Povídání ke třetí sérii

Tato série se zabývá dělitelností přirozených čísel, tedy pojmy, které asi nejspíš již znáš. Pro úplnost je zde však v krátkosti připomeneme a uvedeme ještě pojem kongruence, který sice v zadání nevystupuje, avšak při řešení by se Ti mohl hodit.

Jsou-li a, b celá čísla, pak řekneme, že a *dělí* b (píšeme $a \mid b$), pokud existuje celé číslo d takové, že platí $b = ad$.

Máme-li a, b celá, m přirozené, pak řekneme, že číslo a je *kongruentní* s číslem b při modulu m, pokud číslo a dává při dělení číslem m stejný zbytek jako číslo b, jinými slovy $m \mid a - b$. Tuto skutečnost zapisujeme ve tvaru $a \equiv b \pmod{m}$, tento zápis pak nazýváme kongruencí.

Snadno si zajisté sám dokážeš (vše plyne přímo z definice), že kongruence mají následující vlastnosti:

(a) Pokud $a \equiv b \pmod{m}$ a $c \equiv d \pmod{m}$, pak $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ a $ac \equiv bd \pmod{m}$.
(b) Pokud $a \equiv b \pmod{m}$, $a = a'd$, $b = b'd$ a $(d, m) = 1$, pak $a' \equiv b' \pmod{m}$.

Tyto dvě vlastnosti nám neříkají nic jiného, než že kongruence lze mezi sebou sčítat, násobit a za jistých předpokladů je lze dělit číslem.

Nechť je nyní p prvočíslo, uvažujme $p - 1$ čísel $1, 2, \ldots, p - 1$. Je-li $a \in \mathbb{Z}$ a p nedělí a, je a kongruentní právě s jedním z čísel $1, 2, \ldots, p - 1$. Všechna celá čísla nedělitelná p můžeme tedy rozdělit do $p - 1$ disjunktních skupin podle toho, s kterým z čísel $1, 2, \ldots, p - 1$ jsou kongruentní.[1] Vybereme-li nyní z každé skupiny po jednom číslu, dostáváme systém p čísel, který nazýváme *redukovaný systém zbytků při modulu p*.

Ve čtvrté úloze narazíš na tzv. patrové mocniny. Pro jistotu připomínáme, že standartní konvence je $a^{b^c} = a^{(b^c)}$, tedy např $2^{2^3} = 2^8 = 256$. Špatným uzávorkováním bychom dostali jiný výsledek: $(2^2)^3 = 4^3 = 64$.

[1] Do první skupiny dáme čísla dávající při dělení p zbytek 1, do druhé ta se zbytkem 2, . . . , do $(p - 1)$-vé čísla, která při dělení p dají zbytek $p - 1$.

3. série

Téma: Dělitelnost

Termín odeslání: 13. PROSINCE 1999

1. ÚLOHA (3 BODY)

Pro která přirozená čísla k lze vepsat čísla $1,\ 2,\ \ldots,\ k^2$ do tabulky $k\times k$ (každé číslo vepíšeme do právě jednoho políčka) tak, aby každé číslo kromě jedničky sousedilo
(a) stranou
(b) stranou nebo rohem
s nějakým svým dělitelem?

2. ÚLOHA (3 BODY)

(a) Kolika způsoby lze čísla $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ seřadit do posloupnosti $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ tak, aby číslo $|a_k - a_l|$ bylo dělitelné číslem $|k-l|$ pro všechna $k \neq l$?
(b) Je možné umístit čísla $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ na nějakou kružnici tak, aby délka libovolného oblouku mezi dvěma čísly byla celočíselná a dělitelná rozdílem čísel umístěných v jeho krajních bodech?

3. ÚLOHA (3 BODY)

Pro jaká $a,\ c$ má rovnice

$$x^3 + ax^2 + 1999x + c = 0$$

tři různá celočíselná řešení, z nichž každé dává jiný zbytek po dělení třemi?

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Zjistěte posledních 5 číslic čísla

$$5^{6^{7^{8^{9^{10}}}}}.$$

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Spočtěte, kolik je přirozených čísel n, pro něž platí $10 \leq n \leq 2^{1999}$ a 2^{n-10} dělí $n!$.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť délky stran $a,\ b,\ c$ i obsah P daného trojúhelníka jsou celá čísla. Dokažte, že pak alespoň jedno z čísel $\frac{a}{P},\ \frac{b}{P},\ \frac{c}{P}$ má nekonečný desetinný rozvoj.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte všechny dvojice přirozených čísel $a,\ b$ takové, že a dělí $5b+1$ a b dělí $3a-2$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje přirozené číslo $m < 2^{n \cdot n!}$ takové, že m má alespoň $(n!)^{n-1}$ různých kladných dělitelů. Můžete bez důkazu použít tzv. Bertrandův postulát, tj. tvrzení, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje prvočíslo p, pro které platí $n < p \leq 2n$.

Řešení 3. série

1. úloha

Pro která přirozená čísla k lze vepsat čísla $1,\ 2,\ \ldots,\ k^2$ do tabulky $k \times k$ (každé číslo vepíšeme do právě jednoho políčka) tak, aby každé číslo kromě jedničky sousedilo

(a) stranou

(b) stranou nebo rohem

s nějakým svým dělitelem?

(a) Jistě všechna prvočísla musí hranou sousedit s jedničkou, proto mezi čísly $1,\ 2,\ \ldots,\ k^2$ mohou být nejvýše 4 prvočísla a tedy $k^2 < 11$. Tedy pro $k \geq 4$ čísla do čtverce vepsat nelze, pro $k = 1,\ 2,\ 3$ ano (viz obrázek).

(b) Tentokrát je počet prvočísel omezen číslem 8, což znamená, že $k^2 < 23$. Pro $k \geq 5$ tedy čísla do čtverce vepsat nelze, pro menší k je to možné:

1

1	2
3	4

4	5	6
2	1	3
8	7	9

6	13	7	14
9	1	3	15
11	2	5	12
8	4	16	10

Poznámky opravovatele: Většina řešení byla bezchybná. Ta, která nebyla zcela správná, byla hodnocena přibližně takto: Ti, kteří si neuvědomili, že samotná 1 také tvoří tabulku (či si uvědomili, že ji netvoří), žádnou újmu na bodech nepocítili. Poměrně častou chybou bylo opomenutí důkazu, že pro $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ příslušné tabulky existují — taková řešení byla hodnocena jedním bodem. Chyběla-li tabulka jen pro $k = 1,\ 2$, získal řešitel dva body. Jedním bodem bylo hodnoceno rovněž řešení s nesprávným závěrem, když místo $k = 1,\ 2,\ 3$ ($k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$) bylo uvedeno $k = 3$ ($k = 4$). Některá obzvlášť nepřehledná řešení získala ještě $-i$.

2. úloha

(a) Kolika způsoby lze čísla $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ seřadit do posloupnosti $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ tak, aby číslo $|a_k - a_l|$ bylo dělitelné číslem $|k - l|$ pro všechna $k \neq l$?

(b) Je možné umístit čísla $1, 2, \dots, n$ na nějakou kružnici tak, aby délka libovolného oblouku mezi dvěma čísly byla celočíselná a dělitelná rozdílem čísel umístěných v jeho krajních bodech?

(a) Je zřejmé, že čísla lišící se o 1, musí být vedle sebe (rozdíl jejich pozic totiž musí dělit jejich rozdíl, tj. 1). Pak 1 musí sousedit číslem 2, 2 s čísly 1 a 3, 3 s čísly 2 a 4, ... Z toho už plyne, že čísla musí být seřazena podle velikosti, a to buď od nejmenšího, nebo od největšího, tj. jsou dva možné způsoby.
(b) Pro čísla $1, 2, \dots, n$ stačí, aby kružnice měla obvod $n! = n(n-1)!$. Čísla pak rozmístíme tak, aby libovolná dvě měla mezi sebou oblouk délky $k\cdot(n-1)!$ pro nějaké k. Libovolné takové rozmístění vyhovuje zadání úlohy.

Poznámky opravovatele: Za část (b) jsem dávala jeden bod, za část (a) dva, protože zde bylo třeba ukázat i neexistenci jiných řešení. Řešení byla v podstatě dvou typů: buď se z faktu, že $n-1$ dělí $|a_n - a_1|$ dostalo $\{a_n, a_1\} = \{1, n\}$ a postupovalo se „dovnitř“, z toho, že $k-1$ dělí $|a_k - a_1|$ a $n-k$ dělí $|a_n - a_k|$ vyšly jen dvě přípustné posloupnosti. Druhý způsob řešení, stejný jako vzorové řešení, mi přišel elegantnější a dostal $+i$.

3. úloha
Pro jaká a, c má rovnice
$$x^3 + ax^2 + 1999x + c = 0$$
tři různá celočíselná řešení, z nichž každé dává jiný zbytek po dělení třemi?

Ukážeme, že taková a, c neexistují. Sporem: nechť má polynom tři celočíselné kořeny x_1, x_2, x_3. Pak
$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + 1999x + c &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = \\ &= x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) - x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Bez újmy na obecnosti položme $x_1 = 3i$, $x_2 = 3j+1$, $x_3 = 3k+2$, kde $i, j, k \in \mathbb{Z}$. Podívejme se na koeficient u lineárního členu: $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 = 3i(3j+1)+(3j+1)(3k+2)+3i(3k+2) = 3(3ij+i+3jk+k+2j+3ik+2i)+2$. To znamená, že 1999 má po dělení třemi zbytek 2, což je evidentně spor $(1999 = 3\cdot 666 + 1)$.

4. úloha
Zjistěte posledních 5 číslic čísla
$$5^{6^{7^{8^{9^{10}}}}}.$$

Než se pustíme do precizního důkazu, budeme si chvíli hrát ... Pokud budeme sledovat posledních pět číslic 5^n s postupně se zvětšujícím n, jistě neujde naší pozornosti, že číslice na posledních dvou místech jsou stále 25, na místě stovek se střídá od $n = 3$ šestka a jednička (podle parity n). Zde využijeme toho, že n je dostatečně velké číslo dělitelné 2^k pro značně velké k. Tzn. jestliže jsme si všimli toho, že pro n sudé má 5^k na místě stovek 6, bude mít i naše zkoumané číslo na místě stovek šestku. Obdobný trik užijeme i pro číslice na místě tisíců a desetitisíců — vyjde nám, že pro dostatečně velké n dělitelné 4 je na místě tisíců 0 a pro n dělitelné 8 na místě desetitisíců 9.

Tak jsme tedy nahlédli, že na místě posledních pěti číslic bude 90625, a teď to dokážeme:

$$5^{6^{7^{8^{9^{10}}}}} = 5^{\left(2^{7^{8^{9^{10}}}}\right)\cdot\left(3^{7^{8^{9^{10}}}}\right)} = 5^{8\cdot m} = (5^8)^m = 390625^m \text{ pro nějaké } m \in \mathbb{N}.$$

Stačí nám tedy dokázat, že pro každé $s \in \mathbb{N}$ má 390625^s na posledních pěti místech číslice 90625 a to provedeme matematickou indukcí:

I: Pro $s = 1$ to zjevně platí.

II: Pokud to platí pro $s = k$, tzn. $390625^k = 10^5 \cdot i + 90625$, kde $i \in \mathbb{N}$, potom pro $s = k+1$ dostáváme:

$$390625^{k+1} = 390625^k \cdot 390625 = (10^5 \cdot i + 90625) \cdot 390625 = 10^5 \cdot (390625 \cdot i + 354033) + 90625,$$

čímž je důkaz hotov. Tvrzení platí pro každé $s \in \mathbb{N}$, tedy i pro $s = m$.

Poznámky opravovatele: První zádrhel této úlohy byl v chápání zadání. Správné uzávorkování čísla v zadání je dle všeobecně uznávaných konvencí takovéto:

$$5^{6^{7^{8^{9^{10}}}}} = 5^{\left(6^{\left(7^{\left(8^{\left(9^{10}\right)}\right)}\right)}\right)}$$

Toto číslo je nepředstavitelně veliké (počet atomů ve vesmíru je proti němu naprosto směšný), má například $6^{\left(7^{\left(8^{\left(9^{10}\right)}\right)}\right)} \cdot \log_{10} 5$ cifer, což je samo o sobě nepředstavitelné číslo, proti kterému je počet atomů ve vesmíru zase úplné nic atd. Mnozí z řešitelů si patrovou mocninu jinak uzávorkovali a dostali proto nepředstavitelně menší číslo $5^{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}$. Za toto pochybení jsem strhával pouze jeden bod, protože se tím myšlenka řešení nezměnila.

Další body jsem strhával, pokud nebyl výsledek řádně zdůvodněn. Mnoho řešitelů totiž jen konstatovalo, že se nějaké cifry na posledních pěti místech čísel 5^n opakují. Neuvedli však, zdali je to jen pouhá domněnka odpozorovaná z několika prvních mocnin čísla 5, nebo to musí platit obecně. V matematice je vše třeba řádně zdůvodnit, existuje spousta slavných příkladů, kdy nějaká hypotéza platná pro prvních několik členů nějaké posloupnosti již dále neplatí. U řešení, ve kterých jsem nenašel alespoň slovní pokusy o zdůvodnění, jsem strhával kolem dvou bodů.

5. úloha

Spočtěte, kolik je přirozených čísel n, pro něž platí $10 \le n \le 2^{1999}$ a 2^{n-10} dělí $n!$.

V tomto důkazu „číslo“ vždy znamená „celé číslo“.

Jak snadno nahlédneme, počet čísel od 1 do n, které jsou násobky čísla k je $\left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$, kde $\lfloor a \rfloor$ je dolní celá část[2] a. Uvažujme součet $S(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + \cdots$. Je to počet násobků dvou + násobků čtyř $+ \cdots$ mezi čísly $1,\ 2, \ldots,\ n$. Každé číslo $j \in \{1,\ 2, \ldots,\ n\}$ je tedy v $S(n)$ započteno právě i-krát, kde i je největší číslo takové, že 2^i dělí j. Z toho plyne, že $S(n)$ je největší číslo takové, že $2^{S(n)}$ dělí $n!$. Napíšeme si číslo n ve dvojkové soustavě.

$$n = \sum_{i=0}^{k} 2^i a_i.$$

Je zřejmé, že

(1) $j \leq k \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor = \sum\limits_{i=j}^{k} 2^{i-j} a_i.$

(2) $j > k \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor = 0.$

Takže

$$S(n) = \sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=j}^{k} 2^{i-j} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{l=0}^{i-1} 2^l =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i (2^i - 1) = \sum_{i=0}^{k} a_i (2^i - 1) = \sum_{i=0}^{k} 2^i a_i - \sum_{i=0}^{k} a_i = n - \sum_{i=0}^{k} a_i.$$

My hledáme počet čísel n mezi čísly 10 a 2^{1999} takových, že $S(n) \geq n - 10$. Podle předchozího je:

$$S(n) \geq n - 10 \ \Leftrightarrow \ n - \sum_{i=0}^{k} a_i \geq n - 10 \ \Leftrightarrow \ \sum_{i=0}^{k} a_i \leq 10.$$

Hledáme tedy počet čísel n mezi 10 a 2^{1999}, jejichž dvojkový zápis má ciferný součet nejvýše 10. Vyhovují právě ta čísla, která mají nejvýše 1999 cifer a jejichž dvojkový zápis obsahuje nejvýše 10 jedniček (těch je $\binom{1999}{1} + \binom{1999}{2} + \cdots + \binom{1999}{10}$), kromě čísel $1,\ 2,\ \ldots,\ 9$ (těch je 9), musíme však ještě započítat číslo 2^{1999} (které má 2000 cifer). Hledaný počet čísel je tedy $\binom{1999}{1} + \binom{1999}{2} + \cdots + \binom{1999}{10} - 8$.

6. úloha

Nechť délky stran $a,\ b,\ c$ i obsah P daného trojúhelníka jsou celá čísla. Dokažte, že pak alespoň jedno z čísel $\frac{a}{P},\ \frac{b}{P},\ \frac{c}{P}$ má nekonečný desetinný rozvoj.

Nejprve dokážeme, že obsah P trojúhelníka je vždy dělitelný třemi. Vyjdeme z Heronova vzorce:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ kde } s = \frac{1}{2}(a+b+c)\,.$$

[2]Tedy jediné celé číslo, které leží v intervalu $(a-1, a\rangle$

Dosadíme-li za s, pak po úpravách dostaneme:

$$16P^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)\,.$$

Nyní se podíváme, jaký zbytek po dělení třemi dává součin na pravé straně (označme si ho S) pro různé hodnoty čísel a, b, c — uděláme si tabulku (protože situace je symetrická vzhledem k záměně čísel a, b a c, mohli jsme některé řádky vynechat):

a	b	c	S
0	0	0	0
0	0	1	2
0	0	2	2
0	1	1	0
0	1	2	0
0	2	2	0
1	1	1	0
1	1	2	0
1	2	2	0
2	2	2	0

Vidíme, že číslo $16P^2$ je buď dělitelné třemi (pak je i číslo P dělitelné třemi), nebo je tvaru $3k+2$. Druhý případ však nemůže nastat, druhá mocnina přirozeného čísla ($16P^2 = (4P)^2$) dává vždy po dělení třemi zbytek 0 nebo 1. Tím jsme dokázali, že P je dělitelné třemi.

Nyní předpokládejme, že existuje taková trojice přirozených čísel $a \le b \le c$, že obsah P trojúhelníka ABC je také celé číslo a čísla a/P, b/P a c/P mají ukončený desetinný rozvoj. Ze všech takových trojic si teď vezmeme takovou, která má nejmenší a. Protože (jak jsme dokázali) je P dělitelné třemi, musí být i čísla a, b a c dělitelná třemi,[3] ale pak z Heronova vzorce plyne, že P je dělitelné devíti. Označíme-li $a_1 = a/3$, $b_1 = b/3$, $c_1 = c/3$, pak trojúhelník o celočíselných stranách a_1, b_1, c_1 má celočíselný obsah $P_1 = P/9$. Platí, že $a_1/P_1 = 3a/P$ má ukončený desetinný rozvoj, podobně b_1/P_1 a c_1/P_1. Jelikož $a_1 < a$, dostali jsme spor s minimalitou a. Tento spor dokazuje tvrzení.

Poznámky opravovatele: Všechna správná řešení vycházela z Heronova vzorce a většina z nich zkoumala zbytky po dělení třemi. Imaginární body jsem uděloval za způsob, jakým se řešitelé vypořádali s rozebíráním možných zbytků (vzorové řešení by si vysloužilo $0i$, ale některým řešitelům stačilo rozebrat jen 2 možnosti).

7. úloha

Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b takové, že a dělí $5b+1$ a b dělí $3a-2$.

[3] Jinak má číslo a/P, b/P nebo c/P neukončený desetinný rozvoj.

Napíšeme si $5b + 1 = k \cdot a$ a $3a - 2 = l \cdot b$. Dosadíme-li za b z druhé rovnice do první, dostaneme $k \cdot a = 5/l \cdot (3a - 2) + 1$ a odtud

$$a = \frac{10 - l}{15 - kl}\,.$$

Když naopak dosadíme za a z první rovnice do druhé, dostaneme po úpravách

$$b = \frac{3 - 2k}{kl - 15}\,.$$

Když ve vyjádření a položíme $l = 1$, dostaneme

$$a = \frac{9}{15 - k}\,.$$

Odtud vidíme, že $k = 14$, 12, nebo 6. Podobným způsobem pro $l = 2$ dostaneme $k = 7$, pro $l = 3$ žádné k nevyhovuje, pro $l = 4$ bude $k = 3$, pro $l = 5$ je $k = 2$, pro $l = 7$ je $k = 2$. Pro $l = 6$, 8, 9 nevyhovuje žádné k. Pro $l > 10$ položme $l = 10 + m$ a dostáváme

$$a = \frac{m}{k(10 + m) - 15}\,,$$

což speciálně znamená, že $k(10 + m) - 15 \leq m$, tj.

$$k \leq \frac{m + 15}{m + 10} < 2\,.$$

To znamená, že přichází v úvahu pouze $k = 1$. Po dosazení do vyjádření b dostáváme

$$b = \frac{1}{l - 15}\,,$$

tedy nutně $l = 16$.

Nyní stačí dopočítat hodnoty a a b ze známých k a l:

a	9	3	1	8	2	3	6
b	25	7	1	11	1	1	1

Poznámky opravovatele: Všechna správná řešení byla postavena na stejném principu jako řešení autorské: nejprve se ukázalo, že nějaké výrazy (buď přímo a, b, nebo k, l, nebo $k \cdot l$, ...) nemohou být příliš velké, a pak se probraly jednotlivé možnosti (těch bylo jen konečně mnoho, dokonce poměrně málo). Mnozí řešitelé místo probrání možností pouze konstatovali „... a dále rozeberu konečně mnoho možností a najdu tato řešení: ... “. Po dlouhých úvahách jsem se rozhodl za to strhávat bod. To rozebírání sice bylo většinou zdlouhavé a nudné, ale je nutnou částí řešení. (Podle tohoto klíče by tedy autorské řešení dostalo jen 4 body, autorské řešení ovšem může být pouze návodem k řešení …) Pokud ovšem řešitel přesně popsal, jak bude v řešení postupovat (např. vypsal všechny dvojice $[k, l]$, které je třeba probrat, zdůvodnil, proč jiné dvojice probírat nemusí, pak řekl, že každou dosadí do vzorců pro a, b a pokud oba vzorce dají celé číslo, našel řešení), uznal jsem to jako kompletní řešení. Rutinní dosazení do vzorců totiž může dělat každý (např. počítač), zatímco rozebírání (byť snadné) zvládne jen matematik … Někteří řešitelé také dělali zbytečné numerické chyby, kvůli nimž nenašli všechna řešení — za to jsem také strhával jeden bod, i přesnost v rutinních postupech je důležitá schopnost.

Přestože úloha sváděla k bezmyšlenkovitému úmornému řešení, nalezli se i řešitelé, kteří si rozebírání příkladu značně usnadnili nějakou chytrou myšlenkou (např. vhodné použití dělitelnosti čísly 2, 3, 5), byli odměněni $+i$. Překrásné bylo řešení *Honzy Houšťka* ($+2i$), ve stručnosti ho zde nastíním.

Nechť napřed $b = 1$. Pak hledám taková a, která dělí číslo 6, tedy mám řešení $[1, 1]$, $[2, 1]$, $[3, 1]$, $[6, 1]$. Nadále uvažujme jen $b > 1$. Nejprve snadno ukážu, že $a < 10$ a že b je liché číslo. Pak proberu možné hodnoty a, tj. 1, 2, … , 9, pro každou z nich si spočtu číslo $3a - 2$. Toto číslo má být dělitelné lichým číslem b, větším než 1. Kupodivu dostanu jenom málo možností (konkrétně sedm), ověřením, zda $a \mid 5b + 1$, zjistím, že tři z nich vyhovují. A je to!

Ještě upozornění o značení. Mnohý řešitel často psal výrazy jako $k = \{1, 2, 3\}$. Toto značení ovšem znamená, že k je **množina** čísel 1, 2, 3! Řešitel však měl zjevně na mysli, že k je jedno z čísel 1, 2, 3, neboli že je to prvek množiny $\{1, 2, 3\}$. To se správně zapíše $k \in \{1, 2, 3\}$, eventuálně $k = 1,\ 2,\ 3$.

8. úloha

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje přirozené číslo $m < 2^{n \cdot n!}$ takové, že m má alespoň $(n!)^{n-1}$ různých kladných dělitelů. Můžete bez důkazu použít tzv. Bertrandův postulát, tj. tvrzení, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje prvočíslo p, pro které platí $n < p \leq 2n$.

Označme $\{p_n\}$ rostoucí posloupnost všech prvočísel. Pak $p_1 = 2$, $p_2 = 3$. Z Bertrandova postulátu (zvolíme-li $n = p_k$) plyne, že existuje prvočíslo p, takové, že $p_k < p \leq 2p_k$. Odtud vidíme, že $p_{k+1} \leq 2p_k$. Odtud matematickou indukcí snadno odvodíme

$$p_n < 2^n \text{ pro } n \geq 2. \tag{$\heartsuit$}$$

Nyní určíme počet dělitelů čísla $m > 2$, u kterého známe prvočíselný rozklad. Předpokládejme, že

$$m = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_k^{\alpha_k},$$

kde $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_k$ jsou po dvou různá prvočísla. Pak počet kladných dělitelů m je

$$d(m) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

To snadno nahlédneme, uvědomíme-li si, že d je kladný dělitel m, právě tehdy, když lze psát

$$d = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_k^{\beta_k}$$

pro nějaká

$$0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1,\ 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2,\ \ldots,\ 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k.$$

Pak tedy pro každý exponent β_i máme $\alpha_i + 1$ možností, volba exponentu β_i je nezávislá na volbě ostatních exponentů. Platí tedy $d(m) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) > \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme vyhovující m. Pro $n = 1$ vyhovuje $m = 1$, dále budeme předpokládati, že $n \geq 2$. Zvolíme m ve tvaru

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}.$$

Podle ($\heartsuit$) je $p_k < 2^k$ pro $k \geq 2$ (pro $k = 1$ nastane rovnost) a tedy

$$m < 2^{\alpha_1} \cdot 2^{2\alpha_2} \cdots 2^{n\alpha_n} = 2^{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n}.$$

Tedy aby $m < 2^{n \cdot n!}$, stačí zajistit, aby $\sum\limits_{i=1}^{n} i\alpha_i \leq n \cdot n!$. Aby $d(m) \geq (n!)^{n-1}$, stačí zajistit, aby $\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \geq (n!)^{n-1}$. Toho dosáhneme například volbou $\alpha_i = \frac{n!}{i}$. Pak

$$\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} n! = n \cdot n!.$$

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (n!)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = (n!)^{n-1}.$$

Vidíme, že volba $m = \prod\limits_{i=1}^{n} p_i^{\frac{n!}{i}}$ vyhovuje požadavkům zadání.

Poznámky opravovatele: Tato úloha se dala řešit více způsoby. Ve všech se musel nalézt nějaký tvar čísla m a o něm pak dokázat, že splňuje podmínky ze zadání. Dva řešitelé zvolili m stejně jako ve vzorovém řešení. Někteří dokázali, že podmínky platí pro

$$m = p_1^{n-1} p_2^{n-1} \ldots p_{n-1}^{n-1} p_n^{n-2} \ldots p_{2n-2}^{n-2} p_{2n-1}^{n-3} \cdots p_{(n-2)(n-1)+1} \cdots p_{(n-1)(n-1)}$$

a také pro

$$m = p_1^{(n-1)!-1} p_2^{(n-1)!-1} \ldots p_{n-1}^{(n-1)!-1} p_n^{n-1} p_{n+1}^{n-1} \cdots p_{2n-2}^{n-1}.$$

Ostatní za m brali součin co nejvíce různých prvočísel, o kterém s použitím Bertrandova postulátu ještě dokázali, že je menší než $2^{n.n!}$. I toto číslo má více než $(n!)^{n-1}$ dělitelů.

Téměř polovina řešitelů se vůbec nezmínila o tom, že vztah pro počet dělitelů daného čísla je také potřeba dokázat, vysloužili si tak $-1i$.

V některých řešeních se mělo dokázat, že určitý polymom je menší než nějaký výraz s faktoriálem. Těm kteří takovou nerovnost jen ověřili pro malá čísla, a pak konstatovali, že dále bude platit také, neboť faktoriál roste rychleji než polynom, jsem strhla 1 nebo 2 body podle toho, jak obtížné by bylo daný vztah dokázat precizně.