Povídání k první sérii

První série je věnována posloupnostem. Posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ rozumíme[1] „řadu čísel“, tj. $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Jinými slovy, pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ máme nějaké číslo a_n. Obvykle se zabýváme posloupnostmi reálných čísel (tj. každé a_n je reálné číslo), můžeme však zkoumat i posloupnosti čísel celých, posloupnosti množin, vektorů, ... Předcházející řádky hovořily o nekonečných posloupnostech, stejně tak se můžeme zabývat i posloupnostmi konečnými, tj. $a_0, a_1, \ldots, a_k$, které zkráceně zapisujeme jako $\{a_n\}_{n=0}^{k}$. Pokud nemůže dojít k nedorozumění, vynecháváme při zápisu posloupností meze, tj. píšeme zkráceně jen $\{a_n\}$.

Posloupnosti můžeme zadávat různě. Můžeme přímo vyjádřit obecný člen posloupnosti, tj. psát například $a_n = 2^n$ pro všechna n. Jiný způsob zadání téže posloupnosti je tzv. rekurentní zápis: řekneme například, že $a_0 = 1$ a pro všechna n je $a_{n+1} = 2a_n$. Toto je rekurentní předpis využívající jen jeden předchozí člen, komplikovanější vzorce mohou využívat dva, tři, ..., nebo dokonce všechny předchozí členy. S rekurentním zápisem se setkáš v úlohách 4, 6 a 7. Poznamenejme ještě, že posloupnost obecně nemusí jít vyjádřit žádným takovým způsobem. Máme-li tedy něco dokázat o obecné posloupnosti celých čísel, můžeme využívat jen toho, že každý její člen je celé číslo, mezi těmito čísly nemusí být žádný vztah, nemusí vyhovovat žádnému vzorci.

Posloupnost $\{a_n\}$ je *periodická*, pokud existuje takové k, že pro každé n je $a_{n+k} = a_n$. Pokud tento vztah platí až pro $n \geq n_0$, můžeme říci, že $\{a_n\}$ je periodická s předperiodou délky n_0. Tento pojem není příliš standardní, setkáš se s ním však v sedmé úloze, proto jej zde uvádíme.

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *omezená*, pokud existuje konstanta M taková, že pro všechna n je $-M \leq a_n \leq M$. Posloupnost dále nazveme monotónní, pokud je klesající, rostoucí, neklesající nebo nerostoucí. Tyto pojmy jsou dosti názorné:

$\{a_n\}$ je rostoucí, pokud pro $i < j$ je $a_i < a_j$
$\{a_n\}$ je neklesající, pokud pro $i < j$ je $a_i \leq a_j$
$\{a_n\}$ je klesající, pokud pro $i < j$ je $a_i > a_j$
$\{a_n\}$ je nerostoucí, pokud pro $i < j$ je $a_i \geq a_j$

Pojem *podposloupnost* (jiný název pro totéž je *vybraná posloupnost*) je intuitivně jasný: z posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ vybereme jen některé její členy. Formálně to lze vyjádřit následovně: existuje-li rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_m\}_{m=0}^{\infty}$ taková, že pro všechna m platí $b_m = a_{k_m}$, řekneme, že $\{b_m\}$ je podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$. Takto jsme definovali podposloupnost nekonečné posloupnosti, co je to podposloupnost posloupnosti konečné si jistě domyslíš sám.

V poslední úloze první série se setkáš se zápisem typu a^{b^c}. Protože s tímto zápisem bývají občas potíže, upozorňujeme pro jistotu, že tímto zápisem je míněno $a^{(b^c)}$, nikoliv $(a^b)^c$, např. $2^{3^2} = 2^9 = 512$, zatímco $(2^3)^2 = 2^6 = 64$.

[1] Pro matematicky vzdělanější čtenáře podotýkáme, že pojem řada zde chápeme v jeho běžném smyslu, v matematice tento pojem znamená něco jiného.

Ještě jedna rozšiřující poznámka: pátá úloha je speciálním případem Van der Waerdenovy věty — dosti komplikovaného výsledku z oblasti matematiky, která se podle jednoho ze svých zakladatelů nazývá Ramseyova teorie. Nemusíš se lekat, naše úloha je dosti jednoduchá a Van der Waerdenovu větu k jejímu řešení znát nemusíš. Myslím však, že je zajímavá, proto ji zde uvádím:

Věta (Van der Waerden, 1927). *Pro každá přirozená čísla n a k existuje přirozené číslo N takové, že kdykoli obarvíme čísla 1, 2, 3, … , N pomocí k barev, najdeme jednobarevnou aritmetickou posloupnost s n členy (tj. všechny členy této posloupnosti jsou obarveny touž barvou).*

Zvolíme-li $n = 3$ a $k = 2$, dostaneme přesně naši úlohu.

1. série

Téma:	Posloupnosti
Termín odeslání:	12. října 1998

1. ÚLOHA (3 BODY)

Najděte co nejdelší úsek aritmetické posloupnosti přirozených čísel o diferenci 60, který je tvořen jenom prvočísly. (Příkladem takového úseku o třech členech je například 7, 67, 127, neboť rozdíl každých dvou po sobě jdoucích členů je šedesát a uvedená čísla jsou prvočísla. Existuje však i úsek delší. Najdete ho?)

2. ÚLOHA (3 BODY)

(a) Napište číslo 1 jako součet konečně mnoha různých členů z posloupnosti $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$
(b) Pokuste se o totéž pro posloupnost $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \dots$
(c) Nakonec řešte stejný úkol jako v (a) pro posloupnost $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \dots$

3. ÚLOHA (3 BODY)

Existují posloupnosti podmnožin přirozených čísel A_n, $M_n \subseteq \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou A_n i M_n nekonečné, $M_n \subseteq A_n$ a platí $A_{n+1} = A_n \setminus M_n$?

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ vyhovuje rekurentnímu předpisu $a_{n+2} = a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} + \frac{\log(a_{n+1}-1)}{\log(a_n-1)}$ a její první dva členy jsou $a_0 = 1 + \sqrt{3}$, $a_1 = 4$. Nalezněte člen a_{1998}.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že pro každou posloupnost celých čísel $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ existují celá kladná čísla n a k tak, že a_n, a_{n+k} i a_{n+2k} jsou všechna sudá nebo všechna lichá.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ danou rekurentně $a_{n+4} = pa_{n+3} + qa_{n+2} + ra_{n+1} + sa_n$ (p, q, r a s jsou celá čísla, $n \geq 0$), počáteční hodnoty $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. Definujme posloupnost $b_n = a_n \bmod 9$. Pro jaká čísla p, q, r, s je číslo s desetinným zápisem $0,b_1b_2b_3\ldots$ racionální?

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde a_0 je přirozené číslo a a_{n+1} vznikne jako součet druhých mocnin cifer čísla a_n. Ukažte, že posloupnost $\{a_n\}$ je vždy periodická (s případnou předperiodou).

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že v každé posloupnosti délky $m^{2^k}+1$ uspořádaných k-tic existuje podposloupnost délky $m+1$, která je monotónní v každé složce.

Řešení 1. série

1. úloha

Najděte co nejdelší úsek aritmetické posloupnosti přirozených čísel o diferenci 60, který je tvořen jenom prvočísly. (Příkladem takového úseku o třech členech je například 7, 67, 127, neboť rozdíl každých dvou po sobě jdoucích členů je šedesát a uvedená čísla jsou prvočísla. Existuje však i úsek delší. Najdete ho?)

Snadno ověříme, že čísla 11, 71, 131, 191, 251, 311 jsou prvočísla a že tvoří šestičlenný úsek aritmetické posloupnosti o diferenci šedesát. Když si nyní rozmyslíme, že sedmičlenný úsek již existovat nemůže, uvidíme, že předcházející čísla tvoří nejdelší možný úsek požadovaných vlastností. Předpokládejme proto, že máme sedmičlenný úsek aritmetické posloupnosti o diferenci 60, který je tvořen jenom prvočísly a odvodíme spor. Nechť náš úsek začíná číslem A. Pro $A = 7$ není čtvrtý člen posloupnosti prvočíslo, takže $A \neq 7$. Zkoumaná čísla jsou

$$A, \quad A+60 \quad A+2\cdot 60, \quad A+3\cdot 60, \quad A+4\cdot 60, \quad A+5\cdot 60, \quad A+6\cdot 60.$$

Jelikož tato čísla jsou prvočísla, nejsou dělitelná sedmi. Z Dirichletova principu[2] existují mezi těmito čísly aspoň dvě, které dávají při dělení číslem sedm stejný zbytek, nechť to jsou čísla

[2] *Dirichletův princip* je učený název pro celkem jednoduché tvrzení, které lze zformulovat například takto: Máme-li $n+1$ předmětů rozdělit do n přihrádek, pak alespoň v jedné přihrádce musí být nejméně dva předměty. V našem případě máme sedm čísel, které dělíme do šesti skupin podle toho jaký zbytek dávají při dělení číslem sedm.

$A + j \cdot 60$ a $A + k \cdot 60$, kde $j, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\quad j \neq k$. Rozdíl těchto dvou čísel, tj. číslo $(j - k) \cdot 60$, pak musí být dělitelný sedmi, ale to je hledaný spor, neboť ani číslo 60, ani číslo $(j - k)$ není dělitelné sedmi. Proto nejdelší úsek posloupnosti požadovaných vlastností je šestičlenný a jeho příkladem je 11, 71, 131, 191, 251, 311.

2. úloha

(a) Napište číslo 1 jako součet konečně mnoha různých členů z posloupnosti $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$
(b) Pokuste se o totéž pro posloupnost $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \ldots$
(c) Nakonec řešte stejný úkol jako v (a) pro posloupnost $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \ldots$

(a) Hledaný rozklad je nasnadě: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

(b) Příkladem mohou být rozklady $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$, $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{20}$, resp. $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \frac{1}{42}$.

(c) Zde jsou příkladem rozklady
$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{63} + \frac{1}{75} + \frac{1}{105} + \frac{1}{135} + \frac{1}{675}$ a
$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{105} + \frac{1}{945}$.

Samozřejmě, že řešení uvedené v části (c) jsou vlastně i řešeními pro část (a), resp. (b), takže by stačilo uvést jen řešení této části. Na druhou stranu existují v úloze (a), resp. (b), rozklady jedničky mnohem jednodušší a snáze objevitelné než v (c), proto je také uvádíme.

Poznámky opravovatele: Drtivá většina řešitelů vyřešila správně první část úlohy, téměř všem se podařilo najít i součet bez 1/2. Ve třetí části už však byla úspěšnost jen okolo 50%. Několik řešitelů se pokoušelo dokázat neexistenci součtu v části (c). Buď mylně vycházeli z toho, že řada $1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9 + \cdots$ má součet menší než 1 (přitom tato řada roste nade všechny meze), anebo argumentovali tím, že po převedení na společného jmenovatele je ve jmenovateli liché číslo a v čitateli sudé. To však neplatí pro lichý počet sčítanců (v čitateli i jmenovateli jsou čísla lichá). Úloha byla bodována po jednom reálném bodu za každou část.

3. úloha

Existují posloupnosti podmnožin přirozených čísel A_n, $M_n \subseteq \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou A_n i M_n nekonečné, $M_n \subseteq A_n$ a platí $A_{n+1} = A_n \setminus M_n$?

Je to možná překvapivé, ale takové posloupnosti existují — od nekonečné množiny lze odebrat libovolněkrát nekonečné množství prvků a přitom stále můžeme dostat nekonečnou množinu.

Označme p_n n-té prvočíslo a položme $A_1 = \mathbb{N}$, $M_n = \{p_n^k : k \in \mathbb{N}\}$ pro každé n. Zjevně $M_n \cap M_m = \emptyset$ pro $m \neq n$, tudíž pro každé n obsahuje A_n všechny množiny M_m pro $m \geq n$, a tedy naše posloupnosti vyhovují zadání.

Poznámka: v semináři byla úloha zadána špatně (opomenuli jsme požadavek $M_n \subseteq A_n$), čímž se stala triviální.

Poznámky opravovatele: Je třeba si uvědomit, že A_i a M_i jsou **množiny** přirozených čísel a $A_i \setminus M_i$ je jejich rozdíl, tj. $\{a \in A_i : a \notin M_i\}$. Pak již je úloha snadná a nečinila nikomu potíže.

4. úloha

Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ vyhovuje rekurentnímu předpisu $a_{n+2} = a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} + \frac{\log(a_{n+1}-1)}{\log(a_n-1)}$ a její první dva členy jsou $a_0 = 1 + \sqrt{3}$, $a_1 = 4$. Nalezněte člen a_{1998}.

Spočítáme-li si číselně několik prvních členů naší posloupnosti, dostaneme $1 + \sqrt{3}$, 4, 10, 82, ... Z toho můžeme odhadnout, že obecný člen této posloupnosti se dá vyjádřit ve tvaru $a_n = 3^{(2^{n-1})} + 1$. Správnost tohoto předpisu pro a_n snadno ověříme matematickou indukcí. Pro $n = 0, 1$ tvrzení platí. Nyní budeme předpokládat, že naše tvrzení platí pro $n \leq k + 1$ $(k \geq 0)$ a odtud ukážeme, že platí i pro $n = k + 2$. Indukční předpoklad nám dává vztahy $a_k = 3^{(2^{k-1})} + 1$ a $a_{k+1} = 3^{(2^k)} + 1$. Když nyní za a_k a a_{k+1} dosadíme tyto výrazy do původního rekurentního vztahu, ze zadání úlohy, dostaneme hned po drobné úpravě platnost dokazovaného tvrzení pro a_{k+2}, což jsme chtěli. Hledaný člen a_{1998} je proto roven číslu $a_{1998} = 3^{2^{1997}} + 1$.

Poznámky opravovatele: Za správný důkaz jsem bral indukci, v níž se dosazovalo do rekurentního vztahu ze zadání. Elegantní mi připadalo nahradit posloupnost $\{a_n\}$ jinou posloupností (např. $b_n = a_n - 1$), ale až na Katarínu Quittnerovou $(+i)$ to nikdo neprovedl správně.

Několik řešitelů použilo „úpravu“ $3^{2^n} = 3^{2n}$, za což jim byly po právu strženy body.

5. úloha

Dokažte, že pro každou posloupnost celých čísel $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ existují celá kladná čísla n a k tak, že a_n, a_{n+k} i a_{n+2k} jsou všechna sudá nebo všechna lichá.

Předpokládejme, že existuje posloupnost celých čísel, pro kterou neexistují čísla n a k požadovaná v zadání. Pak jistě najdeme m takové, že a_m i a_{m+1} jsou obě sudá nebo obě lichá (jinak by se musela pravidelně střídat sudá a lichá čísla a pro $k = 2$ a libovolné n by čísla a_n, a_{n+k}, a_{n+2k} měla stejnou paritu, což by byl spor s předpokladem). Nechť jsou bez újmy na obecnosti obě lichá, pak nutně a_{m+2} bude sudé. Dále rozlišíme dva případy:

Pokud a_{m+3} je liché, pak a_{m+5} a a_{m+6} musí být sudá (jinak volíme $n = m + 1, k = 2$ resp. $n = m, k = 3$), odtud plyne, že a_{m+4} je liché. Číslo a_{m+7} pak nemůže být sudé (volili bychom $n = m + 5, k = 1$) a nemůže být ani liché (volili bychom $n = m + 1, k = 3$), což je spor.

Pokud a_{m+3} je sudé, musí být a_{m+4} liché. Dále čísla a_{m+7}, a_{m+8} musí být sudá (volili bychom $n = m + 1, k = 3$ resp. $n = m, k = 4$). Odtud plyne, že a_{m+6} musí být liché. Pokud by a_{m+5} bylo liché, byla by tři lichá čísla za sebou, pokud ale bude sudé, volíme $n = m + 3, k = 2$. Také v tomto případě jsme dospěli ke sporu, náš předpoklad tedy není splněn a platí dokazované tvrzení.

Poznámky opravovatele: Většina řešitelů úlohu vyřešila správně, ale bohužel většinou zdlouhavým rozebíráním možností. Z nejčastějších chyb bych rád upozornil na to, že pro obecnou posloupnost nemusí existovat explicitní vzoreček, který by určil a_n v závislosti na n. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost celých čísel, tak jediné, co o ní víš, je to, že každý její člen je celé číslo (tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{Z}$). Žádná souvislost mezi členy posloupnosti být nemusí.

Dále také nemusí platit, že každá posloupnost celých čísel je co se týče parity periodická (např. dvojkový zápis čísla π jako posloupnost nul a jedniček), z čehož několik řešitelů mylně vycházelo.

6. úloha

Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ danou rekurentně $a_{n+4} = pa_{n+3} + qa_{n+2} + ra_{n+1} + sa_n$ (p, q, r a s jsou celá čísla, $n \geq 0$), počáteční hodnoty $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. Definujme posloupnost $b_n = a_n \bmod 9$. Pro jaká čísla p, q, r, s je číslo s desetinným zápisem $0,b_1b_2b_3\ldots$ racionální?

Číslo $0,b_1b_2b_3\ldots$ je racionální právě tehdy, když posloupnost $\{b_i\}_{i=k}^{\infty}$ je periodická (k je délka předperiody).[3] Zkusíme dokázat, že tato posloupnost je periodická pro libovolná $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$.

Člen a_{n+4} lze spočítat pomocí $a_{n+3}, \ldots, a_n$. Totéž platí i pro posloupnost $\{b_n\}$, neboť

$$\begin{aligned} b_{n+4} &= a_{n+4} \bmod 9 = (pa_{n+3} + \cdots + sa_n) \bmod 9 \\ &= \Big(p(a_{n+3} \bmod 9) + \cdots + s(a_n \bmod 9)\Big) \bmod 9 \\ &= (b_{n+3} + \cdots + b_n) \bmod 9. \end{aligned}$$

Existuje nejvýše 9^4 různých čtveřic $(b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, b_{n+3})$ (každý prvek čtveřice je číslo mezi 0 a 8), posloupnost se tedy musí po nejvýše 9^4 členech začít opakovat (Dirichletův princip — viz poznámku k 1. úloze). Tedy jak předperioda tak i perioda posloupnosti $\{b_n\}$ mají délku nejvýše 9^4, to vše pro libovolné $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Proto vychází číslo $0,b_1b_2b_3\ldots$ racionální.

Poznámky opravovatele: Všichni, kteří úlohu úplně vyřešili, použili stejnou myšlenku, jako vzorové řešení, a proto jsem se rozhodl neudělit žádné kladné imaginární body. Za nalezení jen některých čtveřic p, q, r, s (a důkaz, že skutečně jde o řešení úlohy) jsem uděloval 0–2 body podle obecnosti dosaženého výsledku.

7. úloha (podle Kataríny Quittnerové)

Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde a_0 je přirozené číslo a a_{n+1} vznikne jako součet druhých mocnin cifer čísla a_n. Ukažte, že posloupnost $\{a_n\}$ je vždy periodická (s případnou předperiodou).

---

[3] Protože $b_i \neq 9$, nemusíme zvlášť rozebírat periody samých devítek.

Označme k počet cifer čísla a_n. Potom $10^{k-1} \le a_n$ a $a_{n+1} \le 9^2 k$. Pro $k > 3$ určitě platí $k \le 10^{k-3}$, a tedy také $9^2 k < 10^2 k \le 10^{k-1} \le a_n$. Platí tudíž $a_{n+1} \le \max(a_n, 9^2 \cdot 3)$. Odtud plyne, že pro všechna n platí $a_n \le M$, kde $M = \max(a_0, 3^5)$.

Mezi prvními $M + 1$ členy posloupnosti $\{a_n\}$ se tedy určitě nacházejí dvě stejná čísla $a_i = a_j$ pro vhodné $i < j$. Protože a_{n+1} zavisí jen na a_n, je posloupnost $\{a_n\}$ periodická s periodou nejvýše $j - i$.

Poznámky opravovatele: Valná většina rešitelů správně vytušila, že pro a_n větší než nějaká konstanta platí $a_{n+1} < a_n$, a postavila na tom své řešení. Bohužel podstatně méně bylo těch, kterým tato poučka stála za to, aby ji dokázali. Pokud se vám na papíře červená poznámka „Dokaž!!!“, patříte pravděpodobně právě do této skupiny. Zcela chybějící důkaz jsem ohodnotil 1 bodem, za částečný (např. nedokázáné $9^2 k < 10^{k-1}$) očekávejte 2–4 body.

8. úloha

Dokažte, že v každé posloupnosti délky $m^{2^k} + 1$ uspořádaných k-tic existuje podposloupnost délky $m + 1$, která je monotónní v každé složce.

Upozornění: Mluvím-li v následujícím důkazu o čísle, nemám na mysli jen hodnotu tohoto čísla, ale i jeho umístění v posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$

Důkaz provedeme indukcí přes k. Nejprve pro $k = 1$: dokážeme, že z každé posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_{m^2+1}$ můžeme vybrat neklesající nebo nerostoucí posloupnost délky $m + 1$. Položme $b_{1,1} = a_1$, za $b_{1,i+1}$ vezměme první číslo posloupnosti, které je větší nebo rovno $b_{1,i}$ a je v posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_{m^2+1}$ za $b_{1,i}$. Pokud neexistuje žádné takové číslo, položme $b_{2,1}$ rovno prvnímu číslu posloupnosti, které jsme dosud nevybrali. $b_{2,i+1}$ pak bude rovno prvnímu číslu, které je větší nebo rovno než $b_{2,i}$, je za ním a dosud nebylo vybráno. Pokud žádné takové nenajdeme, položíme $b_{3,1}$ rovno prvnímu dosud nevybranému číslu a tímto způsobem pokračujeme, dokud nevybereme všechna čísla. Posloupnost $b_{i,1}, b_{i,2}, \ldots$ označme B_i.

Posloupnosti $B_1, B_2, \ldots$ jsou jistě neklesající. Předpokládejme, že všechny tyto posloupnosti mají délku nejvýše m (pokud má některá z nich větší délku, máme vyhráno), jejich počet je tedy aspoň $m + 1$ (v m posloupnostech délky m by mohlo být nejvýše m^2 čísel, ale my máme $m^2 + 1$ čísel). Nyní vybereme posloupnost $c_1, c_2, \ldots, c_{m+1}$ tak, že c_i je z posloupnosti B_i, a to následujícím způsobem: položme $c_{m+1} = b_{m+1,1}$. Za c_{i-1} vezmeme první[4] číslo, které je v posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_{m^2+1}$ před c_i a které je z posloupnosti B_{i-1}. Toto číslo jistě existuje (první číslo posloupnosti B_{i-1} musí být před prvním číslem posloupnosti B_i — tak jsme je vybírali) a jistě je větší než c_i (kdyby bylo c_{i-1} menší nebo rovno c_i, vybrali bychom na začátku c_i jako následníka c_{i-1} do posloupnosti B_{i-1}). Získali jsme tedy posloupnost $c_1, c_2, \ldots, c_{m+1}$, která je klesající a má $m + 1$ členů. Tím je tvrzení pro $k = 1$ dokázáno.

Nyní dokážeme indukční krok, který je v tomto případě snazší než krok první: nechť tvrzení platí pro posloupnosti uspořádaných k-tic, chceme dokázat, že platí i pro $(k+1)$-tice.

[4] to, které je v posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ nejblíže k c_i

Mějme tedy posloupnost délky

$$m^{2^{k+1}} + 1 = \left(m^{2^k}\right)^2 + 1 \ .$$

Dle prvního kroku důkazu můžeme z této posloupnosti vybrat podposloupnost délky $m^{2^k} + 1$, která bude monotónní v první složce. A dle indukčního předpokladu můžeme z této vybrané posloupnosti vybrat podposloupnost, která bude monotónní v k složkách (v druhé až (k+1)-vé složce) a protože je monotónní i v první složce, je monotónní ve všech $k + 1$ složkách, což jsme chtěli dokázat. Tím je důkaz hotov.

Poznámky opravovatele: Všechna správná řešení byla indukcí. Vyskytly se čtyři typy řešení. Správná a elegantní za $5+i$, správná méně elegantní za $5+0i$, správný jen druhý krok indukce za $1 + 0i$ a nepochopené zadání za $0 + 0i$.