5. série

Téma: Polünoomid (estonské zadání)

Termín odeslání: 23. února 1998

Ülesanne 1

Olgu $P(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom, mille lahenditeks on 13 erinevat täisarvu. Tõestada, et kui n on täisarv, mille korral $P(n) \neq 0$, siis $|P(n)| \geq 7 \cdot (6!)^2$. Tuua näide täisarvuliste kordajatega polünoomist $P(x)$, mille lahenditeks on 13 erinevat täisarvu ja mingi täisarvu n korral $|P(n)| = 7 \cdot (6!)^2$.

Ülesanne 2

Lahendada võrratus

$$x(x+1)(x+2)(x+3) \geq \frac{9}{16}\,.$$

Ülesanne 3

Olgu polünoomi

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + 1$$

kordajad a_1, a_2, ... , a_{n-1} mittenegatiivsed reaalarvud ning olgu võrrandi $f(x) = 0$ kõik lahendid reaalsed. Tõestada, et $f(2) \geq 3^n$.

Ülesanne 4

Olgu p ja $q > 0$ täisarvud. Täestada, et leidub lõik I pikkusega $1/q$ ning täisarvuliste kordajatega polünoom P selliselt, et

$$\left|P(x) - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

iga $x \in I$ korral.

Ülesanne 5

Olgu a võrrandi $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ suurim positiivne lahend. Täestada, et $\lfloor a^{1348} \rfloor$ ja $\lfloor a^{1980} \rfloor$ jaguvad arvuga 17. ($\lfloor x \rfloor$ tähistab arvu x täisosa.)

5. série

Téma: Margliður (islandské zadání)

Termín odeslání: 23. února 1998

Problem 1
Lát $P(x)$ vera margliðu með heiltölustuðlum, með 13 mismunandi heiltölurótum. Sannið að ef n er heil tala með $P(n) \neq 0$ thá er $|P(n)| \geq 7 \cdot (6!)^2$. Gefið dæmi um margliðu með heiltölustuðlum og 13 mismunandi rótum thar sem um heila tölu n gildir, $|P(n)| = 7 \cdot (6!)^2$.

Problem 2
Leysið ójöfnuna

$$x(x+1)(x+2)(x+3) \geq \frac{9}{16}\,.$$

Problem 3
Gerum ráð fyrir að stuðlarnir $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ í

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + 1$$

séu frekar jákvæðar rauntölur, og gerum einnig rá ð fyrir að jafnan $f(x) = 0$ hafi einungis rauntöluræur. Sannið að $f(2) \geq 3^n$

Problem 4
Lát p vera $q > 0$ vera heiltölur. Sannið að til sé bil I af lengd $1/q$ og margliða P með heiltölustuðlum thannig að

$$\left| P(x) - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

fyrir öll $x \in I$.

Problem 5
Lát a vera stærstu jákvæðu rót jöfnunnar $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Sannið að $\lfloor a^{1348} \rfloor$ og $\lfloor a^{1980} \rfloor$ séu báðar deilanlegar með 17. ($\lfloor x \rfloor$ táknar heiltöluhluta x.)

5. série

Téma: Polynomer (norské zadání)

Termín odeslání: 23. února 1998

Problem 1

La $P(x)$ være et polynom med heltallige koeffisienter, med 13 forskjellige heltallige røtter. Vis at hvis n er et heltall slik at $P(n) \neq 0$, så er $|P(n)| \geq 7 \cdot (6!)^2$. Gi et eksempel på et polynom med heltallige koeffisienter og 13 forskjellige heltallige røtter slik at $|P(n)| = 7 \cdot (6!)^2$ for et heltall n.

Problem 2

Løs ulikheten

$$x(x+1)(x+2)(x+3) \geq \frac{9}{16}\,.$$

Problem 3

Anta at koeffisientene $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ til

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + 1$$

er ikke-negative, reelle tall. Anta også at likningen $f(x) = 0$ bare har reelle røtter. Vis at $f(2) \geq 3^n$.

Problem 4

La p og $q > 0$ være heltall. Vis at det eksisterer et intervall I av lengde $\frac{1}{q}$ og et polynom P med heltallige koeffisienter slik at

$$\left|P(x) - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

for alle $x \in I$.

Problem 5

La a være den største, positive løsningen av likningen $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Vis at $\lfloor a^{1348} \rfloor$ og $\lfloor a^{1980} \rfloor$ begge er delelige med 17. ($\lfloor x \rfloor$ betyr heltallsdelen av x.)

5. série

Téma: Polynomy

Termín odeslání: 23. února 1998

1. Úloha

Nechť $P(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty a s 13-ti různými celočíselnými kořeny. Dokažte, že pokud n je celé číslo, pro něž $P(n) \neq 0$, tak $|P(n)| \geq 7 \cdot (6!)^2$. Uveďte příklad polynomu s celočíselnými koeficienty a 13-ti různými celočíselnými kořeny takového, že pro nějaké celé číslo n platí $|P(n)| = 7 \cdot (6!)^2$.

2. Úloha

Vyřešte nerovnici

$$x(x+1)(x+2)(x+3) \geq \frac{9}{16}\,.$$

3. Úloha

Předpokládejme, že koeficienty $a_1, a_2, \dots\ a_{n-1}$ polynomu

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + 1$$

jsou nezáporná reálná čísla a že rovnice $f(x) = 0$ má jen reálné kořeny. Dokažte, že $f(2) \geq 3^n$.

4. Úloha

Nechť p a $q > 0$ jsou celá čísla. Ukažte, že existuje interval I délky $1/q$ a polynom P s celočíselnými koeficienty takový, že

$$\left| P(x) - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

pro všechna $x \in I$.

5. Úloha

Buď a největší kladný kořen rovnice $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Ukažte, že $\lfloor a^{1348} \rfloor$ and $\lfloor a^{1980} \rfloor$ jsou dělitelná sedmnácti. ($\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část x.)

Řešení 5. série

1. úloha
Nechť $P(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty a s 13-ti různými celočíselnými kořeny. Dokažte, že pokud n je celé číslo, pro něž $P(n) \neq 0$, tak $|P(n)| \geq 7 \cdot (6!)^2$. Uveďte příklad polynomu s celočíselnými koeficienty a 13-ti různými celočíselnými kořeny takového, že pro nějaké celé číslo n platí $|P(n)| = 7 \cdot (6!)^2$.

$P(x)$ má třináct celočíselných kořenů, můžeme tedy psát

$$P(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_{13})(q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + \cdots + q_0)\,,$$

přičemž všechna čísla q_i jsou celá. Vskutku, kdyby tomu tak nebylo, tak existuje k $(0 \leq k \leq n)$ takové, že q_k není celé, avšak q_i je celé pro všechna $i > k$. Roznásobením výšeuvedené rovnosti dostáváme, že koeficient u x^{k+13} v $P(x)$ je $q_k +$ celé číslo, což je spor.

Dosadíme-li nyní do $P(x)$ celé číslo n, které není kořenem, dostaneme součin třinácti po dvou různých nenulových celých čísel $n - x_1$, $n - x_2$, ... , $n - x_{13}$ vynásobený celým nenulovým číslem $Q(n)$. Seřaďme absolutní hodnoty těch třinácti čísel vzestupně. Každé přirozené číslo dostaneme nejvýše dvakrát, čili první dvě jsou alespoň jedna, další dvě alespoň dvě, ... , šestá dvojice jsou alespoň šestky a konečně poslední číslo je alespoň sedmička. Dokazovaná nerovnost tedy platí. Rovnost nastává například pro $n = 0$ a polynom

$$P(x) = (x - 1)(x - 2) \ldots (x - 6)(x + 1)(x + 2) \ldots (x + 7)\,.$$

Poznámky opravovatele: Většina z vás automaticky předpokládala, že $P(x)$ je třináctého stupně a psala $P(x) = a(x - x_1) \ldots (x - x_{13})$, $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, x_1, x_2, ... , $x_{13} \in \mathbb{Z}$ jsou kořeny. To však v zadání vůbec nebylo (3 body).

Ti, kteří řešili úlohu obecně, tj. $P(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_{13})Q(x)$, avšak nedokázali, že $Q(x)$ má celočíselné koeficienty, dostali 4 body.

2. úloha
Vyřešte nerovnici

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) \geq \frac{9}{16}\,.$$

Kořeny polynomu uvedeného vlevo u naší nerovnosti rozdělují reálnou přímku na pět intervalů, kde je hodnota tohoto polynomu nenulová a nemění znaménko, jsou to intervaly $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, \infty)$. Vyloučíme-li ty, kde náš polynom nabývá záporných hodnot, zbudou nám intervaly $(-\infty, -3)$, $(-2, -1)$ a $(0, \infty)$. Zabývejme se nejprve intervalem $(-2, -1)$. Vzhledem k tomu, že náš polynom je polynomem čtvrtého stupně se čtyřmi jednoduchými kořeny, a je v intervalu $(-2, -1)$ kladný, nabývá v tomto intervalu právě jednoho lokálního maxima a ze symetrie jeho grafu kolem přímky $x = -\frac{3}{2}$ vidíme, že to může být jen v bodě $x = -\frac{3}{2}$. V tomto bodě jest hodnota toho polynomu „čirou náhodou“ rovna číslu $\frac{9}{16}$. Tj. prvním řešením naší rovnice je číslo $x = -\frac{3}{2}$. Nyní naše zkoumání obrátíme ke zbývajícím intervalům. Zde je polynomiální funkce $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$ monotónní, proto nám postačí k řešení úlohy jen nalézt kořeny polynomu $x(x+1)(x+2)(x+3) - 9/16$ v příslušných intervalech. Po vydělení výrazem $(x + \frac{3}{2})^2$ (neboť $x = -\frac{3}{2}$ je dvojnásobným kořenem tohoto polynomu) se nám celá úloha převede na řešení kvadratické rovnice $x^2 + 3x - 1/4 = 0$, která má kořeny: $x_1 = \frac{-3-\sqrt{10}}{2}, x_2 = \frac{-3+\sqrt{10}}{2}$. Proto řešením nerovnosti ze zadání jsou všechna $x \in (-\infty, x_1) \cup \{\frac{3}{2}\} \cup (x_2, \infty)$.

Poznámky opravovatele: Řešení si byla velmi podobná. Většina z vás použila k úpravám nějakou substituci. nejčastěji se jednalo o $y = x + 1.5$ nebo $y = x^2 + 3x + k$. Pomocí jednoduchých úprav jste dospěli ke kořenům.

Někteří použili „pracnější“ metodu zjišťování kořenů pomocí Viètových vztahů.

Zajímavá byla řešení pomocí reciproké rovnice.

Bohužel se našli i takoví, kteří kořeny viděli na první pohled, nebo z grafu. Taková řešení ztrácela automaticky bod.

Za hrubou chybu jsem považoval, když jste mezi výsledky neuvedli $x = -1.5$. Zde byla ztráta bolestnější.

3. úloha

Předpokládejme, že koeficienty a_1, a_2, ... a_{n-1} polynomu

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + 1$$

jsou nezáporná reálná čísla a že rovnice $f(x) = 0$ má jen reálné kořeny. Dokažte, že $f(2) \geq 3^n$.

Všechny kořeny rovnice jsou záporné (zkus si do $f(x)$ dosadit nezáporné číslo). Označme $y_1, y_2, \ldots, y_n$ čísla opačná ke kořenům $f(x)$ (tedy $f(x) = (x+y_1)(x+y_2)\ldots(x+y_n)$), pro $1 \leq k \leq n$ buď s_k součet všech součinů k čísel z $y_1, \ldots, y_n$.

Podle AG-nerovnosti je $\frac{s_k}{\binom{n}{k}} \geq s_n^{\binom{n}{k}/\binom{n}{k-1}} = 1$ (exponentu se nemusíš lekat, protože na něm stejně nezáleží (neboť $s_n = 1$ — Viètovy vztahy), čili $s_k \geq \binom{n}{k}$. A nyní už stačí dosadit a využít binomickou větu:

$$f(2) = (2+y_1)\ldots(2+y_n) = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}s_k \geq \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\binom{n}{k} = 3^n$$

Poznámky opravovatele: Většina řešení byla správně, v důkazu byla nejčastěji využita AG-nerovnost. Jen (tuším) dvěma jedincům se v důkazu objevily nějaké chybky za což jsem jim musel něco strhnout. Dalším dvěma osobám se zřejmě nepodařilo správně dešifrovat zadání.

4. úloha

Nechť p a $q > 0$ jsou celá čísla. Ukažte, že existuje interval I délky $1/q$ a polynom P s celočíselnými koeficienty takový, že

$$\left|P(x) - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

pro všechna $x \in I$.

Pokud $q = 1$, pak stačí položit $P(x) = p$. Takže dále můžeme předpokládat $q > 1$ a ukážeme, že za interval I lze brát interval $(\frac{1}{2q}, \frac{3}{2q})$, který má zjevně délku $\frac{1}{q}$. Nyní ukážeme, jak budeme volit polynom P. Jelikož pro přirozené $q > 1$ platí $\frac{3}{2q} < 1$, existuje takové přirozené číslo m, že $(\frac{3}{2q})^m < \frac{1}{q}$. Pro přehlednost položme $\xi = 1 - (\frac{1}{2q})^m$, pak snadno nahlédneme, že pro všechna čísla x z intervalu I platí: $0 < 1 - qx^m < \xi < 1 \quad (*)$. Jelikož $\xi < 1$, nalezneme přirozené číslo n takové, že $\xi^n < \frac{1}{pq} \quad (**)$, a polynom P volíme ve tvaru: $P(x) = \frac{p}{q}(1-(1-qx^m)^n)$. Snadno nahlédneme, že se jedná skutečně o polynom s celočíselnými koeficienty (číslo q ve jmenovateli se totiž po úpravě závorky vpravo z binomické věty zkrátí — podrobně si rozmyslete). Nyní již jen stačí nahlédnout, že pro náš polynom P a interval I platí nerovnost ze zadání. Jednoduchými úpravami však s využitím vztahů $(*)$ a $(**)$ máme:

$$|P(x) - \frac{p}{q}| = \frac{p}{q}(1 - qx^m)^n < \frac{p}{q}\xi^n < \frac{p}{q}\frac{1}{pq} = \frac{1}{q^2},$$

což jsme chtěli ukázat.

Poznámky opravovatele: Z šesti došlých řešení byla dvě správná — jejich autoři našli konkrétní polynom a o něm dokázali, co bylo potřeba — a tři řešení vycházela ze špatně přeloženého zadání.

5. úloha

Buď a největší kladný kořen rovnice $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Ukažte, že $\lfloor a^{1348} \rfloor$ and $\lfloor a^{1980} \rfloor$ jsou dělitelná sedmnácti. ($\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část x.)

Úlohu si zjednodušíme tím, že ji zobecníme — budeme zkoumat zbytek čísla $\lfloor a^n \rfloor$ po dělení 17-ti. Označme $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, další dva kořeny tohoto polynomu b a c (tak aby $b \le c$) a $r_n = a^n + b^n + c^n$. Vzhledem k tomu, že $f(-2/3) < 0 < f(0)$, $f(2/3) < 0$, $f(2) < 0 < f(3)$, je $-2/3 < b < 0 < c < 2/3$ a $2 < a < 3$. Bude tedy pro sudé $n \ge 2$ platit $0 < b^n + c^n < 1$, čili (vzhledem k tomu, že jak ukážeme r_n je vždy celé číslo) $\lfloor a^n \rfloor = r_n - 1$. Budeme tedy zkoumat, pro která sudá n je $r_n \equiv 1 \pmod{17}$.

Označme

$$s_1 = a + b + c \qquad s_2 = ab + bc + ca \qquad s_c = abc\,.$$

Snadno ověříme, že platí $r_n = s_1 r_{n-1} - s_2 r_{n-2} + s_3 r_{n-3}$. Viètovy vztahy nám říkají, že $s_1 = 3$, $s_2 = 0$, $s_3 = -1$, čili $r_n = 3r_{n-1} - r_{n-3}$.

Nyní $r_0 = 3$, $r_1 = s_1 = 3$, $r_2 = s_1^2 - 2s_2 = 9$. Pomocí rekurentního vztahu z konce minulého odstavce snadno zjistíme hodnotu r_n mod 17 pro $n = 0, 1, \dots$: 3, 3, 9, 7, 1, 11, 9, 9, 16, 5, 6, 2, 1, 14, 6, 0, 3, 3, 9, ... Vidíme, že posloupnost vypadá, jako by měla periodu 16. To je ovšem třeba dokázat. Zjistili jsme, že $r_n \equiv r_{n+16} \pmod{17}$ pro $n = 0, 1, 2$, a díky rekurentní formulce z minulého odstavce odsud už (indukcí) plyne, že tato kongruence platí pro každé přirozené n. Tudíž r_n dává po dělení 17-ti zbytek 1 právě tehdy, když n dává po dělení 16-ti zbytek 4 či 12 (čili tehdy, když po dělení 8-mi dává zbytek 4). Tedy pro sudé n je $\lfloor a^n \rfloor$ dělitelné 17-ti právě když $n \equiv 4 \pmod{8}$. Čili stačí už jen ověřit, že 1348 (rok založení Univerzity Karlovy!) i 1980 mají správný zbytek po dělení osmi.

Poznámky opravovatele: Za nalezení kořenů zadané rovnice byl udělen symbolicky jeden bod. Body dalších řešitelů jsou odstupňovány podle toho, kam se dostali při řešení rekurentní rovnice pro $\lfloor a^n \rfloor$.