10. série

Téma: Problémová série

Termín odeslání:

1. ÚLOHA (20 BODŮ)

V kruhu o poloměru jedna je umístěno n stejně velkých kruhů. Jak velké mohou být? Přesněji: označme jako r_n maximální takové číslo, že n kruhů o poloměru r_n je možno umístit do jednotkového kruhu (nesmějí se překrývat, ale mohou se dotýkat). Úplným řešením by bylo nalezení r_n pro všechna n, ale to je asi příliš obtížné. Jako částečné řešení můžeš poslat nějaké odhady (tj. nerovnosti pro r_n), řešení pro malá n či nějaký jiný zajímavý postřeh.

2. ÚLOHA (20 BODŮ)

Pro která čísla $a \neq b$ dělí číslo $2^a - 2^b$ všechna čísla $n^a - n^b$, kde n probíhá všechna přirozená čísla? Úplným řešením této úlohy by byl popis všech dvojic (a, b), které podmínku splňují, jako částečné řešení uvítáme jakýkoliv výsledek popisující některé dvojice, které podmínku splňují nebo naopak některé dvojice, které ji nesplňují.

1. úloha

V kruhu o poloměru jedna je umístěno n stejně velkých kruhů. Jak velké mohou být? Přesněji: označme jako r_n maximální takové číslo, že n kruhů o poloměru r_n je možno umístit do jednotkového kruhu (nesmějí se překrývat, ale mohou se dotýkat). Úplným řešením by bylo nalezení r_n pro všechna n, ale to je asi příliš obtížné. Jako částečné řešení můžeš poslat nějaké odhady (tj. nerovnosti pro r_n), řešení pro malá n či nějaký jiný zajímavý postřeh.

Tuto úlohu řešilo šest řešitelů, došlo sedm řešení (Vadim Omelčenko totiž poslal dva štůsky řešení). Nikomu se nepodařilo přijít na definitivní řešení, všichni mají tedy prostor k dalšímu bádání. Ani my zde definitivní řešení nepodáme, zkusíme jen dokázat několik nesmělých výsledků, aby bylo vidět, že úloha nebyla úplně neřešitelná …

První otázkou by mělo být, zda má zadání úlohy smysl. Ptáme se totiž na maximum z nějaké množiny čísel, kdyby ta množina byla třeba interval $(0, 1/3)$, tak by maximum neexistovalo. Tuto otázku si nikdo z řešitelů nepoložil, ani my ji zde nebudeme podrobně řešit. Poznamenejme jen, že až se dozvíte, co to znamená, že „spojitá funkce na kompaktu nabývá maxima“, tak zjistíte, že číslo r_n je opravdu dobře definováno.

Nejprve určíme r_n pro $n \leq 7$. Toto dělali mnozí řešitelé, avšak nikdo nedokázal, že jimi nalezené způsoby rozmístění kruhů jsou optimální. Dokázali tedy jen, že r_n je větší než hodnota, kterou spočítali ze své konstrukce. Zde se pokusíme o přesvědčivé zdůvodnění. Určitě je $r_1 = 1$. Z rozmístění malých kruhů pravidelně na obvod zjistíme, že $r_n \geq \frac{\sin \pi/n}{1+\sin \pi/n}$.

n	1	2	3	4	5	6	7
$r_n =$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4+\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$r_n \doteq$	1,00	0,50	0,46	0,41	0,38	0,33	0,33

Ukážeme, že pro $n \le 6$ je toto rozmístění optimální. Pro $n = 7$ se vejde jeden kruh mezi šest na obvodu. Tudíž $r_7 \ge r_6$. Současně platí $r_7 \le r_6$ (pro každé $m > n$ je jistě $r_m \le r_n$, protože rozmístění pro m můžeme použít i pro n vynecháním několika kruhů). Stačí tedy zjistit, že pro $n \le 6$ je uvedené opravdu optimální rozmístění. Pro tento účel naši úlohu poněkud přeformulujeme.

Snažme se umístit do jednotkového kruhu n bodů tak, aby mezi každými dvěma z nich byla vzdálenost alespoň d, pro co největší d. Maximální takové d označme jako ϱ_n.

Tato úloha půjde řešit o něco snadněji, napřed ale ukážeme, že je v jistém smyslu ekvivalentní s úlohou původní, přesněji, že platí

$$\varrho_n = \frac{2r_n}{1-r_n}, \qquad \text{neboli} \qquad r_n = \frac{\varrho_n}{\varrho_n + 2}.$$

Ukážeme, že v obou vztazích na předchozím řádku je levá strana větší nebo rovna pravé, odsud poplyne, že jsou vskutku stejné. Uvažme optimální rozmístění pro r_n. Středy malých kruhů jsou všechny v kruhu o poloměru $1 - r_n$, tedy po zobrazení stejnolehlostí s koeficientem $1/(1 - r_n)$ získáme n bodů v jednotkovém kruhu, jejichž vzájemné vzdálenosti jsou alespoň $2r_n/(1 - r_n)$, tudíž platí $\varrho_n \ge 2r_n/(1 - r_n)$. Pro důkaz druhé nerovnosti uvažme optimální rozmístění pro ϱ_n, body zobrazme stejnolehlostí s koeficientem $2/(\varrho_n + 2)$. Vzájemné vzdálenosti získaných bodů, budou alespoň $2\varrho_n/(\varrho_n + 2)$, vzdálenost bodů od obvodu alespoň $\varrho_n/(\varrho_n+2)$, takže kruhy se středy v získaných bodech a tímto poloměrem se nebudou překrývat. Odsud získáme druhou nerovnost.

Spočtěme nyní ϱ_n pro $n \le 6$. Ukážeme, že optimální rozmístění je pravidelný n-úhelník (tedy i v původní úloze budou středy optimálně rozmístěných kružnic tvořit pravidelný n-úhelník). Mějme nějakých n bodů v kruhu, spojme každý z nich se středem. Získané spojnice vytyčují n úhlů, jejichž součet je 2π. Jeden z úhlů bude tedy nanejvýše $2\pi/n$. Dva z našich bodů jsou tedy v kruhové výseči s úhlem $2\pi/n$, vzdálenost mezi nimi bude maximální tehdy, když budou oba na obvodu (zde využíváme toho, že $n \le 6$). Dokázali jsme tedy, že v optimální konfiguraci leži body na obvodu kruhu, navíc zjevně musí být vzdálenosti mezi nimi stejné. Tudíž optimální konfigurace je vskutku pravidelný n-úhelník. (V právě dokončeném důkazu je nepatrná chyba, odhalíte ji?) Tím jsme tedy spočítali ϱ_n (přesné vyčíslení, tj. spočítání délky strany pravidelného n-úhelníka vepsaného do jednotkové kružnice přenecháváme laskavému čtenáři). Podle výše uvedených vzorečků odsud můžeme spočítat r_n. Určení r_8, r_9 atd. je výrazně obtížnější.

Počítáním obsahů můžeme snadno získat horní odhad pro r_n (tj. nerovnost $r_n \le f(n)$, kde $f(n)$ je nějaká hezká funkce). Každý z malých kruhů má totiž obsah πr_n^2, obsah velkého kruhu je π. Tudíž $n\pi r_n^2 \le \pi$, neboli $r_n \le 1/\sqrt{n}$.

Hledejme nyní dolní odhad pro r_n (tj. nerovnost $r_n \ge f(n)$, kde $f(n)$ je nějaká hezká funkce). Mějme v kruhu rozmístěných n nepřekrývajících se kruhů o poloměru r_n. Nyní do každého z nich vepíšeme m kruhů o poloměru $r_m r_n$ (podle optimální konfigurace pro m). Tím získáme rozmístění mn kruhů, tudíž jsme zjistili, že $r_{mn} \geq r_m r_n$.

Indukcí odsud získáme vztah $r_{n^k} \geq r_n^k$, speciálně pro $n = 7$ zjistíme, že $r_{7^k} \geq 3^{-k}$. Tento výsledek má nepříjemnou vlastnost — dává nám dolní odhad jen pro n, které je mocninou sedmičky. Můžeme ho však využít k tomu, abychom nalezli nějaký odhad pro všechna r_n. Mějme tedy nějaké n a najděme takové k přirozené, aby $7^{k-1} \leq n \leq 7^k$. Označíme-li $\alpha = \log 3/\log 7 \doteq 0{,}56$, platí

$$r_n \geq r_{7^k} \geq 3^{-k} = \frac{1}{3.7^{\alpha(k-1)}} \geq \frac{1}{3n^\alpha}$$

Nyní tedy máme dolní i horní odhad pro r_n: víme, že pro všechna n je $\frac{1}{3}n^{-\alpha} \leq r_n \leq n^{-1/2}$. Vzhledem k tomu, že α je přibližně $1/2$, není to tak špatný výsledek, nicméně pro velká n je rozdíl mezi dolním a horním odhadem velký, což vyvolává otázku, zda je skutečná hodnota r_n bližší našemu hornímu, nebo dolnímu odhadu. Odpověď dostaneme dokonce dvěma způsoby.

Již v minulém textu o problémové sérii jsme zmínili, že následující výsledek Vadima Omelčenka. Rozmístěme kruhy „šestiúhelníkovitě“ tak, aby za sebou bylo nejvíce $2k - 1$ kruhů (nakreslete si obrázek). Snadno se spočítá, že takto umístíme $3k(k-1)+1$ kruhů, tudíž

$$r_{3k(k-1)+1} \geq \frac{1}{2k-1}.$$

Když nyní budeme postupovat podobně, jako o dva odstavce výše, najdeme jako dolní odhad pro r_n něco jako $c/\sqrt{n}$. Výpočet přenecháme laskavému čtenáři.

Druhý postup, kterým lze v jistém smyslu zjistit přesné chování r_n pro velká n, zde jen naznačíme, mj. proto, že budeme potřebovat jedno tvrzení, které nedokážeme. Hexagonálním zaplněním roviny nazveme rozmístění jednotkových kruhů tak, že středy sousedních kruhů tvoří rovnostranný trojúhelník. Zdá se být intuitivně jasné, že se jedná o nejhustější zaplnění roviny. Důkaz tohoto tvrzení je však dosti obtížný, na první pohled není ani jasné co vlastně má znamenat hustota zaplnění. Když se s těmito potížemi vypořádáme (to přenecháme laskavému čtenáři), dojdeme k tomu, že hustota bude něco jako poměr obsahu jednoho kruhu a obsahu části roviny, která na něj „připadá“. (Není ovšem vůbec jasné, co má tohle „připadá“ znamenat.) Označme tuto hustotu ϱ. Součet obsahů malých kruhů (tj. $n\pi r_n^2$) bude tedy přibližně roven obsahu kruhu velkého $\varrho\pi$ (budou-li kruhy rozmístěny hexagonálně), určitě nemůže být (o mnoho) větší, protože hexagonální rozmístění je optimální (je třeba si rozmyslet podrobnosti, protože tato optimálnost se týká celé roviny, může se pokazit kvůli hranici kruhu). Odsud

$$r_n \doteq \frac{\sqrt{\varrho}}{\sqrt{n}},$$

přičemž ϱ je hustota hexagonálního zaplnění, tj. $\pi/(2\sqrt{3})$, tedy $\sqrt{\varrho} \doteq 0.95$.

2. úloha

Pro která čísla $a \neq b$ dělí číslo $2^a - 2^b$ všechna čísla $n^a - n^b$, kde n probíhá všechna přirozená čísla? Úplným řešením této úlohy by byl popis všech dvojic (a, b), které podmínku splňují, jako částečné řešení uvítáme jakýkoliv výsledek popisující některé dvojice, které podmínku splňují nebo naopak některé dvojice, které ji nesplňují.

Druhá úloha problémové série byla věnována teorii čísel. Teorie čísel bezesporu obsahuje největší řadu slavných matematických problémů. K jejich velké popularitě vede i to, že jejich zadání mnohdy pochopí každý matematický laik. Jejich řešení ovšem matematikům často odolává staletí.

Úlohu do problémové série jsme vybrali z knihy *Richard K. Guy: Unsolved Problems in Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1981.* V této knize je zaznamenána spousta nevyřešených otázek z teorie čísel. Je zde uveden i současný pokrok v každém problému.

V knize Richarda Guye bylo o problému uvedeno jen, že: „pro každé přirozené n číslo $2^2 - 2$ dělí číslo $n^2 - n$, dále číslo $2^{2^2} - 2^2$ dělí číslo $n^{2^2} - n^2$ a konečně číslo $2^{2^{2^2}} - 2^{2^2}$ dělí číslo $n^{2^{2^2}} - n^{2^2}$." Tj. byly vyjmenovány tři dvojice čísel a, b. Čísla a, b byla uvedena v zajímavém tvaru, který napovídal možnost dalšího zobecňování. Touto cestou se ovšem žádný z řešitelů neubíral. Zůstává proto pro Tebe **výzvou** na dlouhé prázdninové večery.

Naši řešitelé se ubírali jinou cestou. Předně nalezli celkem 14 dvojic čísel a, b ($a > b$), které vyhovují požadavkům zadání. Tyto dvojice jsou zapsány v následující tabulce (bez újmy na obecnosti se stačí omezit na případ $a > b$.)

a	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	14	15	16
b	0	1	1	2	1	3	2	3	2	4	3	2	3	4

V tabulce jsou uvedena všechna řešení pro $a < 20$, $b < 20$. Pro ostatní a, b lze ukázat, že číslo $2^a - 2^b$ nedělí číslo $3^a - 3^b$, tj. tvrzení ze zadání úlohy neplatí už pro $n = 3$. To vedlo Vaška Cvička ke zformulování následující hypotézy (on sám ji nedokazuje, takže opět zůstává její dokázání nebo vyvrácení jako **velká výzva** pro Tebe na dlouhé prázdninové večery):

Vaškova hypotéza: Pokud $2^a - 2^b$ dělí $3^a - 3^b$, pak $2^a - 2^b$ dělí $n^a - n^b$ pro každé přirozené číslo n.

Úloha zatím zůstala nepokořena, myslíme však, že můžeme všechny naše řešitele pochválit, že se do ní s chutí pustili, byť jenom s částečnými výsledky. Je totiž přece jenom snazší pustit se do řešení problému semináře či jiné soutěže, kde je známo, že řešení existuje, než se pouštět do něčeho nového, kde člověk předem neví, zdali se mu podaří na něco přijít. Nejúspěšnějšími pokořovateli úlohy byli *Eva Ondráčková* a *Josef Cibulka.*