Povídání ke čtvrté sérii

Tato série se zabývá funkcemi. Připomeneme si zde některé pojmy, které můžeš při řešení příkladů potřebovat.

Pojem *spojité funkce* zde nebudeme přesně definovat. Jako spojitou funkci si můžeš představit libovolnou funkci, jejíž graf „lze nakreslit jedním tahem“. Např. všechny konstantní funkce, funkce $f(x) = x$, všechny polynomické funkce, funkce $\sin x, \cos x, e^x \dots$ jsou spojité.

Funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme *k-periodickou* (pro k reálné kladné), pokud pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x + k) = f(x)$. Funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme *periodickou*, pokud existuje $k > 0$ takové, že f je k-periodická.

Nechť $f,\ g$ jsou funkce, $H_g \subseteq D_f$. Složením funkcí f a g nazveme funkci, kterou značíme $f \circ g$ a která je definována předpisem $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Tedy máme-li nějaké $x \in D_g$, hodnotu $f \circ g$ v bodě x najdeme tak, že nejdříve zobrazíme x pomocí funkce g a výsledek (tj. $g(x)$) zobrazíme pomocí funkce f (tedy dostaneme $f(g(x))$). Např. funkce $h(x) = \sin(x^2 + 1)$ je složením funkcí $f(y) = \sin y$ a $g(x) = x^2 + 1$.

4. série

Téma:	Funkce
Termín odeslání:	10. ledna 2000

1. Úloha (3 body)

Uvažujme funkci $f(x) = \sin(\frac{1}{\sin x})$ s definičním oborem $D_f = (0, \pi)$.
(a) Určete obor hodnot této funkce.
(b) Pro která $x \in D_f$ platí $f(x) = 1$, pro která $f(x) = 0$, pro která $f(x) = -1$?
(c) Nalezněte maximum funkce $(\sin x) \cdot f(x)$ na D_f.

2. Úloha (3 body)

Pro každé dvě spojité[1] funkce $f,\ g : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ definujeme jejich vzdálenost předpisem $d(f, g) = \max\limits_{0\le x\le 1} |f(x) - g(x)|$. Dokažte, že pro libovolné tři spojité funkce $f,\ g,\ h : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ platí $d(g \circ f, h \circ f) \le d(g, h)$.

3. Úloha (3 body)

Rozhodněte, zda pro spojité periodické funkce $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ musí být také jejich součet $f + g$ periodická funkce.

---

[1]Spojitost funkcí $f,\ g$ předpokládáme pouze proto, aby existovalo maximum jejich rozdílu na uzavřeném intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Pro řešení úlohy není předpoklad spojitosti podstatný.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť je v rovině pevně dán obdélník O (jsou dány souřadnice jeho vrcholů, nelze s ním tedy posunovat ani ho otáčet). Nalezněte co nejmenší $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$, pro které existuje polynom n-tého stupně, na jehož grafu leží všechny vrcholy obdélníku O.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nalezněte všechny reálné polynomy, které splňují rovnost $xP(x) - 1 = (x-1)P(x+1)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Buď A množina všech funkcí, které vzniknou konečným počtem složení funkcí $g(x) = \frac{1}{x}$ a $h(x) = 1 + x$. Např. funkce $k(x) = \frac{3+x}{7+2x} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+x}}$ je v množině A, protože lze psát $k(x) = g(h(h(g(h(h(h(x)))))))$, neboli $k = g \circ h \circ h \circ g \circ h \circ h \circ h$.
(a) Dokažte, že pro každé kladné racionální číslo a existuje $f \in A$ taková, že $f(1) = a$.
(b) Dokažte, že neexistuje $f \in A$ taková, že $f(\frac{3}{4}) = \frac{2}{17321}$.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že existuje funkce, která lze napsat pomocí skládání funkcí sinus, konstantních funkcí, sčítání, násobení, dělení a umocňování, která je 5-periodická, prochází počátkem, je na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ rostoucí, na $\langle 1, 4\rangle$ klesající a na $\langle 4, 5\rangle$ rostoucí.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Buď
(a) $f(x) = \sin(\pi x)$
(b) $f(x) = \frac{1+\sin(2\pi x)}{2}$.
Označme $f_n(x)$ n-tou iteraci funkce f, tj. $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(f(x)), \dots$ V závislosti na $n \in \mathbb{N}$ určete počet řešení rovnice $f_n(x) = x$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Řešení 4. série

1. úloha

Uvažujme funkci $f(x) = \sin(\frac{1}{\sin x})$ s definičním oborem $D_f = (0, \pi)$.

(a) Určete obor hodnot této funkce.
(b) Pro která $x \in D_f$ platí $f(x) = 1$, pro která $f(x) = 0$, pro která $f(x) = -1$?
(c) Nalezněte maximum funkce $(\sin x) \cdot f(x)$ na D_f.

(a) Oborem hodnot funkce f je interval $\langle -1, 1 \rangle$. Tuto skutečnost nahlédneme takto: Označme obor hodnot funkce f jako H_f. Vzhledem k tomu, že f je funkcí sinus argumentu $\frac{1}{\sin x}$ a funkce sinus vrací hodnoty z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, vidíme, že $H_f \subseteq \langle -1, 1 \rangle$. Na druhou stranu, uvažujme interval $\left\langle \arcsin \frac{1}{10}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Tento interval zobrazí funkce $\frac{1}{\sin x}$ na interval $\langle 1, 10 \rangle$. Interval $\langle 1, 10 \rangle$ má pak délku větší než 2π, což je perioda vnější funkce sinus. Sinus tedy tento interval zobrazí na interval $\langle -1, 1 \rangle$. Tím jsme tedy ukázali, že $\langle -1, 1 \rangle \subseteq H_f$, což dohromady s předcházejícím výsledkem $H_f \subseteq \langle -1, 1 \rangle$ dává dokazovanou rovnost $H_f = \langle -1, 1 \rangle$.
(b) $f(x) = 1$, právě, když je $\frac{1}{\sin x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde k je nezáporné celé číslo. To plyne z vlastností funkce sinus. Poslední rovnost si můžeme přeupravit na tvar:

$$\sin x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}.$$

To je pro $x \in (0, \pi)$ ekvivalentní s tím, že platí

$$x = \arcsin \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \right),$$

nebo

$$x = \pi - \arcsin \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \right),$$

kde $k \in \mathbb{N}_0$. Symbolem $\mathbb{N}_0$ značíme množinu všech celých nezáporných čísel.

Analogickým postupem určíme, že $f(x) = 0$ právě tehdy, když

$$x = \arcsin \left(\frac{1}{k\pi} \right),$$

nebo

$$x = \pi - \arcsin \left(\frac{1}{k\pi} \right),$$

kde $k \in \mathbb{N}$. Symbolem $\mathbb{N}$ značíme množinu všech přirozených čísel.

Obdobně, $f(x) = -1$ právě tehdy, když

$$x = \arcsin \left(\frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \right),$$

nebo

$$x = \pi - \arcsin \left(\frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \right),$$

kde $k \in \mathbb{N}$.
(c) Označme $g(x) = (\sin x) \cdot f(x)$. Naším cílem je tedy nalézt maximum funkce g na intervalu $(0, \pi)$. Ukážeme, že ono maximum je nabyto v bodě $x = \frac{\pi}{2}$ a je tudíž rovno $g(\frac{\pi}{2}) = \sin 1$.

Rozdělme si nyní interval $(0, \pi)$ na tři intervaly[2]: $(0, 1)$, $(1, \pi - 1)$ a $(\pi - 1, \pi)$. Snadno nahlédneme, že na prvním a třetím z těchto intervalů je funkce $g(x)$ odhadnuta shora funkcí sinus, která na obou těchto intervalech nabývá hodnot menších, než $g(\frac{\pi}{2}) = \sin 1$.

Zbývá tedy již jen ukázat, že funkce g nabývá na intervalu $(1, \pi - 1)$ maxima v bodě $\frac{\pi}{2}$. Derivací[3] funkce g je funkce

$$g'(x) = (\cos x) \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sin x}\right) \cdot \frac{1}{\sin x}\right).$$

Funkce $g'(x)$ tedy všude v intervalu $(1, \pi - 1)$ existuje a nulové hodnoty nabývá pouze v bodě $x = \frac{\pi}{2}$, jak se přesvědčíme jednoduchou algebraickou úpravou (rovnici $g'(x) = 0$ nejprve vydělíme pro $x \neq \frac{\pi}{2}$ výrazem $\cos x$ a pak po substituci $y = \frac{1}{\sin x}$ se nám převede na rovnici $\operatorname{tg} y = y$, která nemá v intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, tedy ani v intervalu[4]$(1, \frac{1}{\sin 1})$ žádné řešení, což nám stačí), což s výše uvedeným dává, že maximum funkce g je nabyto v bodě $x = \frac{\pi}{2}$ a je rovno hodnotě $\sin 1$.

Poznámky opravovatele: V části (b) většina z řešitelů zapomněla na to, že funkce $\sin x$ nabývá každé hodnoty $y \in \langle 0, 1)$ dvakrát. Z rovnosti $\sin x = y$ nelze usoudit, že $x = \arcsin y$. Řešení jsou dvě: $x_1 = \arcsin y$, $x_2 = \pi - \arcsin y$. Za tuto chybu jsem strhávala 1 bod. V části (c) mnoho řešitelů usoudilo, že maximum funkce f musí být 1, pokud $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ a obě funkce g a h mají maximum 1. To samozřejmě neplatí, funkce g a h nemusí nabývat svého maxima ve stejném bodě. Např. funkce $\sin x \cdot \cos x$ má na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ maximum $\frac{1}{2}$ (je rovna $\frac{1}{2} \sin 2x$), i když obě funkce $\sin x$ a $\cos x$ mají na tomto intervalu maximum 1.

2. úloha

Pro každé dvě spojité[5] funkce $f,\ g : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ definujeme jejich vzdálenost předpisem $d(f, g) = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$. Dokažte, že pro libovolné tři spojité funkce $f,\ g,\ h : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ platí $d(g \circ f, h \circ f) \leq d(g, h)$.

Označme $A = \{|g(x) - h(x)| : x \in \langle 0, 1\rangle\}$, $B = \{|g(f(x)) - h(f(x))| : x \in \langle 0, 1\rangle\}$. Chceme dokázat, že $\max B = d(g \circ f, h \circ f) \leq d(g, h) = \max A$.

Všimněte si, že $B \subseteq A$, neboť pro libovolné $x \in \langle 0, 1\rangle$ je $f(x) \in \langle 0, 1\rangle$, a tudíž každé číslo $|g(f(x)) - h(f(x))|$ leží v množině A. Pak ovšem také $\max B$ leží v A, čili $\max A$ nemůže být menší než $\max B$.

---

[2] V dělících bodech 1, $\pi - 1$ není maxima nabyto, neboť $g(1)$ i $g(\pi - 1)$ je ostře menší než $g(\pi/2)$.

[3] Omlouváme se neznalému čtenáři za využití derivací v tomto řešení, ale bez nich by bylo řešení moc zdlouhavé a umělé. Šlo by je obejít a postupně omezovat maximum naší funkce na interval $(\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon)$ pro malé ε.

[4] Snadným odhadem zjistíme, že $\sin 1 > \frac{2}{\pi}$.

[5] Spojitost funkcí $f,\ g$ předpokládáme pouze proto, aby existovalo maximum jejich rozdílu na uzavřeném intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Pro řešení úlohy není předpoklad spojitosti podstatný.

Poznámka: z důkazu je vidět, že je-li f na, tak $A = B$, a tedy v nerovnosti nastává rovnost.

Poznámky opravovatele: Úloha byla velmi snadná, o čemž svědčí plný bodový zisk téměř všech řešitelů. Mnoha lidem ovšem činilo zjevné potíže své myšlenky srozumitelně formulovat. Dobře radím: neberte hodiny slohu jako zcela zbytečnou samoúčelnost!

3. úloha

Rozhodněte, zda pro spojité periodické funkce $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ musí být také jejich součet $f + g$ periodická funkce.

Ukážeme, že součet dvou spojitých periodických funkcí nemusí být periodická funkce. Uvažme například funkce $f_1(x) = \cos x$ a $f_2(x) = \cos(x\sqrt{2})$. Obě jsou spojité a periodické (první s periodou 2π, druhá s periodou $\pi\sqrt{2}$). Jejich součet $f = f_1 + f_2$ periodický není. Tuto skutečnost ukážeme sporem. Předpokládejme, že f je periodická funkce s periodou $t > 0$. Jelikož $f(0) = 2$, je také $f(t) = 2$. Pak ale $\cos t + \cos(t\sqrt{2}) = 2$, takže zjevně $\cos t = \cos(t\sqrt{2}) = 1$. Pak ale nutně existují celá kladná čísla k_1 a k_2 taková, že platí $t = 2\pi k_1$ a $t\sqrt{2} = 2\pi k_2$ (pouze pro čísla tvaru $x = 2\pi k$, kde k je celé číslo, platí $\cos x = 1$). Odtud však snadnou úpravou plyne $\sqrt{2} = \frac{k_2}{k_1}$, což je spor, protože $\sqrt{2}$ je iracionální.

4. úloha

Nechť je v rovině pevně dán obdélník O (jsou dány souřadnice jeho vrcholů, nelze s ním tedy posunovat ani ho otáčet). Nalezněte co nejmenší $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$, pro které existuje polynom n-tého stupně, na jehož grafu leží všechny vrcholy obdélníku O.

Souřadnice vrcholů obdélníku si označme $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$, $D = [d_1, d_2]$. Pokud některé dva vrcholy obdélníku mají stejné x-ové souřadnice, pak samozřejmě žádný takový polynom neexistuje (pro jedno x by musel nabývat dvou různých hodnot). Dále se budeme zabývat jen případem, kdy x-ové souřadnice všech bodů jsou různé.

Nejprve dokážeme, že polynom stupně nejvýše dvě nestačí. Z rozmístění vrcholů obdélníku totiž plyne, že graf funkce by musel být nejprve rostoucí, pak klesající a zase rostoucí, nebo klesající, rostoucí a zase klesající, což graf polynomu stupně nejvýše dvě být nemůže.

Nyní najdeme polynom stupně 3, který danými body prochází. Označme

$$Q_A = (x - b_1)(x - c_1)(x - d_1).$$

Tento polynom je třetího stupně, v bodech b_1, c_1 a d_1 je $Q_A(x) = 0$ a $Q_A(a_1)$ je rovno nějakému nenulovému číslu. Najdeme tedy takovou konstantu k, aby $k \cdot Q_A(a_1) = a_2$ a položíme pak $P_A(x) = k \cdot Q_A(x)$. Tento polynom nabývá nuly pro $x = b_1, c_1, d_1$ a hodnoty a_2 pro $x = a_1$. Podobně sestrojíme polynomy P_B, P_C a P_D. Hledaný polynom pak bude

$$P(x) = P_A(x) + P_B(x) + P_C(x) + P_D(x).$$

Tento polynom je jistě stupně 3 (již jsme ukázali, že menšího stupně být nemůže) a prochází body A, B, C a D.

Poznámka: Pozornému čtenáři seriálu jistě neunikne, že místo druhé poloviny řešení by stačilo (s využitím poznatků ze seriálu) napsat „Použijeme Lagrangeův interpolační polynom …“

Poznámky opravovatele: Jeden bod jsem dával za vyloučení případů, kdy některé dva body mají stejné x-ové souřadnice. Dva body jsem pak dával za důkaz, že polynom stupně 2 a menšího nestačí, a dva body za důkaz, že polynom stupně 3 stačí. Někteří řešitelé považovali za zřejmé, že polynom stupně 2 nestačí. Jiní řešitelé naopak považovali za zřejmé, že polynom stupně 3 stačí.

Tvrzení, že polynom stupně 2 nestačí, dokazoval každý jinak, někteří například využili Lagrangeovu větu o střední hodnotě, jiní se zajímali o monotonii funkce, hezké důkazy využívaly její konvexity, resp. konkávity. V druhé části někteří využili nenulovosti Vandermondova determinantu, jiní soustavu řešili, někteří si střed obdélníka posunuli do počátku a stačilo jim pak řešit soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých (funkce musela být lichá, tedy tvaru $ax^3 + bx$). Ale žádné řešení této části se svou krásou nevyrovnalo řešení vzorovému.

5. úloha

Nalezněte všechny reálné polynomy, které splňují rovnost $xP(x) - 1 = (x-1)P(x+1)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Dosadíme-li $x = 0$ (nebo $x = 1$), dostaneme $P(1) = 1$. Dosadíme-li $x = 2$, dostaneme $2P(2) = P(3) + 1$. Položme $P(2) = t$, pak platí $P(3) = 2t - 1$; dosadíme-li $x = 3$, dostaneme $P(4) = 3t - 2$. Matematickou indukcí snadno dokážeme, že pro každé přirozené číslo n platí:

$$P(n) = (n-1)t - (n-2). \qquad (\heartsuit)$$

Označíme-li $Q(x) = P(x) - ((x-1)t - (x-2))$, z tvrzení $(\heartsuit)$ přímo plyne $Q(n) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Polynom Q tedy nabývá nulové hodnoty v nekonečně mnoha bodech a je tedy identicky (v každém bodě) nulový. Odtud přímo plyne, že musí platit

$$P(x) = (x-1)t - (x-2), \qquad (\spadesuit)$$

kde $t = P(2)$. Naopak pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ dosazením ověříme, že polynom $P(x)$ ve tvaru $(\spadesuit)$ vyhovuje zadání.

6. úloha

Buď A množina všech funkcí, které vzniknou konečným počtem složení funkcí $g(x) = \frac{1}{x}$ a $h(x) = 1 + x$. Např. funkce $k(x) = \frac{3+x}{7+2x} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+x}}$ je v množině A, protože lze psát $k(x) = g(h(h(g(h(h(h(x)))))))$, neboli $k = g \circ h \circ h \circ g \circ h \circ h \circ h$.

(a) Dokažte, že pro každé kladné racionální číslo a existuje $f \in A$ taková, že $f(1) = a$.

(b) Dokažte, že neexistuje $f \in A$ taková, že $f(\frac{3}{4}) = \frac{2}{17321}$.

(a) Důkaz provedeme matematickou indukcí přes jmenovatel racionálního čísla a. Pokud je jmenovatel roven jedné, tj. a je celé číslo, pak pro $a = n > 1$ stačí $(n-1)$-krát složit funkci

$h(x) = x + 1$, pro $n = 1$ pak stačí vzít funkci $g(x) = 1/x$. A nyní indukční krok: nechť pro všechna $a \in \mathbb{Q}^+$ s jmenovatelem menším než k vhodná funkce existuje. Vezměme nyní $a = p/k$ (zlomek nechť je v základním tvaru — čísla p a k jsou nesoudělná). Nejprve předpokjádejme $p < k$. Pak číslo $1/a$ má jmenovatel p menší než k. Podle indukčního předpokladu existuje funkce $F \in A$ taková, že $F(1) = 1/a$. Pak zjevně $g(F(1)) = a$. Nalezli jsme tedy vhodnou funkci $g \circ F \in A$.

Pokud platí $p > k$, jistě existuje přirozené číslo l takové, že $a = l + p'/k$, kde $0 < p' < k$. Pro číslo p'/k již vhodnou funkci $G \in A$ nalézt umíme. Když funkci G složíme l-krát s funkcí h, je zjevně $h^l(F(1)) = p'/k + l = p/k = a$. Tím je dokázáno, že i pro čísla, která mají ve jmenovateli k, existuje hledaná funkce. Tím je důkaz hotov.

(b) Vezměme racionální číslo p/q, kde p, q jsou nesoudělná. Nechť $m = \min\{p, q\}$. Pak $p \geq m$, $q \geq m$. Platí $g(p/q) = q/p$ a $h(p/q) = (p+q)/q$. Vidíme, že v prvním případě se čísla nezměnila (jen si vyměnila role), ve druhém případě se jedno zvětšilo a druhé se nezměnilo. Důležité je, že čísla zůstala nesoudělná, zlomek $(p+q)/q$ je v základním tvaru. Vidíme, že zobrazení g i h na číslo p/q zachovává vlastnost $c \geq m$ a $j \geq m$, kde c je čitatel a j je jmenovatel obrazu čisla p/q (všechny zlomky uvažujeme v základním tvaru).

Odtud už snadno vidíme, že je-li (pro $f \in A$) $f(3/4) = p/q$, pak p i q musí být větší nebo rovny třem. Tím je dokázáno, že neexistuje funkce $f \in A$ taková, že $f(3/4) = 2/17123$.

Poznámky opravovatele: Příklad nebyl těžký. Řešení byla buď stejná jako vzorové, nebo v nich bylo použito řetězových zlomků. A právě to byl často kámen úrazu. Když už používám věty a tvrzení, která nedokazuji, musím je alespoň přesně zformulovat a vysvětlit, jak je používám. Tj. napsat „Skládáním funkcí uvedených v zadání lze zřejmě zapsat jakýkoli řetězový zlomek a protože každé racionální číslo lze převést na řetězový zlomek, jsme hotovi.“ není dobrá cesta, jak získat za příklad hodně bodů.

Navíc, zatímco v části (a) stačila existence odpovídajícího řetězového zlomku a to, že tento umím vyjádřit jako $f(1)$ pro $f \in A$ (což všichni ukázali), v části (b) potřebuji jednoznačnost přiřazení racionálního čísla a jeho řetězového zlomku a ještě jednoznačnost přiřazení řetězového zlomku a funkce $f \in A$, tedy že jedna a táž f se nedá napsat pomocí dvou různých posloupností skládání funkcí h a g.

Udělovala jsem 3 body za část (a), 2 za (b). Pokud nebyla dokázána jednoznačnosti, strhla jsem jeden bod, pokud nebylo ani napsáno, že ji používáte a přitom jste ji používali, strhla jsem další bod.

7. úloha

Dokažte, že existuje funkce, která lze napsat pomocí skládání funkcí sinus, konstantních funkcí, sčítání, násobení, dělení a umocňování, která je 5-periodická, prochází počátkem, je na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ rostoucí, na $\langle 1, 4\rangle$ klesající a na $\langle 4, 5\rangle$ rostoucí.

Funkci budeme hledat ve tvaru $f(x) = \sin(\frac{2\pi x}{5}) + b\sin(\frac{4\pi x}{5})$.
Zjevně $f(0) = 0$. Funkce f je 5-periodická, neboť

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x+5) = \sin\left(\frac{2\pi(x+5)}{5}\right) + b\sin\left(\frac{4\pi(x+5)}{5}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{2\pi x}{5} + 2\pi\right) + b\sin\left(\frac{4\pi x}{5} + 4\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi x}{5}\right) + b\sin\left(\frac{4\pi x}{5}\right) = f(x).$$

Podobně se ukáže, že graf f je symetrický podle bodu [2.5, 0] (nakreslete si obrázek). Takže stačí dokázat, že existuje b takové, že f je na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ rostoucí a na intervalu $\langle 1, 2.5\rangle$ klesající. Ukážeme:

Lemma: Pro $b \in \langle 0, 0.5)$ existuje $c_b \in (0, 2.5)$ takové, že f je na intervalu $\langle 0, c_b\rangle$ rostoucí a na intervalu $\langle c_b, 2.5\rangle$ klesající. Navíc c_b závisí spojitě na proměnné b.

Důkaz: Bude stručný, aby nebyl neúnosně dlouhý. Abychom si práci usnadnili, použijeme derivace. Ukážeme, že pro každé $b \in \langle 0, 0.5)$ existuje $c_b \in (0, 2.5)$ takové, že $f'(x)$ je na $\langle 0, c_b)$ kladná, na $(c_b, 2.5\rangle$ záporná (navíc platí $f'(c_b) = 0$). Platí

$$f'(x) = \frac{2\pi}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right) + \frac{4b\pi}{5}\cos\left(\frac{4\pi}{5}x\right) = \frac{2\pi}{5}(4b\cos^2\frac{2\pi}{5}x + \cos\frac{2\pi}{5}x - 2b).$$

Rovnice $f'(x) = 0$ je tedy kvadratická rovnice v proměnné $\cos\frac{2\pi}{5}x$. Funkce $\cos\frac{2\pi}{5}x$ je na intervalu $\langle 0, 2.5\rangle$ klesající a spojitá. Platí

$$f'(0) = \frac{2\pi}{5}(1 + 2b) > 0$$

a

$$f'(2.5) = \frac{2\pi}{5}(-1 + 2b) < 0.$$

Odtud už snadno plyne, že $f'(x)$ má na intervalu $(0, 2.5)$ právě jeden kořen (jelikož je to kvadratická funkce v proměnné $\cos\frac{2\pi}{5}x$), označíme ho c_b. Tento kořen si můžeme vyjádřit, jako spojitou funkci[6] v proměnné b. Je již jasné, že $f'(x)$ je na intervalu $\langle 0, c_b)$ kladná a na intervalu $(c_b, 2.5\rangle$ záporná. Tedy funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle 0, c_b\rangle$ rostoucí a na intervalu $\langle c_b, 2.5\rangle$ klesající. Tím je důkaz lemmatu hotov.

Pro $b = 0$ je zřejmě $c_b = 1.25 > 1$, pro $b = 0.499$ je $c_b < 1$, protože např. $f(0.95) > f(1)$, o čemž se přesvědčíme dosazením. Nyní ze spojitosti c_b jako funkce v proměnné b dostáváme, že existuje $b \in (0, 0.5)$, pro které $c_b = 1$. Pak vidíme, že pro takové b je $f(x)$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ rostoucí, na intervalu $\langle 1, 2.5\rangle$ klesající. Ze symetrie grafu funkce f podle bodu $[2.5, 0]$ dostáváme konečný výsledek.

Poznámky opravovatele: K výsledku jste se dostali dvěma cestami. První byla skládáním dvou sinů, obdobně jako v řešení vzorovém, ale pouze *Katarína Quittnerová* a *Honza Houštěk* to zvládli naprosto bez chyby. Většina z vás jen ukázala, že jejich funkce má v bodech 1 a 4 derivaci nulovou, ale opomněla dokázat, že v ostatních bodech je derivace nenulová a má odpovídající znaménko.

---

[6]Pomocí funkce arccos a vzorce pro kořen kvadratické rovnice. Přesný tvar této závislosti není pro řešení podstatný a jeho nalezení přenecháváme laskavému čtenáři.

Druhý způsob byl použít funkci sinus a její argument parametrizovat tak, aby výsledná funkce měla v bodě 1 maximum a v bodě 4 minimum. Zde skoro všichni dostali plný počet bodů.

S originálním řešením přišel *Josef Křišťan*. Všiml si, že v zadání nebylo uvedeno, že sčítání musí být konečné. Proto sestrojil 5-periodickou funkci, jejíž graf na $\langle 0, 5\rangle$ tvoří spojnice bodů $[0, 0]$, $[1, 1]$, $[4, -1]$, $[5, 0]$, a tuto pak vyjádřil pomocí Fourierovy řady (Pro nezasvěcené: každá integrovatelná periodická funkce lze pomocí Fourierových řad vyjádřit jako nekonečný součet sinů a kosinů s vhodnými koeficienty.)

8. úloha

Buď

(a) $f(x) = \sin(\pi x)$

(b) $f(x) = \frac{1+\sin(2\pi x)}{2}$.

Označme $f_n(x)$ n-tou iteraci funkce f, tj. $f_1(x) = f(x),\ f_2(x) = f(f(x)), \ldots$ V závislosti na $n \in \mathbb{N}$ určete počet řešení rovnice $f_n(x) = x$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

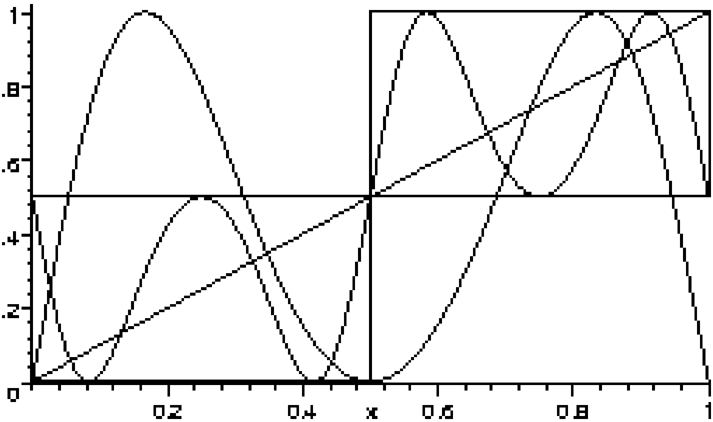
Nejprve si uvědomíme, že řešení části (b) lze snadno odvodit z řešení části (a). Označme funkci f v části (b) jako g, tedy $f(x) = \sin(\pi x)$, $g(x) = (1 + \sin(2\pi x))/2$. Všimněme si nejprve, že pokud je $x \leq 1/2$, je $g(x) \geq 1/2$, naopak je-li $x \geq 1/2$, je $g(x) \leq 1/2$. Indukcí zjistíme, že stejnou vlastnost mají i funkce $g_n(x)$ pro lichá n, z čehož plyne, že pro tato n je jediným možným řešením $x = 1/2$. Snadno ověříme, že $1/2$ vskutku řešením je.

Pro sudá n už budeme muset opravdu využít část (a). Mnohé naznačí obrázek na další straně (f_2, g_2 a identická funkce), přesný postup následuje. Využijeme toho, že pro každé k platí

$$g_k\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{1+(-1)^k f_k(x)}{2}.$$

Důkaz přenecháváme čtenáři jako snadné cvičení — pro $k = 1$ je tvrzení snadným důsledkem vlastností funkce sinus, indukční krok také není těžký. Pro sudá n tedy platí

$$g_n\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{1+f_n(x)}{2}.$$



Nyní vidíme, že $f_n(x) = x$ právě tehdy, když $g_n((1+x)/2) = (1+x)/2$. Čili počet průsečíků $g_n(x)$ a x v intervalu $\langle 1/2, 1\rangle$ je stejný jako počet průsečíků $f_n(x)$ a x v celém intervalu $\langle 0, 1\rangle$, jak později zjistíme, je tento počet 2^n.

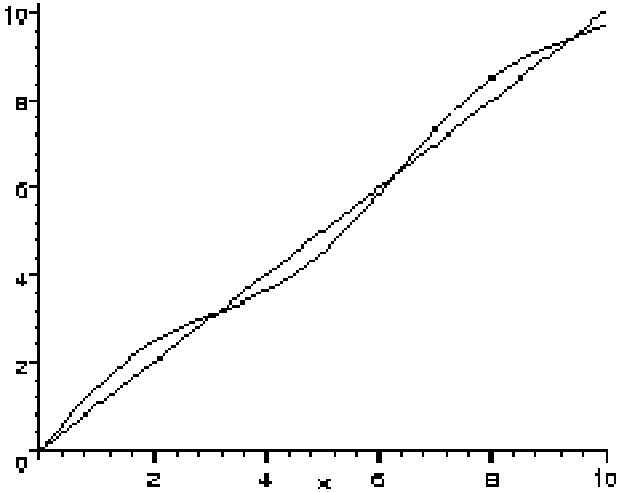
Nyní už jen využijeme symetrie funkce $g_n(x)$. Zjevně platí $g_n(1-x) = 1 - g_n(x)$ (pro $n = 1$ je to jasné, pro větší n opět použijeme indukci). Odtud vidíme, že na intervalu $\langle 0, 1/2\rangle$ existuje také 2^n řešení, přičemž řešení $x = 1/2$ počítáme dvakrát. Shrnutím zjistíme, že pro sudá n existuje $2^{n+1} - 1$ řešení, pro lichá n jedno řešení naší rovnice.

Přistupme nyní k části (a). Nejprve dokážeme, že existuje alespoň 2^n řešení. Z obrázku to vypadá, že funkce $f_n(x)$ se skládá z 2^{n-1} „hrbolů“, každý hrbol je úhlopříčkou jednotkového čtverce protnut (alespoň) dvakrát. Vkutku tomu tak je. Indukcí dokážeme, že pro každé n existují čísla

$$0 = x_0 < y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < y_k < x_k = 1$$

(kde $k = 2^{n-1}$), přičemž pro každé i je $f_n(x_i) = 0$, $f_n(y_i) = 1$, na intervalech (x_i, y_{i+1}) je funkce f_n rostoucí, zatímco na intervalech (y_i, x_i) klesající. Pro $n = 1$ je toto tvrzení zřejmé — nebo spíš známé z toho, co víme o funkci sinus. Indukční krok je také lehký: pro každé i je $f_{n+1}(x_i) = f_{n+1}(y_i) = 0$, máme tedy $k + 1 + k = 2^n + 1$ bodů, v nichž je funkce f_{n+1} nulová. Mezi každými dvěma z nich je navíc bod, v němž je f_{n+1} rovno 1. Funkce f_n je totiž spojitá, díky Darbouxově vlastnosti tedy existuje $t \in (y_i, x_i)$ (resp. $t \in (x_i, y_{i+1})$, přitom i je libovolný index), pro něž je $f_n(t) = 1/2$, čili $f_{n+1}(t) = 1$. Laskavý čtenář si již sám rozmyslí, že funkce f_{n+1} je na každém nově vzniklém intervalku složením dvou monotónních funkcí, přičemž výsledný druh monotonie je vždy ten správný.

Dokázali jsme, že funkce f_n se skládá z 2^{n-1} úseků rostoucích od 0 do 1, a z 2^{n-1} úseků klesajících od 1 k 0. V každém takovém úseku je alespoň jedno řešení (kromě toho, že je to jasné z obrázku, můžeme opět užít Darbouxovu vlastnost), celkem jich tedy je alespoň 2^n. Vůbec však není jasné, jestli jich není víc. V každé klesající části funkce f_n je přesně jedno řešení, v rostoucích částech by tomu tak však být nemuselo. Dvě rostoucí funkce totiž mohou mít mnoho průsečíků, jak ukazuje následující obrázek (funkce x a $x + \frac{\sin x}{2}$).



V našem případě ale dokážeme, že i v rostoucích úsecích existuje právě jedno řešení. Tato část je poněkud těžší, bohužel ji neumím vyřešit bez použití základů diferenciálního počtu.

Podstata řešení je velice prostá. Kdyby existovalo více než 2^n řešení naší rovnice, musely by na nějakém rostoucím úseku funkce $f_n(x)$ být alespoň dvě řešení. Užitím diferenciálního počtu zjistíme, že by pak muselo existovat x, pro něž $f_n(x) = x$ a $|f_n'(x)| \leq 1$. Ukážeme, že toto není možné. Nejprve si však shrňme poznatky o funkci $f(x)$. Existuje právě jedno $p \in (0, 1)$ takové, že $f(p) = p$ (přitom $p \doteq 0.74$). Dále pro všechna $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

- $f(x) = f(1 - x)$
- $x < 1 - p \implies f(x) < p$
- $f(x) \leq \pi x$
- $|f'(x)| = \pi |\cos(\pi x)| = \pi \sqrt{1 - f(x)^2}$
- $|f'(x)| \leq 1 \iff f(x) \geq M, \qquad \text{kde } M = \sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2}} \doteq 0.95 > p$

Nyní si uvědomme, že $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, tedy podle vzorce pro derivaci složené funkce je $f_n'(x) = f'(f_{n-1}(x)) f_{n-1}'(x)$. Vyjádříme-li si takto i derivaci funkce $f_{n-1}(x)$, dostaneme vztah

$$f_n'(x) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f_k(x)) \tag{$\triangle$}$$

(přitom $f_0(x) = x$). Kdybychom nyní ukázali, že je-li $f_n(x) = x$, pak každý z činitelů v předchozím vzorci je v absolutní hodnotě větší než 1, byli bychom hotovi. Toto se nám bohužel nepodaří, ale mírné zobecnění této myšlenky již k cíli vede.

Zvolme nyní pevně x, pro něž $f_n(x) = x$ a označme si $x_k = f_k(x)$. Je tedy $x_n = x_0$, $x_{n+1} = x_1, \ldots$ neboli při zvyšování indexu u x nemusíme kontrolovat, zda nepřekračujeme číslo n. Čísla $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ nyní rozdělíme do tzv. *úseků*. První typ úseku je jedno číslo x_i, pro něž $|f'(x_i)| > 1$ a které nezařadíme níže do delšího úseku. Druhý typ je po sobě jdoucí posloupnost čísel $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+t}$, pro která platí:

- $|f'(x_k)| \leq 1$ (neboli $x_{k+1} \geq M$)
- $x_{k+2} < x_{k+3} < \cdots < x_{k+t} < 1 - p$, příčemž číslo t je největší možné.

Takto se čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n$ rozpadnou do několika úseků, tyto úseky se nemohou překrývat — čísla $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+t}$ nás nenutí započít nový vícebodový úsek, protože $|f'(x_{k+t})| > 1$ (je totiž $p < M$).

Vzhledem k rovnici ($\triangle$) stačí nyní ukázat, že pro každý úsek je součin absolutních hodnot derivací funkce f v jeho prvcích (označme jej V) větší než jedna. Odtud totiž plyne, že

$$|f'(x_0)|.|f'(x_1)|.|f'(x_2)| \ldots |f'(x_{n-1})| > 1,$$

ovšem součin na levé straně je roven $|f_n'(x)|$, jsme tedy hotovi.

Nyní se tedy zabývejme jedním vícebodovým úsekem (pro jednobodový úsek x_k platí $|f'(x_k)| > 1$ přímo z definice), označeným jako výše $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+t}$. Zvolme ε tak, aby $x_{k+1} = 1 - \varepsilon$. Z vlastností funkce $f(x)$ plyne, že $x_{k+2} \leq \pi\varepsilon$, $x_{k+3} \leq \pi^2\varepsilon, \ldots, x_{k+t+1} \leq \pi^t\varepsilon$. Z maximality čísla t (viz definice úseku) plyne, že $x_{k+t+1} > 1 - p$. Dosazením zjistíme, že

$$\varepsilon > \frac{1-p}{\pi^t}.$$

Před závěrečným dosazením ještě pár pomocných výpočtů. Protože platí $x_{k+t} < 1 - p$, platí i $x_{k+t+1} < p$. Tedy pro každé $i = 2, 3, \ldots, t+1$ je $x_{k+i} < p$, a tedy i $\sqrt{1 - x_{k+i}^2} > \sqrt{1-p^2}$. Dále $0 \leq \varepsilon \leq 1$, tudíž $1 - x_{k+1}^2 = 1 - (1-\varepsilon)^2 = 2\varepsilon - \varepsilon^2 \geq \varepsilon$, čili $\sqrt{1 - x_{k+1}^2} \geq \sqrt{\varepsilon} > \frac{\sqrt{1-p}}{\pi^{t/2}}$. Tudíž

$$\begin{aligned}
V &= |f'(x_k)|.|f'(x_{k+1})|.|f'(x_{k+2})| \ldots |f'(x_{k+t})| \\
&= \pi^{t+1} \sqrt{1 - x_{k+1}^2} \sqrt{1 - x_{k+2}^2} \cdots \sqrt{1 - x_{k+t+1}^2} \\
&> \pi^{t+1} \frac{\sqrt{1-p}}{\pi^{t/2}} \left(\sqrt{1-p^2}\right)^t \\
&= \left(\pi\sqrt{1-p}\right).\left(\pi(1-p^2)\right)^{t/2}.
\end{aligned}$$

S kalkulačkou už snadno zjistíme, že $\pi\sqrt{1-p} > 1$, a také $\pi(1-p^2) > 1$ (kdyby se nám použití kalkulačky nelíbilo, můžeme použít chytrých odhadů pro číslo p a π, detaily si čtenář domyslí sám). Odtud plyne, že $V > 1$, což byla poslední chybějící část důkazu. Tím je tedy důkaz ukončen.

Poznámka 1: Druhá část řešení části (a) je poměrně ošklivá, technická, komplikovaná. Vyhlašuji tedy soutěž o hezčí (a co nejhezčí) řešení, vítěze odměním čokoládou dle jeho vlastního výběru.

Poznámka 2: Obrázky k této úloze byly nakresleny programem Maple. Máte-li možnost si s tímto programem pohrát, tak to vřele doporučuji — umí řešit rovnice i jejich soustavy, numericky i „symbolicky", kreslit všechny možné grafy, upravovat výrazy, integrovat, derivovat a ještě spoustu dalších věcí, které byste ani ve snu nepožadovali. Jediné, co ještě neumí, je řešit za vás příklady z našeho semináře :–) Pokud k tomuto programu přístup nemáte, tak se těšte, až přijdete na Matfyz :–)
Poznámka 3: Na tomto příkladu je pěkně vidět, k čemu je dobré kreslení obrázků. Půlka části (a) a přechod od (a) k (b) je vlastně jasný, když si člověk nakreslí správný obrázek. V našem řešení jsme jen tuto jasnost matematicky průkazně vyjádřili. Nicméně obrázky mohou být i zrádné, pokud jim příliš věříme, tak třeba ani nepostřehneme, že je potřeba druhá půlka řešení části (a).
Poznámka 4: Podobná úloha by šla zadat s funkcí f kvadratickou ($f(x) = 4x(1-x)$) či po částech lineární (graf $f(x)$ je úsečka z bodu $[1/2, 1]$ do bodů $[0, 0]$ a $[1, 0]$). Uvědomte si, že tyto varianty jsou výrazně jednodušší.
Poznámka 5: Pro ověření, zda jste dobře důkaz pochopili si zkuste rozmyslet, jestli jsme vlastně nedokázali, že pro **všechna** x je $|f'_n(x)| > 1$. To samozřejmě neplatí, ale kde selže náš důkaz?

Poznámky opravovatele: Úplně úlohu bohužel nevyřešil nikdo. Nejlepší řešení byla ta, kde řešitel ukázal, že existuje alespoň 2^n řešení (či $2^{n+1}-1$ v části (b)). Za takový výkon byl řešitel odměněn třemi body. Pozlobilo mě, že takřka nikdo si tuto chybu svého řešení neuvědomil (nebo ji aspoň nepřiznal), a tvrdil, že je jasné něco, co buď vůbec neplatí, nebo dá opravdu hodně práce dokázat. Čestnou výjimkou byl Filip Jaroš, který se přiznal, že úlohu úplně vyřešit neumí (a dostal za to o bod více).

Jen málo řešitelů si všimlo, že část (b) je snadným důsledkem části (a), většina řešitelů „mlžila" ještě jednou. Několikrát se objevila mylná představa, že „kraje hrbolů", neboli body x, v nichž je $f_{n+1}(x) = 0$ jsou $0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \ldots$ Ovšem obrázky výše uvedené, jakož i snadná úvaha ukazují, že tomu tak není.