průměrem $S'R'$. Jejími průsečíky s k_3 vedou tečny ke k_3 vedené z bodu S'. Tyto tečny posuneme tak, aby se staly společnými tečnami kružnic k_1, k_2 a najdeme bod X. Podobně najdeme bod Y pro druhý typ dotyku — v tomto případě bude mít kružnice k_3 poloměr $r_2 + r_1$. Ještě bychom mohli poznamenat, že pokud se sféry protínají, pak jeden typ dotyku nemůže nastat a pokud mají stejný poloměr, nenajdeme bod X a budeme muset postupovat jinak.

Nyní jsme ve stádiu, kdy na sféře s' máme tři kružnice a zajímají nás průsečíky $k_{s'}$ s $k_{s'1}$ a průsečíky $k_{s'}$ s $k_{s'2}$. Nalezneme celkem 0, 1, 2, 3 nebo 4 průsečíky a nebo nekonečně mnoho. Nyní již máme hledanou rovinu o' určenou třemi body — bodem C', bodem dotyku s s' a bodem dotyku s r' a můžeme ji tedy sestrojit. Pak už stačí rovinu přenést zpět kulovou inverzí a dostaneme hledanou sféru o. Úloha má 0, 1, 2, 3, 4 nebo nekonečně mnoho řešení.

Poznámky opravovatele: Všechna správná řešení využívala kulové inverze stejným způsobem, jako vzorové řešení. Největší problém byl s diskusí počtu možných řešení. Tu měl nejlepší *Filip Jaroš* a zasloužil si $+2i$. Ostatním (včetně autora) dělala diskuse větší problémy, nicméně jsem se rozhodl udělit všem jinak správným řešením $5 + 0i$.

7. úloha

Nechť jsou dány nekolineární[2] body T_A, V_A, T_C, přímka p mimoběžná s přímkou T_AV_A a úsečka délky d. Sestrojte čtyřstěn $ABCD$ takový, že T_A, resp. T_C, je těžiště stěny BCD, resp. ABD, V_A je pata výšky spuštěné z vrcholu A na stěnu BCD, bod B leží na přímce p a vzdálenost $|CV_A|$ je rovna d.

Nejprve si uvědomme, že přímka T_AV_A leží v rovině BCD a protože AV_A je k této rovině kolmá, musí být kolmá i k této přímce, nebo-li bod A leží někde v rovině ϱ, která je kolmá na T_AV_A a obsahuje bod V_A. Dále si uvědomíme, že úsečka AC má stejný směr

[2] Tedy takové, že neleží na společné přímce.

jako $T_C T_A$ a trojnásobnou délku (plyne z podobnosti trojúhelníků a toho, že těžiště leží ve třetině těžnice). Posuneme-li tedy rovinu ϱ o trojnásobek vektoru $T_C T_A$, dostaneme rovinu σ, ve které bude ležet bod C.

Nyní budeme chtít nalézt vzájemnou polohu bodů A, C a V_A. Zvolme proto náhodně bod A' v rovině ϱ a k němu příslušný bod C' v rovině σ. Známe délku CV_A, opíšeme tedy bodu C' sféru o poloměru d, ta vytne v rovině ϱ kružnici k_1 (případně jen bod, nebo ji neprotne vůbec), na které bude ležet bod V_A'. Dále víme, že úhel AV_AC má být pravý, sestrojíme proto Thaletovu sféru nad průměrem $A'C'$. Ta vytne v rovině ϱ kružnici k_2. Tyto dvě kružnice se protnou vždy ve dvou bodech, pokud to bude kružnice a bod, protnou se v jednom bodě. Kružnice s prázdnou množinou bude mít samozřejmě prázdný průsečík. Tím tedy dostaneme 0, 1, nebo 2 body V_A'. Ty pak posuneme o vektor $V_A'V_A$. O týž vektor posuneme i body A' a C' a dostaneme pravou polohu bodů A a C.

Už známe AV_A, můžeme tedy narýsovat rovinu BCD a bod B dostaneme jako průsečík této roviny s danou přímkou p. Známe-li nyní dva vrcholy B, C trojúhelníka a jeho těžiště T_A, snadno sestrojíme zbývající vrchol D. Úloha má 0, 1, nebo 2 řešení.

Poznámky opravovatele: Za drobné chybičky a nepřesnosti jsem strhával 1–2 body. Za prohřešky proti zápisu a zvyklostem konstrukčních úloh jsem ubíral i.

Většina řešení byla obdobou vzorového. *Honza Houštěk* a *Eva Ondráčková* přišli s nápadem nejprve sestrojit kolmý průmět T_C do roviny BCD, pomocí kterého již potom nebylo obtížné zkonstruovat zbytek.

8. úloha

Sestrojte krychli **pouze koulítkem**, jsou-li dány délky stěnové a tělesové úhlopříčky.

Nejprve sestrojíme čtyřstěn o straně $\sqrt{2}$ (což je délka stěnové úhlopříčky), to pomocí koulítka dokážeme. Vrcholy tohoto čtyřstěnu budou vrcholy A, C, F, H krychle. Pro snažší vyjadřování uvažujme krychlovou mřížku, tak aby $A = [0,0,0]$, $C = [1,1,0]$, $F = [1,0,1]$ a $H = [0,1,1]$.

Dále sestrojíme vzdálenost 2, kterou budeme potřebovat ke konstruování dalších vrcholů naší mřížky. Sestrojme dva čtyřstěny se společnou podstavou ve tvaru rovnostranného trojúhelníka o straně $\sqrt{3}$ tak, aby zbývající hrany čtyřstěnů měly délky $\sqrt{2}$. Spočítejte si, že protilehlé vrcholy tohoto útvaru budou mít vzdálenost 2.

Nyní sestrojíme vrcholy $[2,0,0]$ (má vzdálenost 2 od A a vzdálenost $\sqrt{2}$ od C a F), $[0,2,0]$ a $[0,0,2]$ podobným způsobem. Vrchol $G = [1,1,1]$ má nyní vzdálenost $\sqrt{3}$ od všech tří právě sestrojených vrcholů, narýsujeme tedy vrchol G. Teď už máme k dispozici vzdálenost 1 a narýsování dalších vrcholů už by nám nemělo činit potíže.

Poznámky opravovatele: Ve správných řešeních se vyskytly konstrukce těchto délek: 1, 2, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}/2$. Nikdo z řešitelů ani organizátorů však nepřišel na to, jak rozpůlit úsečku délky $\sqrt{3}$, či dokonce úsečku obecné délky (není ani jasné, že by to mělo být možné). Přesto hned v prvním kroku naprostá většina řešitelů narýsovala kouli o poloměru $\sqrt{3}/2$, čímž šla konstrukce do kytek.