# 1. seriálová série

**Téma:** Geometrie

**Termín odeslání:** 11. ledna 1999

1. úloha (5 bodů)

Ukažte, že libovolná shodnost v e se dá získat jako složení maximálně tří osových souměrností.

2. úloha (5 bodů)

V dalším díle ukážeme, že v Ł jsou *úsečky* právě úsečky na přímkách rovnoběžných s osou $y$, a dále části kruhových oblouků na kružnicích se středem na ose $x$. Použijte tento fakt již nyní a zkonstruujte pro dané dva *body* $a$, $b$ *střed úsečky* $ab$.

3. úloha (5 bodů)

Sestrojte *kružnici*, máte-li dán její *střed* a *bod*, který na ní má ležet. Pod *kružnicí* rozuměj množinu *bodů*, které mají od *středu* stejnou *vzdálenost*.

# 2. seriálová série

**Téma:** Ekvidistanty

**Termín odeslání:** 15. března 1999

4. úloha (5 bodů)

Najděte *ekvidistanty* k libovolné *přímce*. Tj. dokažte pořádně to, co bylo v seriálu jen konstatováno, případně naznačeno.

5. úloha (5 bodů)

Ukažte, že nelze ztotožnit (tj. převést na sebe *shodností*) ani části *ekvidistant* o různých výškách.

6. úloha (5 bodů)

Spočtěte *křivost ekvidistant*.

# 3. seriálová série

**Téma:** Geometrické konstrukce

**Termín odeslání:** 17. KVĚTNA 1999

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Zkonstruujte *rovnostranný trojúhelník*.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Věta *„Ke každému trojúhelníku existuje kružnice jemu opsaná.“* je ekvivalentní s 5. Euklidovým postulátem. Najděte tedy v Ł *trojúhelník*, jemuž se nedá opsat *kružnice*.

9. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že neexistuje *čtverec* (tj. množina bodů ohraničená čtyřmi na sebe kolmými *úsečkami*). Sestrojte *kosočtverec*, tj. množinu bodů ohraničenou čtyřmi různými, stejně *dlouhými úsečkami*.

# Řešení seriálové série

**1. úloha**
Ukažte, že libovolná shodnost v e se dá získat jako složení maximálně tří osových souměrností.

Ukážeme nejprve, že dva shodné trojúhelníky na sebe lze převést pomocí nejvýše tří osových souměrností. Buďte tedy $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ dva shodné trojúhelníky, přičemž vrchol $A$ odpovídá $A'$, atd. Zobrazme nejprve $\triangle ABC$ osovou souměrností podle osy úsečky $AA'$, jeho obraz označme $\triangle A_1B_1C_1$. Zjevně $A' = A_1$. Dále zobrazme $\triangle A_1B_1C_1$ osovou souměrností podle osy úsečky $B_1B'$ (výsledek označme $\triangle A_2B_2C_2$). Vzhledem k tomu, že trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A'B'C'$ jsou shodné, prochází tato osa bodem $A' = A_1$, takže $A' = A_2$, dále zjevně $B' = B_2$. Pokud nyní $C' = C_2$, jsme hotovi. Pokud ne, tak trojúhelníky $\triangle A'B'C'$ a $\triangle A_2B_2C_2$ jsou osově souměrné podle přímky $A'B'$ a stačí provést třetí osovou souměrnost.

Zbývá ukázat, že umět zobrazovat trojúhelníky stačí. Mějme libovolnou shodnost $s$, zvolme libovolný (nedegenerovaný) $\triangle ABC$ a zobrazme ho pomocí $s$ na $\triangle A'B'C'$. Podle předchozího odstavce umíme $\triangle ABC$ převést na $\triangle A'B'C'$ pomocí nejvýše tří osových souměrností, zbývá ukázat, že složení oněch souměrností (označme ho $t$) se rovná $s$, čili že zobrazuje stejně každý bod roviny. K tomu stačí nahlédnout, že bod v rovině je jednoznačně určen svými vzdálenostmi od vrcholů nedegenerovaného trojúhelníka. Je-li totiž $x$ libovolný bod, pak jeho vzdálenosti od vrcholů $\triangle ABC$ jsou stejné jako vzdálenosti $s(x)$ od vrcholů $\triangle A'B'C'$ i jako vzdálenosti $t(x)$ od vrcholů $\triangle A'B'C'$ (užíváme definice shodnosti). Spojením posledních dvou vět zjistíme, že $s(x) = t(x)$, což jsme chtěli.

Poznámky opravovatele: Vyskytly se tři druhy řešitelů. První napsali, jak zobrazovat trojúhelník, ale většina z nich nedokázala, že to stačí (ono to úplně zřejmé není). (3–5 bodů)

Druzí napsali, že existují následující druhy shodností: posunutí, rotace, osová souměrnost, posunutá osová souměrnost (příp. otočená osová souměrnost) a jednostlivé případy rozebrali. Nedokázali však, že jiné druhy shodností neexistují. Dokázat např., že složením dvou posunutých osových souměrností nevznikne nic nového, není triviální, navíc to ani nestačí! Složením dvou posunutí také vznikne jen posunutí, přesto však nemohu tvrdit, že každá shodnost je posunutí! (0–2 body)

Ostatní řešení tvořila nejméně početnou skupinu zajímavých, ale většinou chybných řešení. (0–3 body)

**2. úloha**
V dalším díle ukážeme, že v Ł jsou *úsečky* právě úsečky na přímkách rovnoběžných s osou $y$, a dále části kruhových oblouků na kružnicích se středem na ose $x$. Použijte tento fakt již nyní a zkonstruujte pro dané dva *body* $a$, $b$ *střed úsečky* $ab$.

Uvažujme nejprve, že $a, b$ leží na *přímce*, která je polopřímkou rovnoběžnou s osou $y$, nechť rovnou leží na ose $y$. *Střed úsečky* je takový bod $s$, že $\varrho(a, s) = \varrho(s, b)$, kde $\varrho(p, r)$ je *vzdálenost* bodů $p, r$, tj. existuje *shodnost*, která nechává $s$ na místě a zaměňuje *body* $a, b$.

Taková *shodnost* bude kruhová inverze o středu v počátku a poloměrem $r$ takovým, že bod $[0, r]$ je hledaným *bodem* $s$. Když označím $a = [0, a], b = [0, b]$ tak je $r^2 = a.b$, takové číslo $r$ už tedy lze zkonstruovat podle Euklidovy věty.

Mám-li dva body neležící na přímce rovnoběžné s osou $y$, tak ony stejně leží na *přímce*, v tomto případě je to kružnice $k$ se středem na ose $x$. Jedná se tedy o to, jak $k$ převést *shodností* na osu $y$. To je ale jednoduché. Nechť kružnice $k$ protíná osu $x$ v bodech $k_1, k_2$, hledaná *shodnost* pak bude kruhová inverze kolem kružnice $\tilde{k}$ se středem v $k_1$ a procházející bodem $k_2$, případně složená s posunutím (což je složení dvou osových souměrností). Získám tedy *střed* jako v prvním případě a inverzními *shodnostmi* ho přenesu nazpět.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů používala myšlenku uvedenou v autorském řešení, tj. v případě, že body leží na přímce kolmé k ose $x$, použili Euklidovu větu o výšce a v případě, že body neleželi na přímce rovnoběžné s osou $y$, zobrazili je nejprve na takovou přímku vhodnou *shodností*.

Několik řešitelů použilo alternativní postup a hledali přímo *shodnost*, která převádí na sebe zadané body, označme je $A$, $B$. V případě, že body leží na přímce rovnoběžné s osou $x$ je touto *shodností* osová souměrnost podle přímky kolmé na $x$. V ostatních případech je *shodností* vhodná kruhová inverze. Hledaný střed je pak samodružný bod *shodnosti* ležící na *přímce* spojující body $A$ a $B$.

**3. úloha**

Sestrojte *kružnici*, máte-li dán její *střed* a *bod*, který na ní má ležet. Pod *kružnicí* rozuměj množinu *bodů*, které mají od *středu* stejnou *vzdálenost*.

Nejprve je nutné si uvědomit, co to je *kružnice*. Jak později ukážeme, je to kružnice v eukleidovském smyslu, jen s poněkud jiným středem. Mějme tedy zadaný *střed* $s$ a *bod* $a$, který na ní má ležet, pro jednoduchost zase tak, že $s$ i $a$ leží na ose $y$. Když v obecném případě takto ležet nebudou, zase si je *shodnostmi* můžu přenést.

Udělám teď kruhovou inverzi kolem kružnice se středem v počátku a s takovým poloměrem, že prochází bodem $s$. Obraz *bodu* $a$ je nějaký *bod* $b$, ten zase musí ležet na mé *kružnici*, protože má od $s$ *vzdálenost* stejnou jako $a$, teď už tu *kružnici* ale z bodů $a$, $b$ sestrojím lehce — jako eukleidovskou kružnici procházející body $a$, $b$ a se středem na jejich spojnici. Označme si tuto kružnici $k$.

Nyní zbývá nahlédnout, že $k$ je i *kružnice*, čili označíme-li $l$ *kružnici*, již jsme měli sestrojit, chceme ukázat, že $k = l$. Nejprve ukažme, že $k \subseteq l$. Máme tedy *body* $s$, $a$ jako výše a dále nějaký *bod* $c \in k$. Chceme ukázat, že $\varrho(s, a) = \varrho(s, c)$, neboli, že existuje *shodnost* jež převádí $c$ na $a$ a nechává $s$ na místě. Za takovou *shodnost* můžeme volit kruhovou inverzi, jejíž střed bude průsečík přímky $ac$ a osy $x$ a jejíž poloměr bude právě takový, aby bod $s$ zůstal na místě. Ověření, že tato kruhová inverze skutečně převádí $a$ na $c$ Ti nechávám jako domácí úkol.

A na konec ukážeme, že $l \subseteq k$. Nechť pro spor existuje bod $c \in l$, který na $k$ neleží. Vezmu *přímku* $p$ spojující body $s$ a $c$ a označím $\tilde{c}$ ten průsečík $p$ a $k$, který je *bodu* $c$ blíže. Existuje *shodnost*, která mi zobrazuje $a$ do $\tilde{c}$, $\tilde{c}$ do $a$ a $s$ nechává na místě. (Viz předchozí odstavec.) Ta ale ukazuje, že vzdálenost $c$ od $s$ je jiná než $a$ od $s$, tedy $c$ nemůže ležet na $l$.

Poznámky opravovatele: Řešení byla vesměs správná, pouze bych chtěl upozornit na to, že přehnané užívání výpočtů škodí.

**4. úloha**
Najděte *ekvidistanty* k libovolné *přímce*. Tj. dokažte pořádně to, co bylo v seriálu jen konstatováno, případně naznačeno.

Nejprve si uvědomíme, jak se vlastně určuje *vzdálenost* bodu od *přímky*. K tomu použijeme toto

**Pomocné lemma.** *Buď dána přímka $p$ a bod $P$. Pak je vzdálenost bodu $P$ od $p$ realizována na úsečce kolmé na $p$. (tj. na přímce $p$ leží jen jeden bod $Q$, nejbližší bodu $P$, a navíc, $Q$ leží na kolmici spuštěné z $P$ na $p$.)*

*Důkaz:* tvrzení je téměř zřejmé, je-li $p$ kružnice se středem v počátku souřadnic a $P$ leží na ose $y$. V obecném případě $p$ nejprve převedu na *přímku* rovnoběžnou s $y$ a $P$ pak zobrazuji tak, abych po zobrazení převádějící $p$ na kružnici o středu v počátku dostal předchozí případ.

Pro jednoduchost za základní *přímku* vezmeme osu $y$ a mějme dán bod $A$ ležící mimo $y$. Chceme sestrojit *ekvidistantu* $e$ procházející bodem $A$. Protože eukleidovské stejnolehlosti jsou *shodonosti*, je díky pomocnému lematu patrné, že přímka (!) $e$ procházející $[0, 0]$ a $A$ a přímka $f$ s ní souměrná podle osy $y$ je *ekvidistanta.* Máme teď už jen ukázat, že jiné body než ty, které leží na $e$ a $f$ mají od $y$ jinou vzdálenost než $A$. Mějme tedy bod $B$, ten leží buď uvnitř nebo vně úhlu vymezeného přímkami $e, f$.

Vezmu si tedy *úsečku* $u$ procházející bodem $B$ a kolmou na $y$ a bez újmy na obecnosti nechť $B$ leží vně úhlu (jinak analogicky). Pak $u$ protne $e$, resp. $f$ v nějakém bodě $C$ a podle předchozího lemmatu je *vzdálenost* $C$ od $y$ menší než $B$ od $y$, což je spor.

**5. úloha**
Ukažte, že nelze ztotožnit (tj. převést na sebe *shodností*) ani části *ekvidistant* o různých výškách.

*Shodnosti* zachovávají *křivost* (viz druhý díl seriálu) a podle dalšího příkladu mají různé *ekvidistanty* různé *křivosti.*

Poznámky opravovatele: Řešení byla víceméně v pořádku, jen občas jste některá tvrzení, která byla bez důkazu uvedena v seriálu, ve svém řešení též nedokazovali. Strhával jsem za to pár bodů, neboť tyto důkazy tvořily samou podstatu příkladu.

**6. úloha**
Spočtěte *křivost ekvidistant.*

Můžeme zase uvažovat jeden speciální případ, mám část *ekvidistanty* $e$ k ose $y$ (viz řešení prvního příkladu), jejich vzájemná odchylka je $\alpha$, počítám *křivost* v bodě $X = [\mathrm{tg}\alpha, 1]$. V tomto bodě se měří v e stejně jako v Ł (viz konec první části seriálu) a proto *křivost*

$e$ bude stejná jako křivost kružnice, která se v $X$ $e$ dotýká a její střed leží na ose $x$ (v Ł se totiž *křivost* $e$ spočte přenášením vektoru právě po té kružnici, v e se křivost kružnice spočte pomocí přenášení vektoru právě po $e$; přesněji, vektory se přenáší po velmi podobné kružnici, resp. velmi podobné přímce a ponechávám na rozmyšlení čtenáři, že tato odchylka nemá žádný podstatný vliv).

A protože křivost kružnice je $\frac{1}{r}$, kde $r$ je její eukleidovský poloměr, je *křivost* $e$ rovna $\sin\alpha$.

**7. úloha**
Zkonstruujte *rovnostranný trojúhelník.*

Konstrukce je celkem jednoduchá. Vezmu dva body a sestrojím kolem nich *kružnici* procházející tím druhým bodem. Je zřejmé, že takto popsaná konstrukce dá vždy hned dvě řešení, tj. rovnostranný trojúhelník v Ł existuje.

**8. úloha**
Věta *„Ke každému trojúhelníku existuje kružnice jemu opsaná."* je ekvivalentní s 5. Eukleidovým postulátem. Najděte tedy v Ł *trojúhelník*, jemuž se nedá opsat *kružnice.*

Stačí vzít tři body ležící např. na přímce $y = x$. Tyto body neleží na *přímce*, takže tvoří *trojúhelník*, evidentně se mu ale nedá opsat kružnice.

**9. úloha**
Dokažte, že neexistuje *čtverec* (tj. množina bodů ohraničená čtyřmi na sebe kolmými *úsečkami*). Sestrojte *kosočtverec*, tj. množinu bodů ohraničenou čtyřmi různými, stejně *dlouhými úsečkami.*

Předpokládejme, že čtverec existuje. Mohu ho tedy shodnostmi zobrazit tak, aby jedna strana ležela na ose $y$, protější stranu pojmenujme $k$. Pak ale zbývající dvě strany musí být řešením eukleidovské úlohy nalezení kružnice o středu v počátku, která protíná $k$ pod pravým úhlem, tato úloha má ale jednoznačné řešení, což je hledaný spor.