Teorie her (povídání ke čtvrté sérii)

Je velice obtížné definovat obecně, co je to hra. Navíc tento pojem intuitivně chápeme. Budeme se zabývat takovými hrami jako jsou šachy nebo pišqorky — hrami dvou hráčů, které končí vítězstvím jednoho z nich nebo remízou a při kterých se hráči pravidelně střídají v tazích. Intuitivně chápeme i pojmy jako je *tah* a *pozice*

Řekneme, že pozice patří hráči A, jestliže je hráč A v této pozici na tahu. *Strategií* hráče A pak rozumíme každé zobrazení množiny pozic patřících hráči A do množiny všech možných tahů (je to tedy návod, který hráči v každé pozici řekne, pro který tah se má rozhodnout). *Vyhrávající strategie* hráče A je taková strategie, která nezávisle na hře soupeře dovede hráče A k vítězství. *Neprohrávající strategie* hráče A je strategie, která nedovolí soupeři vyhrát, ať bude hrát jakkoli.

Příklad: Na hromádce buď n zápalek, v každém tahu musí hráč odebrat 1, 2, …, $k-1$, nebo k zápalek. Vyhrává ten, kdo sebere poslední zápalku. Kdo vyhraje?

Řešení: Pokud je počet zápalek na hromádce dělitelný číslem $k+1$, vyhrává druhý hráč (nezačínající), v ostatních případech vyhrává první hráč. Tuto hypotézu dokážeme indukcí.

Pokud je na hromádce méně než $k+1$ zápalek, sebere je první hráč všechny a vyhraje, pokud je na hromádce právě $k+1$ zápalek, pak po libovolném tahu prvního sebere druhý všechny zbývající a vyhraje — toť první krok. Druhý krok: předpokládejme, že pro $n \leq l \cdot (k+1)$ tvrzení platí, chceme dokázat, že pak platí i pro všechna $n \leq (l+1) \cdot (k+1)$. Začínajícího hráče označme písmenem A, jeho soupeře písmenem B. Pokud je na hromádce více než $l \cdot (k+1)$, ale méně než $(l+1) \cdot (k+1)$, pak hráč A sebere tolik zápalek, aby jich zůstalo $l \cdot (k+1)$ a v této pozici dle indukčního předpokladu vyhrává hráč, který není na tahu, což je hráč A. Pokud je na hromádce právě $(l+1) \cdot (k+1)$ zápalek, pak počet zápalek na hromádce po tahu hráče A bude mezi $l \cdot (k+1) + 1$ a $(l+1) \cdot (k+1) - 1$ včetně. Ale v této pozici, jak jsme právě dokázali, vyhrává hráč, který je na tahu, tedy hráč B. Tím jsme dokázali indukční krok a potvrdili naši hypotézu.

Závěr: Pokud $k+1$ dělí n, vyhrává druhý hráč, jinak vyhrává první hráč.

Pišqorky: Základní pravidla jsou tato: dva hráči střídavě zapisují znaky do nekonečné čtverečkované sítě — jeden křížky a druhý kolečka. Kdo bude mít dříve pět znaků v řadě (hned vedle sebe), a to v libovolném ze čtyř směrů, vyhrává. Nekonečnou čtverečkovanou síť můžeme zapsat jako $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, každému čtverečku můžeme přiřadit dvě celá čísla — jeho souřadnice. V n-rozměrném případě hrajeme na $\mathbb{Z}^n$, počet směrů bude větší — bereme v úvahu i všechny diagonální. (Pro $n = 3$ to bude 13 směrů, pro $n = 4$ pak 40 směrů.)

4. série

Téma:	Hry
Termín odeslání:	12. LEDNA 1998

Zadání úloh 4. série

1. ÚLOHA

Mějme některé z pěti pravidelných těles (čtyřstěn, osmistěn, krychle, dvanáctistěn, dvacetistěn). Dva hráči střídavě obarvují hrany tohoto tělesa (oba stejnou barvou). Kdo má vyhrávající strategii, jestliže

(1) vyhrává
(2) prohrává

ten, kdo obarví poslední hranu některé stěny tohoto tělesa?

2. ÚLOHA

Dva hráči střídavě obarvují hrany grafu (každý svou barvou). Kdo první vytvoří úplný graf o k vrcholech své barvy, vyhrává. Dokažte, že existuje n takové, že na úplném grafu o více než n vrcholech má začínající hráč vyhrávající strategii. Poznámka: Použijete-li nějakou netriviální větu z teorie grafů, musíte ji dokázat.

3. ÚLOHA

Dva hráči hrají n-rozměrné pišqorky na 3^{n+1} znaků v řadě. Dokažte, že druhý má neprohrávající strategii, víte-li, že pro libovolné $k > 1$ je mezi k a $2k$ prvočíslo.

4. ÚLOHA

Mějme obdélník $m \times n$. Dva hráči se střídají v tazích. Tah znamená pokrytí (obarvení) libovolně velkého obdélníku (příp. čtverce), jehož žádný čtvereček dosud nebyl pokryt (obarven). Kdo obarví poslední čtvereček (dokončí pokrytí obdélníku), prohrává. Který z hráčů má vyhrávající strategii?

5. ÚLOHA

Počáteční hodnota čísla x je racionální. První hráč k číslu x přičte $1/2$, nebo $-1/2$, druhý hráč přičte k nové hodnotě čísla x $1/4$, nebo $-1/4$, pak první hráč přičte $1/8$, nebo $-1/8$, atd. V n-tém tahu tedy přičte první hráč $(1/2)^{2n-1}$, nebo $-(1/2)^{2n-1}$ a druhý hráč $(1/2)^{2n}$, nebo $-(1/2)^{2n}$, kde n probíhá všechna (!) přirozená čísla. Po nekonečně mnoha tazích hra skončí. Pokud bude číslo (přesněji limita hodnoty čísla x pro n jdoucí k nekonečnu) x racionální, vyhraje první hráč, pokud ne, vyhraje druhý. Který z hráčů má vyhrávající strategii?

Řešení 4. série

1. úloha
Mějme některé z pěti pravidelných těles (čtyřstěn, osmistěn, krychle, dvanáctistěn, dvacetistěn). Dva hráči střídavě obarvují hrany tohoto tělesa (oba stejnou barvou). Kdo má vyhrávající strategii, jestliže

(1) vyhrává
(2) prohrává

ten, kdo obarví poslední hranu některé stěny tohoto tělesa?

Je zřejmé, že každá hra musí skončit vítězstvím některého z hráčů (nejpozději po patnácti tazích budou všechny hrany obarvené a někdo tedy musel jako první dokončit obarvení některé stěny). Stačí tedy pro druhého najít strategii, která zabrání vyhrát prvnímu. Následující strategie bude fungovat i pro čtyřstěn, ale důkaz bude muset vypadat trochu jinak (nejsnáz rozebráním několika případů).

(1) Nechť druhý hráč hraje podle následující strategie: Pokud u některé stěny zbývá obarvit poslední hranu, pak ji obarví a vyhraje, jinak obarví hranu, která leží naproti (středově souměrně podle středu tělesa) hraně obarvené soupeřem v posledním tahu. Předpokládejme, že by při této strategii druhého vyhrál první hráč, a to v n-tém tahu. Tedy první hráč obarvil poslední hranu stěny A. Protože druhý v předcházejícím tahu nevyhrál, zbývalo před jeho tahem obarvit více než jednu hranu stěny A a druhý musel v $(n-1)$-ém tahu obarvit předposlední hranu stěny A. Protože se druhý držel své strategie, musí být situace středově souměrná a první v předcházejícím tahu musel obarvit předposlední hranu protilehlé stěny $S(A)$. To je ale spor, protože pak by druhý dle své strategie táhnul jinak a obarvil poslední hranu stěny $S(A)$ (Stále užíváme toho, že A a $S(A)$ nemají společný bod.) a vyhrál by.

(2) Nechť druhý hráč obarví vždy hranu naproti hraně obarvené prvním hráčem v témže tahu. Předpokládejme, že druhý prohrál, tj. obarvil poslední hranu některé stěny tělesa. Potom ale první hráč nutně před tahem druhého obarvil poslední hranu protilehlé stěny a prohrál tedy on.

V obou případech jsme pro druhého našli strategii, při které nemůže prohrát (předpokládali jsme, že prohraje a došli jsme ke sporu) a protože nemůže ani remizovat, je to jeho vyhrávající strategie.

Poznámky opravovatele: Ač byla úloha dosti jednoduchá, nebyl jsem řešeními příliš nadšen. Více než třetina řešitelů pochopila zadání špatně.

Menší půlka řešení byla skoro správná. Všichni dokazovali, že strategie pro druhého je neprohrávající. Jen dva z vás však explicitně uvedli, že v této úloze to znamená totéž, co vyhrávající. To obecně nemusí být pravda!

2. úloha

Dva hráči střídavě obarvují hrany grafu (každý svou barvou). Kdo první vytvoří úplný graf o k vrcholech své barvy, vyhrává. Dokažte, že existuje n takové, že na úplném grafu o více než n vrcholech má začínající hráč vyhrávající strategii. Poznámka: Použijete-li nějakou netriviální větu z teorie grafů, musíte ji dokázat.

Nejprve dokážeme, že pro dostatečně velká n musí v úplném grafu o n vrcholech (kde každou hranu jsme obarvili červeně nebo modře) existovat jednobarevný úplný graf o k vrcholech. (Toto tvrzení se nazývá Ramseyova věta.) Důkaz provedeme indukcí.

Označme $r(i,j)$ nejmenší počet vrcholů grafu, který jistě obsahuje červený úplný podgraf o i vrcholech nebo modrý úplný podgraf o j vrcholech ($r(i,j)$ se nazývá Ramseyovo číslo). Jistě v úplném grafu o j vrcholech existuje modrá hrana (tj. úplný graf o dvou vrcholech) nebo červený úplný graf o j vrcholech, tj. $r(j,2)=j$. Podobně v úplném grafu o j vrcholech existuje buď červená hrana, nebo modrý úplný graf o j vrcholech, tj. $r(2,j)=j$.

A nyní indukční krok: dokážeme, že $r(k,l) \leq r(k-1,l)+r(k,l-1)$. Mějme úplný graf o $r(k-1,l)+r(k,l-1)$ vrcholech a zvolme vrchol v_0. Z vrcholu v_0 vychází $r(k-1,l)+r(k,l-1)-1$ hran, jistě je mezi nimi aspoň $r(k-1,l)$ červených nebo aspoň $r(k,l-1)$ modrých. V prvním případě víme, že v grafu o $r(k-1,l)$ vrcholech existuje úplný modrý graf o l vrcholech, pak máme vyhráno, nebo úplný červený graf o $k-1$ vrcholech, pak tyto vrcholy spolu s vrcholem v_0 tvoří červený úplný graf o k vrcholech. V druhém případě je částí grafu o $r(k,l-1)$ vrcholech (do kterých vedou modré hrany) červený úplný graf o k vrcholech, což je to, co potřebujeme, nebo úplný modrý graf o $l-1$ vrcholech, které spolu s vrcholem v_0 tvoří úplný modrý graf o l vrcholech. Tím jsme dokázali, že pro každé k existuje n takové, že v úplném grafu o n vrcholech existuje úplný podgraf o k vrcholech, jehož hrany jsou obarvené stejnou barvou — tedy jeden z hráčů musí vyhrát.

Předpokládejme nyní, že druhý hráč má vyhrávající strategii. Pak první může použít „metodu ukradené strategie“. Stačí si představit, že jeho soupeř už obarvil některou hranu a on je teď v roli druhého a může se řídit jeho strategií. To může dělat, dokud soupeř skutečně neobarví hranu, kterou už první hráč považuje za obarvenou; pak si zase představí, že je obarvena některá hrana ze zbývajících. Protože se první drží vyhrávající strategie, musí vyhrát, což je spor s tím, že má vyhrávající strategii druhý. Tím je dokázáno, že má vyhrávající strategii první hráč.

Poznámky opravovatele: Úloha patřila k obtížnějším, málokdo ji vyřešil správně. Nejčastější chybou byla špatná interpretace zadání, která úlohu zcela trivializovala. Dobrá zásada je, pokud mi úloha připadá výrazně lehčí než bych čekal, dobře se zamyslet, zda nechápu zadání špatně.

3. úloha

Dva hráči hrají n-rozměrné pišqorky na 3^{n+1} znaků v řadě. Dokažte, že druhý má neprohrávající strategii, víte-li, že pro libovolné $k>1$ je mezi k a $2k$ prvočíslo.

Strategie druhého hráče bude vypadat takto: políčka uspořádáme do dvojic. Když první hráč táhne na jedno políčko z dvojice, druhý hráč zaplní druhé políčko svou značkou, takže vždy po tahu druhého bude pro každou dvojici platit, že na jednom políčku je křížek a na druhém kolečko, nebo jsou obě prázdná. Stačí dvojice políček uspořádat tak, abychom měli jistotu, že v každé řadě 3^{n+1} políček v libovolném směru, je alespoň jedno políčko se značkou druhého hráče.

Každé políčko n-rozměrného prostoru popisuje n celočíselných souřadnic. Každé políčko má $3^n - 1$ sousedů — všechna políčka v krychli o hraně 3 okolo centrálního políčka — a každá dvojice protilehlých políček určuje jeden směr, tj. celkem $(3^n - 1)/2$ směrů. Každému směru nyní přiřadíme zobrazením f jedno číslo (od 1 do $(3^n - 1)/2$). Směry určené vektory $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $(0, 0, \dots, 0, 1)$ nazveme základní (tyto vektory tvoří bázi našeho prostoru). Základnímu vektoru s jedničkou na k-tém místě přiřadíme číslo 3^{k-1}. Každému z ostatních směrů (určených políčky krychle o hraně 3) přiřadíme čísla tak, aby platilo $f(u+v) = f(u)+f(v)$ (Např. $f((-1, 1, 1, 0, \dots, 0)) = f(-(1, 0, \dots, 0)+(0, 1, 0, \dots, 0) + (0, 0, 1, 0, \dots, 0)) = -f(1, 0, \dots, 0) + f(0, 1, 0, \dots, 0) + f(0, 0, 1, 0, \dots, 0) = -1 + 3 + 9 = 11$) Je zřejmé, že vektor každého směru můžeme jednoznačně rozložit na součet základních vektorů, každému směru tedy přiřadíme nějaké číslo a různým směrům přiřadíme různá čísla (neboť vyjádření přirozeného čísla ve tvaru $\sum_{k=1}^{\infty} c_k 3^k$, kde $c_k \in \{-1, 0, 1\}$ je jednoznačné.

Víme, že mezi $(3^n - 1)/2$ a $(3^n - 1)$ je prvočíslo, označme ho p. Uvažujme krychli o hraně $2p$, jednomu políčku přiřadíme číslo 0 a ostatním políčkům přiřadíme čísla zobrazením q, aby platilo pro dvě sousední políčka A, B: $f(B - A) = q(B) - q(A)$ (všechna čísla uvažujme mod p). Bude to vypadat tak, že když si zvolíme políčko s číslem k a směr, kterému jsme přiřadili číslo l a budeme se od zvoleného políčka posouvat ve zvoleném směru, bude sousední políčko mít číslo $(k+l) \mod p$, další políčko v tomto směru $(k+2l) \mod p$, $\dots$. A protože p je prvočíslo, tedy p je nesoudělné s l, vystřídáme nejprve všechna čísla a pak se teprve začnou opakovat. Pokryjeme-li prostor těmito krychlemi a každý směr rozsekáme na úseky délky $2p$, pak každý úsek bude obsahovat každé číslo menší než p právě dvakrát, tedy speciálně je tam dvakrát i políčko s číslem tohoto směru a tato políčka budou tvořit dvojici z prvního odstavce. Vezmeme-li si řadu délky $3^{n+1} \geq 3p$, pak v této řadě najdeme tři políčka s číslem tohoto směru a aspoň jedno z nich bude zaplněno značkou druhého hráče (pokud na každém políčku bude nějaká značka). Tím je důkaz skončen.

Poznámky opravovatele: Tuto úlohu nikdo nevyřešil. Asi byla moc těžká.

4. úloha

Mějme obdélník $m \times n$. Dva hráči se střídají v tazích. Tah znamená pokrytí (obarvení) libovolně velkého obdélníku (příp. čtverce), jehož žádný čtvereček dosud nebyl pokryt (obarven). Kdo obarví poslední čtvereček (dokončí pokrytí obdélníku), prohrává. Který z hráčů má vyhrávající strategii?

Pro $m = 1$, $n = 1$ a pro $m = 2$, $n = 2$ vyhrává druhý. Pro $m = 1$, $n > 1$ a $m > 1$, $n = 1$ vyhrává první (pokryje vše kromě jednoho políčka). Nechť je BÚNO $m \geq 3$, pak první pokryje v prvním tahu obdélník, jehož rohová pole jsou $[2, 1]$, $[m - 1, 1]$, $[2, n]$, $[m-1, n]$ (zbydou tedy jen dva sloupce). Dokud v každém sloupci zůstávají nepokryta aspoň dvě políčka vedle sebe, hraje první stejně jako druhý, ale vždy v druhém sloupci, takže po tahu prvního budou vždy oba sloupce pokryty stejně. Pokud druhý tahne tak, že po jeho tahu zůstanou v jednom sloupci jen izolované čtverečky, hraje první v druhém sloupci tak, aby celkový počet izolovaných čtverečků byl lichý. (Takový tah jistě existuje, neboť druhý pokryl svým posledním tahem poslední větší mezeru, a to tak, že ji buď pokryl celou, nebo nechal jeden izolovaný čtvereček na jedné straně nebo na každé straně po jednom izolovaném čtverečku. První pak v prvním a ve třetím případě nechá jeden izolovaný čtvereček a ve druhém případě žádný, tak bude zaručeno, že celkový počet izolovaných čtverečků bude lichý.) Od tohoto okamžiku má hra jednoznačný průběh, který vede k vítězství prvního hráče.

Poznámky opravovatele: Tato úloha nečinila větší problémy, vyskytlo se jen několik řešitelů, kteří tvrdili, že nějaké tvrzení je zřejmé, ale ono neplatilo (0–1 bod). Druhým důvodem k strhávání bodů bylo opomíjení triviálních případů. Je hezké, když se napíše, že v prvním tahu hráč obarví „prostřední obdélník“ tak, aby zbyly po stranách dvě „nudle“, jak to ale udělá, když se pohybuje na hracím plánu dva krát dva, to už je asi jeho problém (4 body). S tímhle souvisí i fakt, kteří někteří řešitelé odmítali vzít na vědomí – totiž, že i čtverec je obdélník.

Imaginárními body jsem tentokrát šetřila, protože všechna správná řešení byla stejná jako autorské. Jedinou výjimkou je Jakub Černý, který v rozebírání druhé části hry, tj. boje na nudlích, využil matematickou indukci, čímž se vyhnul podrobnému rozebírání všech možných situací.

5. úloha

Počáteční hodnota čísla x je racionální. První hráč k číslu x přičte $1/2$, nebo $-1/2$, druhý hráč přičte k nové hodnotě čísla x $1/4$, nebo $-1/4$, pak první hráč přičte $1/8$, nebo $-1/8$, atd. V n-tém tahu tedy přičte první hráč $(1/2)^{2n-1}$, nebo $-(1/2)^{2n-1}$ a druhý hráč $(1/2)^{2n}$, nebo $-(1/2)^{2n}$, kde n probíhá všechna (!) přirozená čísla. Po nekonečně mnoha tazích hra skončí. Pokud bude číslo (přesněji limita hodnoty čísla x pro n jdoucí k nekonečnu) x racionální, vyhraje první hráč, pokud ne, vyhraje druhý. Který z hráčů má vyhrávající strategii?

Protože platí $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n_0}}$ (součet geometrické řady), rozhoduje hráč na tahu o tom, zda bude výsledek větší nebo roven, nebo menší nebo roven než současná hodnota čísla x. Protože racionálních čísel je jen spočetně mnoho, může je druhý hráč seřadit do posloupnosti $q_1, q_2, \ldots$ a v k-tém tahu posunout výsledek do té části číselné osy (vpravo nebo vlevo), ve které k-tý člen posloupnosti neleží. Pokud je hodnota čísla x náhodou rovna hodnotě k-tého členu, pak nemůže zabránit jedním tahem tomu, aby byl výsledek roven tomuto číslu, ale může toho docílit dvěma tahy. Stačí tedy, aby bylo každé racionální číslo v posloupnosti dvakrát (Tedy užijeme posloupnost $q'_1, q'_2, \ldots$, kde $q'_{2n-1} = q'_{2n} = q_n$). Druhý hráč má vyhrávající strategii.

Poznámky opravovatele: Asi třetina řešitelů napsala, že součet racionálních čísel je racionální. To je samozřejmě pravda, pokud sčítáme konečně mnoho čísel, ne však už pro nekonečné součty (to by potom bylo každé číslo racionální)!