5-та серија

Тема: Комбинаторика (makedonské zadání)

Термин за испраќање: 22. 2. 1999

1-ва задача (3)

На колку начини може да се разместат на шах табела:

(1) два топа
(2) топ и крал
(3) тва топа и крал

така да никои две фигури взаемно не се напаѓаат?

2-ра задача (3)

На колку начини може со три бои да се обојат страните на една коцка така да две страни бидат обоени со иста боја? Боења кои се разликуваат само како резултат на ротација на коцката ги сметаме за исти.

3-та задача (3)

Во генерал штабот имало 6 генерали, 8 пуковници и 10 мајори. На колку начини можеме со нив да составиме осумчлена контролна комисија? (Во рамките на армијата станува збор за важна функција; името не игра улога.)

4-та задача (5)

Зборот DVACETIKORUNY е интересен поради тоа дека сите самогласки се во абецеден ред. Колку има такви подредувања (т.е. пермутации) на буквите така да

(1) абецедниот ред на самогласките не е зачуван?
(2) буквите U и V се пред C, D, E?
(3) содржат најмногу две самогласки непосредно една до друга?

5-та задача (5)

Колку различни собироци ќе добиеме со дополнување на плус или минус меѓу броевите $1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n$ (и пред единицата)?

6-та задача (5)

Октопод со три краци (едниот од нив е во гипс) се качува по скала. На секој чекор преместува еден од здравите краци едно скалило погоре, при што досегот на краците е остро помал отколку трипати одалечеността меѓу скалилата. На колку различни начини може да се искачи по скала со n скалила?

7-ма задача (5)

Во кристална кугла сме виделе дека на 99-та меѓународна математичка олимпијада од деведесет и девет учесници, за прв пат ќе учествува и еден марсовец. Не знаеме како ќе се пласира, но знаеме дека пред него ќе бидат рангирани 49 момчиња (никој од учесниците нема да има ист број на поени). На колку начини може да заврши таква меѓународна математичка олимпијада? Не правиме разлика меѓу момчиња и девојки.

8-ма задача (5)

Под распад на природен број подразбираме изразување на тој број како збир од неколку природни броја, при што не ни́ интересира нивниот редослед. Докажете дека, бројот на распади на бројот n на различно големи броеви е ист како, бројот на распади на бројот n на непарни броеви. (На пример, за $n = 3$ постојат два распади на различни броеви (3 и $2 + 1$) и два распади на непарни броеви (3 и $1 + 1 + 1$).)

5. sēria

Thema: Combīnātōria (latinské zadání)

Diēs trāditiōnis: 22. 2. 1999

Quaestiō 1. (3)

Quotīs mōdīs in scācāriō dislocāre potestis:

(1) duās turrēs
(2) turrem et rēgem
(3) duās turrēs et rēgem

Nūllus scācus alium non potest periculum obicere.

Quaestiō 2. (3)

Quotīs mōdīs lātōs cubī cum tribus coloribus colorāre possumus (necessārius est quocumque colore duōs latōs colorāre). Colorātiō, qua rotātiōnē cubī ex colorātiōnē aliā formāta erat, non est varia.

Quaestiō 3. (3)

6 universae mīlitiae magistrī, 8 praefectī legiōnis, 10 praefectī superiorēs in praetoriō erant. Quotīs mōdīs ex iīs octōmembre consīlium cōnstituere possumus? (Dīgnitās necessāria est, nomen grave non est.)

QUAESTIŌ 4. (5)

In verbō DVACETIKORUNY omnēs vōcālēs in litterās digestae sunt. Quotās constitūtiōnēs litterārum existunt cum:

(1) constitūtiō alphabetica vocālium non tenētur,
(2) litterae U et V ante litterās C, D, E sunt,
(3) constitūtiōnēs maximē duās vōcālēs statim apud sē continent.

QUAESTIŌ 5. (5)

Inter numerōs $1 \quad 2 \quad 3 \ \ldots \quad n$ (etiam ante 1) notulās $+$ aut $-$ addicimus. Quotās vāriās summās accipimus?

QUAESTIŌ 6. (5)

Octopus cum tribus tentāculīs (ūnus ex iīs in gypsō est) positīs scālīs ascendit. In omnē passū 1 ex validīs tentāculīs ūnō grādū altius trānsmovēt. Expānsiō tentāculōrum acriter minor quam triplum distantiae inter gradūs est. Quotīs vāriīs mōdīs positīs scālīs (quae n gradūs habet) octopus ascendere potest?

QUAESTIŌ 7. (5)

In nonāgēsimīs nonīs interanationālibus mathematicīs Olympiīs (IMO) inter nonāgesimōs nonōs participēs prīmum ūnus civis ex Marte erit. Non scimus, quotum locum is īnsīdet, sed scimus exactē 49 puerī ante eum erunt. (Nūllus particeps aequālem sēriem ut alius particeps habēbit.) Quot is mōdīs 99. IMO ēvēnīre potest? (Puerōs et puellās non distinguimus.)

QUAESTIŌ 8. (5)

Dissolūtiō numerī naturālis significātiō istīus numerī summā aliquot numerōrum naturālium est. (Sēriēs grāvis non est.) Numerus dissolūtiōnum numerī n in vāriōs numerōs aequalis ut numerus dissolūtiōnum numerī n in impārēs numerōs est. Demonstrāte! (Ad exemplum: prō $n = 3$ duās dissolūtiōnēs in vāriōs numērōs (3 et $2 + 1$) habēmus et duās dissolītiōnēs in impārēs numerōs (3 et $1 + 1 + 1$) habēmus).

5. série

Téma: Kombinatorika

Termín odeslání: 22. února 1999

1. úloha (3 body)

Kolika způsoby můžete na šachovnici rozmístit

(1) dvě věže
(2) věž a krále
(3) dvě věže a krále

tak, aby se žádné dvě figurky neohrožovaly?

2. úloha (3 body)

Kolika způsoby můžeme obarvit stěny krychle třemi barvami tak, aby každou barvou byly obarveny dvě stěny? Obarvení, která se liší pouze natočením krychle, považujeme za stejná.

3. úloha (3 body)

Na velitelském štábu je 6 generálů, 8 plukovníků a 10 majorů. Kolika způsoby se z nich může sestavit osmičlenná prověrková komise? (V armádě je důležitá hodnost, na jméně vůbec nezáleží.)

4. úloha (5 bodů)

Slovo DVACETIKORUNY je zajímavé tím, že obsahuje všechny samohlásky v abecedním pořadí. Kolik je všech uspořádání (tj. permutací) písmen takových, že

(1) abecední pořadí samohlásek není dodrženo?
(2) písmena U i V předcházejí C, D, E?
(3) obsahují nejvýše dvě samohlásky bezprostředně za sebou?

5. úloha (5 bodů)

Mezi čísla $1 \quad 2 \quad 3 \ \ldots \quad n$ doplníme znaménka plus nebo mínus (i před jedničku). Kolik různých součtů dostaneme?

6. úloha (5 bodů)

Chobotnička se třemi chapadly (jedno z nich má v sádře) leze na žebřík. V každém kroku přesune jedno ze zdravých chapadel o příčku výše, přičemž rozpětí chapadel je ostře menší než trojnásobek vzdálenosti mezi příčkami. Kolika různými způsoby může vylézt na žebřík, který má n příček?

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Z křišťálové koule jsme vyčetli, že 99. mezinárodní matematické olympiády se z devadesáti devíti účastníků poprvé zúčastní jeden marťan. Kolikátý skončí nevíme, ale víme, že před ním se umístí přesně 49 chlapců (žádní dva účastníci neskončí se stejným počtem bodů). Kolika způsoby mohla taková MMO dopadnout? Chlapce, stejně jako děvčata, nerozlišujeme.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Rozkladem přirozeného čísla rozumíme vyjádření tohoto čísla jako součtu několika přirozených čísel, přičemž nás nezajímá jejich pořadí. Dokažte, že počet rozkladů čísla n na různě velká čísla se rovná počtu rozkladů čísla n na lichá čísla. (Například pro $n = 3$ máme dva rozklady na různá čísla (3 a $2 + 1$) a dva rozklady na lichá čísla (3 a $1 + 1 + 1$).)

Řešení 5. série

1. úloha

Kolika způsoby můžete na šachovnici rozmístit

(1) dvě věže
(2) věž a krále
(3) dvě věže a krále

tak, aby se žádné dvě figurky neohrožovaly?

V našem řešení budeme předpokládat (jak je ostatně v šachách zvykem), že šachovnice je orientovaná a její políčka jsou označená po řadě symboly a1, a2, ..., h7, h8. Budeme proto považovat postavení figurky v rohu a1 za odlišné od postavení té samé figurky v rohu h8. Samotné věže od sebe odlišovat nebudeme, to znamená, že v částech (1) a (3) naší úlohy budeme postavení první věže na políčku a1 a druhé na políčku b2 brát jako tu samou pozici, jako když obě věže prohodíme. Po těchto důležitých dohodách přistoupíme k řešení naší úlohy.

(1) První věž můžeme položit na šachovnici na libovolné políčko — pro jeho výběr máme $8.8 = 64$ možností. Pro umístění druhé věže nám zbývá již jen $7.7 = 49$ možností (jeden sloupec a jeden řádek máme zakázaný, neboť by se věže vzájemně ohrožovaly). Dohromady tedy máme 64.49 možností pro umístění obou věží. Jelikož však věže od sebe nerozlišujeme, musíme ještě toto číslo vydělit dvěma, jinak bychom počítali každý způsob dvakrát. Dvě věže lze proto umístit na šachovnici celkem $\frac{64.49}{2} = 1568$ způsoby.

(2) Pokud věž postavíme do jednoho ze čtyř rohů, zbývá nám pro umístění krále 48 možností. Pokud věž dáme ke straně (ale ne do rohu — 24 možností), zůstane pro položení krále 47 políček a pokud dáme věž na políčko nesousedící s okrajem šachovnice (36 možností), zbývá

pro krále 45 políček. Celkem tedy pro umístění věže a krále, aby se neohrožovaly, máme $4.48 + 24.47 + 36.45 = 2940$ způsobů.
(3) Způsobem analogickým jako v částech (1) a (2) (nejprve umístíš krále do rohu, pak ke straně a nakonec dovnitř šachovnice a sleduješ, kolik políček Ti zbývá pro první, respektive druhou věž) zjistíš, že počet způsobů v tomto případě je 49464.

Poznámky opravovatele: Úloha byla lehká, takže s ní nebyly problémy, pouze si někteří řešitelé neuvědomili, že věže jsou zaměnitelné, takže pokud bez předchozího upozornění počítali s tím, že mají dvě různé věže, přišli o bod. Všichni řešili různě složitým rozebíráním možností, jediné odlišné řešení měl Zdeněk Dvořák ($+i$) — vycházel nejdříve ze vzájemné polohy figur a až potom uvažoval jejich rozmístění na šachovnici, čímž mu odpadla složitá diskuse — např. u bodu (3): počet poloh, kde se figury neohrožují v řádcích ani sloupcích, je $8^2.7^2.6^2/2$, od toho odečtu polohy, kde král šikmo ohrožuje věž $(4.7^2.6^2)$ a přičtu to, co jsem počítala dvakrát, tj. když král ohrožuje obě věže (2.6^2).

2. úloha
Kolika způsoby můžeme obarvit stěny krychle třemi barvami tak, aby každou barvou byly obarveny dvě stěny? Obarvení, která se liší pouze natočením krychle, považujeme za stejná.

Nechť použité barvy jsou červená, zelená a žlutá. Stěny téže barvy mohou být buď naproti sobě, nebo sousedit hranou. Pokud jsou zelené stěny naproti sobě a červené stěny naproti sobě, jistě budou i žluté stěny naproti sobě — jedno z možných obarvení. Další možnost je, že žluté stěny budou naproti sobě a zelené a červené budou vedle sebe — to lze udělat právě jedním způsobem. Budeme-li chtít, aby naproti sobě byly zelené, resp. červené stěny, dostaneme další dva způsoby. Poslední možnost je, že stěny stejné barvy budou vždy sousedit hranou. Taková obarvení existují dvě — natočme si krychli tak, aby přední a horní stěna byly zelené a pravá stěna byla červená (rozmyslete si, že takové natočení existuje a to právě jedno), pak druhá červená stěna může být buď ta zadní, nebo ta spodní. Celkem existuje šest různých obarvení.

Poznámky opravovatele: Tato úloha se hodnotila dosti nepříjemně, neboť bylo těžké rozlišit, co je jasné (případně vidět z obrázku) a co ne. Takže jsem třemi body hodnotil všechna správná řešení až na ta, která byla příliš stručná. Několik řešitelů si špatně přeložilo zadání. Nejvíce se mi líbilo řešení založené na tzv. Burnsideovu lemmatu z teorie grup (i když to byl možná kanón na vrabce), a tak jsem za něj udělil $3 + i$.

3. úloha
Na velitelském štábu je 6 generálů, 8 plukovníků a 10 majorů. Kolika způsoby se z nich může sestavit osmičlenná prověrková komise? (V armádě je důležitá hodnost, na jméně vůbec nezáleží.)

Pokud bychom měli ve štábu neomezeně všech hodností, jedná se vlastně o úlohu najít počet všech osmiprvkových kombinací s opakováním ze tří druhů. To znamená, že výsledkem by bylo kombinační číslo $\binom{8+3-1}{8} = \binom{10}{8} = 45$ (pokud tento vzorec neznáš, zkus si jej dokázat!). Bohužel (vlastně bohudík) těch vojáků neomezeně mnoho není, proto od našeho výsledku musíme odečíst počet všech kombinací, které obsahují více než 6 generálů. Takové zakázané kombinace jsou tři (první z nich je kombinace tvořená osmi generály, zbývající dvě obsahují generálů sedm a osmým členem je buď plukovník, nebo major). Celkem lze tedy prověrkovou komisi sestavit $45 - 3 = 42$ způsoby.

Poznámky opravovatele: Tuto úlohu vyřešila většina řešitelů správně. Těm, kteří řešili úlohu jinou (např. kvůli opomenutí poznámky v závorce), byl přidělen jeden bod. Imaginární body jsem šetřila pro ostatní opravovatele.

4. úloha

Slovo DVACETIKORUNY je zajímavé tím, že obsahuje všechny samohlásky v abecedním pořadí. Kolik je všech uspořádání (tj. permutací) písmen takových, že

(1) abecední pořadí samohlásek není dodrženo?
(2) písmena U i V předcházejí C, D, E?
(3) obsahují nejvýše dvě samohlásky bezprostředně za sebou?

(1) Počet permutací, v nichž je porušeno abecední pořadí samohlásek, získáme jako rozdíl počtu všech permutací a permutací, v nichž je abecední pořadí zachováno. Všech permutací je 13! (permutace 13 různých písmen). Permutací zachovávající abecední pořadí je $\binom{13}{6}.7!$, neboť ke každému umístění 6 samohlásek v jednoznačném pořadí (kombinace 6 třídy z 13 prvků) lze doplnit 7 souhlásek v libovolném pořadí (permutace 7 prvků). Všech permutací, v nichž abecední pořadí samohlásek není dodrženo, je tedy $13! - \binom{13}{6}.7! = 6\,218\,372\,160$.

(2) Pět pozic pro písmena U, V, C, D, E lze z 13 míst vybrat $\binom{13}{5}$ způsoby. Na prvních dvou místech musí být U, V, což lze zařídit 2! způsoby, na dalších třech musí být C, D, E v libovolném pořadí, což přináší 3! možností. Ke každému umístění U, V, C, D, E lze v libovolném pořadí doplnit zbylých 8 písmen (permutace 8 prvků). Všech permutací, v nichž U, V předcházejí C, D, E je tedy $2!.3!.\binom{13}{5}.8! = \frac{13!}{10} = 622\,702\,080$.

(3) Odhlédněme nejprve od jednotlivých písmen a rozlišujme jenom souhlásky (označme si je 0) a samohlásky (1). Nyní budeme chtít zjistit, kolik je třináctiprvkových posloupností obsahujících šest jedniček a sedm nul takových, že se v nich vyskytují nejvýše dvě jedničky bezprostředně za sebou. Z 6 jedniček vytvoříme bloky obsahující nejvýše dvě jedničky. To lze čtyřmi způsoby:

(1) 6 samostatných jedniček
(2) 1 dvojice a 4 samostatné jedničky
(3) 2 dvojice a 2 samostatné jedničky
(4) 3 dvojice jedniček

Jednotlivé bloky musí být odděleny nulou, což lze zabezpečit následovně. Do řady sedmi nul (případně na její začátek či konec) budeme vkládat bloky jedniček tak, že na každém z vyznačených míst bude nejvýše jeden.

$$\times\ 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0\ \times$$

Z osmi míst nyní podle varianty (a) – (d) vybereme 6, 5, 4, resp. 3 místa, kde budou bloky jedniček. Protože blok dvou jedniček a samostatnou jedničku je třeba rozlišit, musíme vzít v úvahu různá uspořádání bloků. Počet různých uspořádání nám udává počet permutací 6, 5, 4, resp. 3 prvků, přičemž bereme permutace s opakováním, neboť 2 dvojice či 2 samostatné jedničky považujeme za zaměnitelné. Máme tedy $\binom{8}{6} \cdot \frac{6!}{6!} + \binom{8}{5} \cdot \frac{5!}{1!.4!} + \binom{8}{4} \cdot \frac{4!}{2!.2!} + \binom{8}{3} \cdot \frac{3!}{3!} = 784$ různých posloupností nul a jedniček, které splňují podmínku zformulovanou v úvodu.
Když nyní navíc rozlišíme jednotlivé samohlásky a souhlásky, zjistíme, že všech permutací, v nichž jsou nejvýše dvě samohlásky bezprostředně za sebou je $6!.7!.784 = 2\,844\,979\,200$.

Poznámky opravovatele: Dva řešitele napadlo, zda se nemají počítat permutace splňující všechny tři podmínky zároveň, ale jen jeden z nich měl odvahu se do tohoto výpočtu pustit. Ostatní řešitelé správně pochopili, že úloha má tři části. S překladem první části měli řešitelé velké potíže, víc než polovina spočítala něco jiného, než měli (nejčastěji všechny permutace, nebo permutace, v nichž je abecední pořadí samohlásek zachováno). V druhé části bylo nejméně špatných řešení. Některá však obsahovala výsledek ve tvaru ošklivé sumy, nebo i horším a za to jsem strhávala imaginární body. Třetí část byla zřejmě nejnáročnější. Několik řešitelů si úkol zjednodušilo a počítali permutace, v nichž se nevyskytuje víc než jedna dvojice samohlásek za sebou. Většina správných řešení postupovala podobně jako autorské řešení, část zvolila postup, při kterém od počtu všech permutací odečítali nevyhovující. Zcela originálně úlohu vyřešil Zdeněk Dvořák.

5. úloha

Mezi čísla $1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n$ doplníme znaménka plus nebo mínus (i před jedničku). Kolik různých součtů dostaneme?

Největší číslo zřejmě dostaneme tak, že dáme všude plusy, a bude to číslo $1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Podobně nejmenší číslo, které můžeme získat, je $-\frac{1}{2}n(n+1)$. Když změníme znaménko na právě jednom místě — před číslem k — změní se výsledek o $2k$, což je sudé číslo. Odtud plyne, že všechna čísla, která můžeme dostat daným způsobem, dávají stejný zbytek po dělení dvěma a protože známe největší a nejmenší z nich, může jich být nejvýše $\frac{1}{2}n(n+1)+1$.

Nyní je ještě potřeba dokázat, že všechna čísla z tohoto intervalu a se stejnou paritou jako $\frac{1}{2}n(n+1)$ můžeme vyjádřit způsobem ze zadání úlohy. To provedeme indukcí: pro $n = 1, 2$ je tak vyjádřit můžeme a pokud je tímto způsobem můžeme vyjádřit pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ (kde $n \geq 3$), pak i pro $k = n$ tak můžeme učinit. V případě, že před n dáme znaménko plus (a před ostatní čísla všechny možné kombinace znamének), totiž dostaneme všechna čísla se správnou paritou z intervalu $\langle n - \frac{1}{2}(n-1)n, n + \frac{1}{2}(n-1)n \rangle$ (to plyne z indukčního předpokladu) a v případě, že před n dáme znaménko mínus, dostaneme všechna čísla z intervalu $\langle -n - \frac{1}{2}(n-1)n, -n + \frac{1}{2}(n-1)n \rangle$. Protože pro $n \geq 3$ těmito intervaly pokryjeme všechna čísla z intervalu $\langle -\frac{1}{2}n(n+1), \frac{1}{2}n(n+1) \rangle$, je indukční krok dokázán a čísel je tedy přesně $\frac{1}{2}n(n+1)+1$.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů našla správný výsledek této úlohy. Problémy však byly s jeho přesným zdůvodněním.

Nejčastější chybou bylo, že řešitel ukázal, že všechny možné součty mají stejnou paritu jako maximální možný součet $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ a pak již bez důkazu tvrdil, že skutečně všechna čísla se stejnou paritou jako $\frac{n(n+1)}{2}$ lze získat jako výsledek, který vznikne doplněním znamének mezi čísla $1,2,3,\ldots,n$. To však není úplně zřejmé, jak zkusím ukázat na následujícím příkladě.

Kdybychom měli obdobnou úlohu s posloupností $3,4,5,\ldots,n$, opět stejným postupem ukážeš, že všechny možné součty mají stejnou paritu jako maximální možný součet $3+4+5+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}-3$, ale již neplatí, že skutečně všechna čísla se stejnou paritou jako $\frac{n(n+1)}{2}-3$ lze získat jako výsledek, který vznikne doplněním znamének mezi čísla $3,4,5,\ldots,n$. Například pro $n=5$ nikdy nezískáš doplněním znamének mezi čísla $3,4,5$ číslo 10, ačkoliv má stejnou paritu jako maximální součet $12=3+4+5$.

Předcházejícím příkladem jsem se snažil ukázat, že v řešení je třeba zdůvodnit, že lze získat skutečně všechna čísla z intervalu $\langle -\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2}\rangle$ se stejnou paritou jakou má číslo $\frac{n(n+1)}{2}$. Řešitelé, kteří tento krok odbývali, přicházeli o body.

6. úloha

Chobotnička se třemi chapadly (jedno z nich má v sádře) leze na žebřík. V každém kroku přesune jedno ze zdravých chapadel o příčku výše, přičemž rozpětí chapadel je ostře menší než trojnásobek vzdálenosti mezi příčkami. Kolika různými způsoby může vylézt na žebřík, který má n příček?

Označme a_n počet způsobů, kterými se chobotnička může dostat do stavu, kdy má obě zdravá chapadla na n-té příčce a b_n počet způsobů, kterými se může dostat do situace, že má jedno chapadlo na $(n+1)$-ní a jedno na $(n-1)$-ní příčce. Jistě platí $a_{n+1}=a_n+b_n$ a $b_{n+1}=a_n+b_n$. Protože $a_1=b_1=1$, je $a_n=b_n=2^{n-1}$. Tak by to bylo v případě, kdyby chapadla byla stejná.

V případě, že chapadla jsou rozlišitelná, bude řešení vypadat podobně. Pro stejné označení jako výše bude platit $a_{n+1}=2a_n+b_n$ (dvojka před a_n znamená, že může nejprve posunout chapadlo číslo jedna a pak chapadlo číslo dvě, nebo naopak). Pro druhou posloupnost bude platit $b_{n+1}=2a_n+b_n$. Protože $b_1=a_1=2$, tak $a_n=b_n=3a_{n-1}$ a tedy $a_n=2.3^{n-1}$.

Poznámky opravovatele: Úloha byla zadána nejednoznačně (hlavní nejednoznačnost spočívala v rozlišitelnosti nebo nerozlišitelnosti chapadel) takže různí řešitelé řešili různé úlohy, někteří jich vyřešili několik $(+i)$. Zdeněk Dvořák si všiml, že v zadání nebylo uvedeno, že rozpětí chapadel je větší než dvojnásobek vzdálenosti mezi příčkami a zabýval se i případem, kdy je menší. Špatně přeložili zadání asi tři řešitelé, někteří další se domnívali, že chobotnice nemá chapadla, ale nohy.

7. úloha (Podle Dity Strachotové)

Z křišťálové koule jsme vyčetli, že 99. mezinárodní matematické olympiády se z devadesáti devíti účastníků poprvé zúčastní jeden marťan. Kolikátý skončí nevíme, ale víme, že před ním se umístí přesně 49 chlapců (žádní dva účastníci neskončí se stejným počtem bodů). Kolika způsoby mohla taková MMO dopadnout? Chlapce, stejně jako děvčata, nerozlišujeme.

Zjistíme, kolika způsoby lze umísit k dívek. Protože pořadí dívek nijak neovlivní počet chlapců před marťanem, můžeme mezi dívky umístit chlapce a marťana právě jedním způsobem (marťan je na padesátám zbylém místě). Mezi 99 účastníků lze k dívek umístit $\binom{99}{k}$ způsoby. Protože dívek je nejvýše 49, dostáváme celkem

$$\sum_{k=0}^{49} \binom{99}{k}$$

různých pořadí. Nyní si stačí povšimnout, že výše uvedená suma sečte přesně polovinu 99-tého řádku Pascalova trojúhelníku (platí totiž $\binom{99}{k} = \binom{99}{99-k}$). Dohromady tedy dostaneme 2^{98} možností.

Poznámky opravovatele: Nejčastější chybou bylo, že jste zapomínali na to, že nerozlišujeme chapce ani děvčata (jednalo se možná o špatné překlady). Někteří si mysleli že nerozlišujeme chlapce od děvčat (pak ale úloha nedává valného smyslu). Řešení, kde byl jako výsledek uveden neprůhledný výraz jako $\sum_{k=0}^{49} \binom{49+k}{49} 2^{49-k}$, jsem odměňoval dvěma body, neboť vyčíslit tento výraz bylo obtížné (vycházelo z toho mé původní řešení). V jednom řešení mě zaujala věta: Dievčatá sú „nuly“, chlapci „jedničky“.

8. úloha

Rozkladem přirozeného čísla rozumíme vyjádření tohoto čísla jako součtu několika přirozených čísel, přičemž nás nezajímá jejich pořadí. Dokažte, že počet rozkladů čísla n na různě velká čísla se rovná počtu rozkladů čísla n na lichá čísla. (Například pro $n = 3$ máme dva rozklady na různá čísla (3 a $2 + 1$) a dva rozklady na lichá čísla (3 a $1 + 1 + 1$).)

Na začátek malé varování: řešení je poměrně jednoduché, ale zapsat jej pořádně je dost zdlouhavé. Nejprve si uveďme obecný postup, jak dokázat, že nějaké dvě množiny (označme je A a B) mají stejný počet prvků. Stačí najít zobrazení $f : A \to B$, které je bijektivní, tj. prosté a na. Uvědomte si, že to přesně odpovídá představě, že postupně bereme jeden prvek z A a jeden z B, a zkoumáme, zda obě množiny vyčerpáme najednou. To, že je f prosté a na můžeme ověřovat přímo z definice, zde bude ale snazší najít zobrazení $g : B \to A$ takové, že

$$(\forall a \in A) \quad g(f(a)) = a \qquad \text{(a tedy } f \text{ je prostá)}$$
$$(\forall b \in B) \quad f(g(b)) = b \qquad \text{(a tedy } f \text{ je na)}$$

Vezměme nyní pevné n a aplikujme tento postup, přičemž A bude množina všech rozkladů čísla n na různé sčítance a B množina všech rozkladů čísla n na liché sčítance. Nejprve se však dohodněme, že zápisem $k \times l$ budeme rozumět výraz $\underbrace{l + l + \cdots + l}_{k\text{-krát}}$ (ne tedy výsledný součet, ale tento rozpis), že všechna uvažovaná čísla jsou celá a všimněme si následujících dvou faktů (jejich důkaz by nikomu neměl působit větší obtíže).

Pozorování 1. *Každé přirozené číslo n lze psát právě jedním způsobem ve tvaru $2^k l$, kde k je nezáporné číslo a l liché číslo.*

Pozorování 2. *Každé kladné číslo p lze psát právě jedním způsobem ve tvaru $p = 2^{q_1} + 2^{q_2} + \cdots + 2^{q_z}$, kde z je kladné a $q_1, q_2, \ldots, q_z$ jsou po dvou různá nezáporná čísla. (Nejde o nic jiného, než o zápis ve dvojkové soustavě.)*

Nyní zkonstruujme zobrazení f a g. Mějme nějaký prvek a množiny A, tj. rozklad $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$, kde t je kladné a n_i jsou po dvou různá kladná čísla. Pišme každé n_i ve tvaru $n_i = 2^{k_i} l_i$ a označme jako $f(a)$ rozklad

$$n = 2^{k_1} \times l_1 + \cdots + 2^{k_t} \times l_t.$$

Je třeba si uvědomit, že $f(a)$ je prvek B, tj. že součet napravo je opravdu n a že je to rozklad na lichá čísla, tj. že všechna l_i jsou lichá.

Mějme nyní nějaký prvek b množiny B, tj. rozklad (R) $n = p_1 \times L_1 + \cdots + p_s \times L_s$, kde s i všechna p_i jsou kladná čísla, L_i jsou po dvou různá lichá čísla. (Uvědomte si, že každý prvek množiny B opravdu lze psát v tomto tvaru!) Vyjádřeme každé p_i ve tvaru z Pozorování 2, tj. $p_i = 2^{q_{i,1}} + \cdots + 2^{q_{i,z_i}}$. Jako $g(b)$ označme následující rozklad (S):

$$n = 2^{q_{1,1}} L_1 + \cdots + 2^{q_{1,z_1}} L_1 + \cdots + 2^{q_{s,1}} L_s + \cdots + 2^{q_{s,z_s}} L_s.$$

Je třeba opět ověřit, že $g(b) \in A$, tj. že součet napravo je roven n (lehké) a že je to rozklad na různá čísla (zde se využije jednoznačnost v Pozorování 1 a různost q_i v Pozorování 2).

Nyní ověřme, že pro $a \in A$ je $g(f(a)) = a$. Užijme označení jako výše a vyjádřeme $f(a)$ ve tvaru (R). Označme $I_1 = \{i : l_i = L_1\}$. Zjevně p_1 je součtem čísel 2^{k_i} pro $i \in I_1$. Vzhledem k tomu, že v A jsou rozklady na různá čísla, jsou všechna taková 2^{k_i} navzájem různá čísla, a máme tedy p_1 vyjádřeno ve tvaru z Pozorování 2. Vzhledem k jednoznačnosti takového vyjádření $g(f(a))$ nutně obsahuje členy $2^{k_i} l_i = n_i$ pro všechna $i \in I_1$. Vzhledem k tomu, že analogické úvahy lze provést pro $L_2, \ldots, L_s$, a že každé $i \in \{1, \ldots, t\}$ je v právě jednom z $I_1, \ldots, I_s$, zjišťujeme, že $g(f(a))$ je přesně a.

Nyní zbývá dokázat, že pro $b \in B$ je $f(g(b)) = b$. Opět užijeme označení jako výše. Z rozpisu (S) a z definice čísel $q_{i,j}$ je vidět, že dokazovaná rovnost platí. Stačí nahlédnout, že $k \times l + K \times l$ je $(k + K) \times l$, což je očividné, když si člověk vzpomene, co značí symbol $k \times l$. Nu, a tím je konečně důkaz hotov. Uff.

Poznámky opravovatele: Tři řešení byla vpodstatě podobná autorskému: řešitelé zkonstruovali vzájemně jednoznačné zobrazení mezi dvěma množinami rozkladů. Dva řešitelé z Karlových Varů použili metodu vytvořujících funkcí (viz Školu mladých matematiků 29, F.Zítek: Vytvořující funkce), čímž úlohu vyřešili velice elegantně. Jen přehnané odkazovaní se na literaturu je připravilo o $+2i$.