Teorie grafů (povídání ke třetí sérii)

Ke zformulování úloh této série je vhodné seznámit Tě se základními pojmy teorie grafů. Nejprve bychom si měli říci, co je to graf.[1] Populárně řečeno: na papíře máme nakresleno několik puntíků (těm budeme říkat *vrcholy*), některé dvojice puntíků jsou spojeny čarami[2] (tzv. *hranami*). Přitom mezi dvěma vrcholy vede nejvýše jedna hrana (v grafu nejsou tzv. *násobné hrany*) a žádná hrana nemá oba konce stejné (nejsou tam tzv. *smyčky*). Takový systém vrcholů a hran budeme nazývat *graf* (pokud bychom povolili i násobné hrany a smyčky, dostali bychom tzv. *multigraf*).

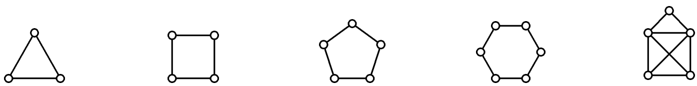
Nyní popíšeme graf formálně. Graf G je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je libovolná množina a E je množina, která obsahuje některé (případně žádné) dvojprvkové podmnožiny V. (Pokud $\{u, v\} \in E$, říkáme, že vrcholy u a v jsou v grafu G spojeny hranou.) Prvky množiny V jsou vrcholy grafu G, prvky množiny[3] E jeho hrany.[4]

Několik důležitých grafů:

Úplný graf K_n $\quad V = \{1, \ldots, n\}, \quad E = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$

K_3 $\quad K_4$ $\quad K_5$ $\quad K_6$

Kružnice (cyklus) C_n $\quad V = \{1, \ldots, n\}, \quad E = \{\{i, i+1\} : 1 \leq i < n\} \cup \{\{1, n\}\}$



C_3 $\quad C_4$ $\quad C_5$ $\quad C_6$ $\quad$ domeček

Dále je ještě potřeba uvést několik grafových pojmů. *Stupeň* vrcholu u (značíme $d(u)$) je počet hran, které z něho vycházejí. *Skóre* grafu je soupis stupňů jeho vrcholů. Např. skóre C_4 je 2, 2, 2, 2, skóre domečku je 4, 4, 3, 3, 2. Grafu říkáme *k-regulární*, pokud všechny jeho vrcholy mají stupeň k. Např. C_n je 2-regulární, K_n je $(n-1)$-regulární.

Graf nazveme *bipartitní*, pokud lze jeho vrcholy rozdělit do dvou množin (tzv. *partit*) tak, že všechny hrany vedou z jedné partity do druhé. Jinak řečeno: leží-li u a v v téže partitě, pak uv není hrana. Např. cyklus je bipartitní, právě když má sudou délku.

Grafu říkáme *rovinný*, pokud ho lze nakreslit do roviny (tj. vrcholy budou body v rovině, hrany křivky spojující příslušné body) tak, že se žádné dvě hrany nekříží (ani žádná hrana neprotíná sama sebe). Např. všechny kružnice, domeček, K_3, K_4 jsou rovinné, K_5

---

[1] Preventivní varování: grafem se v teorii grafů rozumí něco úplně jiného, než třeba ve větě: „Nakreslete graf funkce x^2." Nenech se tím zmást.

[2] Není důležitý tvar čar, podstatné je jen to, zda příslušná dvojice vrcholů je spojená.

[3] Písmena V a E pocházejí z anglických slov vertex=vrchol a edge=hrana.

[4] Správně bychom tedy hranu spojující vrcholy u a v měli označovat $\{u, v\}$. Často však pro zkrácení tuto hranu značíme jen uv.

není rovinný (zkus si rozmyslet, proč). Při daném nakreslení nazýváme *stěnou* každou (i tu vnější) z oblastí roviny omezených nakreslenými křivkami (představte si, že rovinu podél hran rozstříháme). (Např. libovolné nakreslení cyklu má dvě stěny, nakreslení K_4 čtyři stěny.)

Řekneme, že graf $H = (V', E')$ je *podgraf* grafu $G = (V, E)$, pokud $V' \subset V$ a $E' \subset E$. Podgrafy domečku jsou např. C_3, C_4, C_5, K_4. Místo „graf H je podgraf grafu G" říkáme také „G obsahuje H". Takto chápej zadání druhé úlohy.

Tento úvod musí být hodně stručný, proto jsi možná trochu zmaten záplavou nových pojmů. Pokud se budeš chtít o teorii grafů dozvědět více, doporučuji Ti zejména knihu *Jiří Matoušek* a *Jaroslav Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky, Matfyzpress, Praha, 1996.*

3. série

Téma: Teorie grafů

Termín odeslání: 15. PROSINCE 1997

1. ÚLOHA

(1) Existuje graf se skóre 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6?
(2) Existuje bipartitní graf se skóre 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6?
(3) Existuje graf se skóre 1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9?

2. ÚLOHA

Graf je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje lichý cyklus. Dokažte.

3. ÚLOHA

Kolik vrcholů může mít (1) 3-regulární (2) k-regulární graf?

4. ÚLOHA

Pokud má rovinný graf všechny stupně sudé, pak lze (v jeho libovolném nakreslení) obarvit stěny dvěma barvami tak, že sousední stěny (tj. takové, které mají společnou hranu) mají různou barvu.

5. ÚLOHA

Procházíme labyrintem podle následujících pravidel. (Na začátku jsme na křižovatce S.)

(1) Nikdy neprojdeme toutéž cestou tímtéž směrem dvakrát.
(2) Kdykoli přijdeme na křižovatku $K \neq S$, kterou jsme dosud nenavštívili, označíme cestu, po níž jsme přišli. K odchodu z K použijeme tuto cestu jen tehdy, když nemáme jinou možnost.
(3) Když v odchodu z křižovatky, na níž se nacházíme, brání pravidlo (1), skončíme.

Dokažte, že pokud existuje východ z labyrintu, pak ho tímto postupem najdeme, jinak skončíme zpátky na křižovatce S.

Řešení 3. série

Ke stručnému zápisu řešení této série je vhodné zavést několik pojmů:

- *Cestou* v grafu G rozumíme „procházku po grafu, při níž žádný vrchol nenavštívíme dvakrát", což lze formálně chápat třeba jako posloupnost vrcholů $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$, takovou, že v_i a v_{i+1} jsou spojeny hranou a $v_i \neq v_j$ pro $i \neq j$. Délkou cesty rozumíme počet prošlých hran, čili v našem případě n.

- Graf je *souvislý*, když mezi jeho libovolnými dvěma vrcholy existuje cesta.
- *Komponentou* v nesouvislém grafu G rozumíme takový jeho podgraf K, že K je souvislý a ke K nelze už nic přidat, aby souvislým zůstal.

1. úloha

(1) Existuje graf se skóre 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6?
(2) Existuje bipartitní graf se skóre 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6?
(3) Existuje graf se skóre 1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9?

(1) **Lemma:** Pro libovolný graf platí, že součet stupňů všech jeho vrcholů se rovná dvojnásobku počtu hran, neboli (pro $G = (V, E)$) $\sum_{v \in G} d(v) = 2\,|E|$.

Důkaz: Stupeň vrcholu je počet hran, které z něho vycházejí. Přitom každá hrana vychází ze dvou vrcholů. Sečteme-li tedy všechny stupně, započteme každou hranu dvakrát, a tedy dostaneme dvojnásobek počtu hran.

Nyní zpět k našemu příkladu. Postupujeme sporem: předpokládejme, že takový graf existuje. Sečteme-li všechna uvedená čísla, dostaneme liché číslo (protože lichý počet uvedených čísel je lichý). Liché číslo nemůže být dvojnásobkem počtu hran — spor. Tedy neexistuje graf s uvedeným skóre. (Stejně se dokáže obecnější: každý graf obsahuje sudý počet vrcholů s lichým stupněm.)

(2) Opět sporem. Nechť takový bipartitní graf existuje. Označme $d_1, \ldots, d_k$ stupně vrcholů v jedné partitě, $e_1, \ldots, e_l$ stupně vrcholů v druhé partitě. Stejnou úvahou jako v důkazu lemmatu zjistíme, že jak $d_1 + \cdots + d_k$ tak $e_1 + \cdots + e_l$ je počet hran grafu. Musí tedy platit $d_1 + \cdots + d_k = e_1 + \cdots + e_l$, kde $d_1, \ldots, d_k, e_1, \ldots, e_l$ jsou (v nějakém pořadí) čísla ze zadání (tj. 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6). To však není možné — součet na té straně rovnosti, v níž se vyskytuje 5, není dělitelný třemi, zatímco součet na druhé straně ano. Čili neexistuje bipartitní graf s uvedeným skóre.

(3) Ani tentokrát takový graf neexistuje. Zase sporem: nechť existuje takový graf. Označme a, b, c, d po řadě vrcholy se stupni 1, 1, 8, 9. Z vrcholu d musí vést hrany do všech devíti ostatních vrcholů, tedy i do a a b. Tudíž z c už nemůže vést hrana do a ani do b, takže zbývá jen 7 vrcholů, kam by z c hrana vést mohla. Proto c nemůže mít stupeň 8 — máme hledaný spor.

Poznámky opravovatele: První část jste řešili buď úvahou (součet stupňů vrcholů je lichý) nebo pomoci Havlovy věty. Nezbývá než zopakovat, abyste psali jméno věty, název díla, autora, nakladatelství a číslo stránky, kde je možno danou informaci najít.

Podobně i poslední část jste řešili buď úvahou (postupně jste generovali hrany z vrcholu se stupněm 9, pak 8 a ukázali jste na spor při vrcholech se stupněm 1.

Prostřední část byla nejnáročnější. Našla se řešení pomocí Havlovy věty (ta říká, jak poznat, zda existuje graf s daným skóre), v nichž autoři zapomněli, že se ve větě o vlastnosti bipartitnost nehovoří. Další řešitelé převedli úlohu na úlohu rozdělit množinu $\{6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 5, 3, 3, 3, 3, 3\}$ na dvě podmnožiny se stejným součtem prvků a pouze konstatovali, že to nejde. Nejlepší řešení byla taková, kde se ona nemožnost dokázala, např. pomocí dělitelnosti třemi.

2. úloha

Graf je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje lichý cyklus. Dokažte.

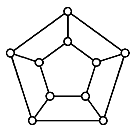
Když graf obsahuje lichý cyklus (tj. vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_{2n+1}$ takové, že z v_1 vede hrana do v_2 a v_{2n+1}, z v_2 do v_1 a $v_3, \ldots$), pak není bipartitní. Je-li totiž v_1 v jedné partitě, musí být v_2 v druhé (jinak by mezi dvěma vrcholy z téže partity vedla hrana), v_3 v první (z téhož důvodu), v_4 v druhé, …, v_{2n} v druhé, v_{2n+1} v první, a to nejde: v_1 a v_{2n+1} jsou oba z první partity a přitom jsou spojeny hranou.

Nyní dokážeme, že neobsahuje-li graf (označme ho G) lichý cyklus, pak je bipartitní. Předpokládejme, že G je souvislý, jinak můžeme rozdělovat každou komponentu zvlášť. K vlastnímu rozdělení užijeme K — libovolnou kostru grafu.[5] K, coby graf bez cyklů, je zjevně bipartitní, můžeme tedy jeho vrcholy (čili i všechny vrcholy G) rozdělit do partit. Víme, že mezi dvěma vrcholy z téže partity nevede žádná hrana v K, potřebujeme ukázat, že ani v G. Nechť pro spor existují vrcholy u, v z téže partity, které jsou v G spojeny hranou. Strom je souvislý, takže mezi u a v vede cesta v K. Podobným postupem jako v prvním odstavci zjistíme, že tato cesta má sudou délku, takže spolu s hranou uv tvoří lichý cyklus — spor, v G nejsou liché cykly.

Poznámky opravovatele: Nejčastější chybou bylo, že jste z bipartitnosti sudého cyklu a necyklických grafů usoudili bez dalšího odůvodňování, že to, co vznikne jejich „složením“ (takovým, že nevznikne lichý cyklus) je také bipartitní graf. To dle mého názoru není o mnoho jednodušší, než tvrzení úlohy. Další častou chybou bylo, že jste za cyklus považovali něco, co cyklem není (konkrétně uzavřenou cestu, v níž se mohly opakovat vrcholy).

3. úloha

Kolik vrcholů může mít (1) 3-regulární (2) k-regulární graf?



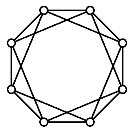
(1) Označme n počet vrcholů takového grafu. Dle lemmatu z řešení 1. úlohy musí být $3n$ a tedy i n sudé. Dále musí být $n \geq 4$, jinak by z žádného vrcholu neměly ty tři hrany kam vést. Ukážeme, že tyto podmínky pro existenci grafu postačují, čili že pro každé sudé $n \geq 4$ existuje 3-regulární graf o n vrcholech. Mohli bychom se pochopitelně odvolat na část (2), ale zkonstruujeme jiný graf. Pro $n = 4$ vezmeme K_4. Pro $n > 4$ vezmeme dva cykly o délce $n/2$ (což je celé číslo), hranou spojíme 1. vrchol z jednoho cyklu s 1. vrcholem z druhého cyklu, 2. vrchol z prvního cyklu s 2. vrcholem z druhého cyklu, …, viz obrázek (kde $n/2 = 5$). Z každého vrcholu vedou dvě hrany v příslušném cyklu a jedna hrana mezi cykly, graf je tedy 3-regulární.

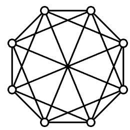
[5] Z grafu umazáváme hrany, až nezbudou žádné cykly. Učeně řečeno: kostra je maximální podgraf, který je strom.

(2) Stejně jako v (1) zjistíme, že nk musí být sudé a $k < n$. Nyní pro všechna n, k, která toto splňují, zkonstruujeme k-regulární graf s n vrcholy. Na obrázcích jsou ilustrovány případy $n = 8$, $k = 4$ a $n = 8$, $k = 5$.

Nejprve probereme případ sudého k. Vezměme vrcholy pravidelného n-úhelníku a každý vrchol spojme s jeho sousedy, druhými sousedy (tj. sousedy sousedů), ... , $\frac{k}{2}$-tými sousedy. Protože $k < n$, nevzniknou násobné hrany, a tedy dostaneme k-regulární graf.

Nechť je nyní k liché, a tedy n sudé. Použijeme konstrukci z předchozího odstavce pro n a $k - 1$. Protože $k < n$, jsou nejdelší diagonály neobsazené. Po jejich doplnění získáme k-regulární graf.





Poznámky opravovatele: Naprostá většina řešitelů se spokojila s důkazem, že pro k-regulární graf na n vrcholech musí být kn sudé (a $k < n$). To však vypovídá pouze o k-regulárních grafech, kde kn je liché — totiž takové grafy nemohou existovat. Nic to však neříká o tom, že takový graf existuje třeba pro $k = 4$, $n = 6$. Tito řešitelé se museli spokojit s dvěma body. Zvláštně také působilo, když řešitel po úpravách dospěl v případě $2|k$ k tomu, že $n \in \mathbb{N}$. Nebylo to jasné už od počátku?

Podobně to, že se vám nějaký graf nepodařilo najít, nezaručuje jeho neexistenci. K častým chybám také patřilo, že jste pri důkazech neexistence grafů mimoděk předpokládali další omezující podmínky (obsahuje cyklus, je úplný, ...). Také prohlásíte-li, že jistě umíme vybrat hrany s nějakými vlastnostmi, měli byste si kontrolovat, zda-li to není problém přinejmenším stejně složitý, jako vyřešit celou úlohu (a je-li to vůbec možné).

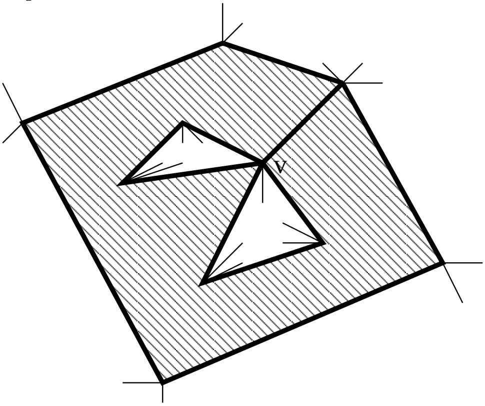
Také bych znovu upozornil na to, že platí-li nějaké tvrzení pro prvních několik případů, nevyplývá z toho pravdivost pro případy všechny. Dávejte si větší pozor na používání zaklínadel „analogicky dokážeme“ popřípadě „je zřejmé“. Jistě není nutné psát do řešení vše, než ale takovéto zaklínadlo napíšete, mělo by být pravidlem, že si onen „zřejmý“ důkaz uděláte stranou. Vyhnete se tak nepříjemným situacím, kdy „ozřejmíte“ něco nepravdivého.

4. úloha

Pokud má rovinný graf všechny stupně sudé, pak lze (v jeho libovolném nakreslení) obarvit stěny dvěma barvami tak, že sousední stěny (tj. takové, které mají společnou hranu) mají různou barvu.

Důkaz provedeme indukcí podle počtu hran. Pro graf bez hran (tedy s jedinou stěnou) tvrzení jistě platí. Nechť tvrzení platí pro všechny grafy s méně než n hranami. Mějme nyní libovolný rovinný graf G se sudými stupni a s n hranami, dále mějme jedno jeho nakreslení. Zvolme v tomto nakreslení libovolnou stěnu a označme ji F, dále označme $e_1, e_2, \ldots, e_m$ hrany, které F ohraničují. Uvažme graf G', který vznikne z G vypuštěním hran $e_1, e_2, \ldots, e_m$. V dalším odstavci ukážeme, že i G' má všechny stupně sudé, a protože má méně hran než G a je zjevně rovinný, lze (mj. i v nakreslení určeném nakreslením G) všechny jeho stěny obarvit dvěma barvami tak, že sousední stěny nebudou stejnobarevné. G' má následující stěny: (1) sjednocení F a jeho sousedů a (2) ostatní stěny G. Změníme barvu F na opačnou, všemu ostatnímu necháme stejnou barvu. Takto dostaneme žádané obarvení stěn v daném nakreslení G. Tím je důkaz indukcí proveden.

Zbývá ukázat, že G' má skutečně sudé stupně, čili že každého vrcholu v v grafu G se dotýká sudý počet hran z $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Označme k počet „cípů“, jimiž se F dotýká v (pro vyšrafovanou stěnu na obrázku je $k = 3$). Žádné dva cípy nemohou mít společnou hranu e (takže obrázek je vlastně špatně). Po odebrání hrany e by se totiž komponenta obsahující v rozpadla na dvě (rozmysli si, proč) a v obou by byl právě jeden vrchol s lichým stupněm, což není možné dle lemmatu v řešení úlohy 1 (1). Takže každý cíp používá „své“ dvě hrany z $e_1, e_2, \ldots, e_m$ a v se dotýká $2k$ z nich. Tím je důkaz u konce.



Poznámka: možná Ti připadalo zbytečné mluvit stále o stěnách v nějakém nakreslení grafu a ne přímo o stěnách toho grafu. Potíž je v tom, že týž graf můžeme nakreslit různě. Existuje například graf, který lze nakreslit tak, že všechny jeho stěny jsou pětiúhelníky, ale také tak, že mezi jeho stěnami jsou čtyř-, pěti- i šestiúhelníky. (Zkus nějaký takový graf najít.)

Poznámky opravovatele: Většina úspěšných řešitelů buď dokazovala indukcí podle počtu hran, („umazávali“ hrany náležející vnější stěně), nebo dokazovala bipartitnost duálního grafu za použití tvrzení druhé úlohy — v tomto případě pokud nebylo dokázáno, ale bylo používáno tvrzení, že sjednocení sudých kružnic neobsahuje lichou kružnici, strhávala jsem 2 body.

Hezký nápad, že rovinný graf se sudými stupni je sjednocení hranově disjunktních kružnic, a tedy lze jeho stěny obarvit podle parity počtu kružnic, ve kterých daná stěna leží, zdárně dokázala jen Lenka Zdeborová, a obdržela za to $+i$.

Co se mi nelíbilo: asi čtvrtina „řešení“ vypadala tak, že bylo ukázáno jak lze obarvit stěny v okolí jednoho (libovolného) vrcholu a důkaz byl odbyt tvrzením, že takto postupně obarvím okolí všech vrcholů a tedy celý graf. Tohle ale nemusí obecně jít (takže 0 bodů). To, že umím obarvit okolí každého vrcholu zvlášť ještě neznamená, že to lze pro všechny vrcholy zároveň! Například okolí každého vrcholu rovinného grafu lze zřejmě obarvit třemi barvami, ale pro celý graf už to jít nemusí — zkuste to třeba pro K_4.

5. úloha

Procházíme labyrintem podle následujících pravidel. (Na začátku jsme na křižovatce S.)

(1) Nikdy neprojdeme toutéž cestou tímtéž směrem dvakrát.

(2) Kdykoli přijdeme na křižovatku $K \neq S$, kterou jsme dosud nenavštívili, označíme cestu, po níž jsme přišli. K odchodu z K použijeme tuto cestu jen tehdy, když nemáme jinou možnost.

(3) Když v odchodu z křižovatky, na níž se nacházíme, brání pravidlo (1), skončíme.

Dokažte, že pokud existuje východ z labyrintu, pak ho tímto postupem najdeme, jinak skončíme zpátky na křižovatce S.

Nejprve si upřesníme, co je to labyrint. Pro nás to bude konečný souvislý graf. (Labyrint by mohl být i multigraf: mezi dvěma křižovatkami může vést více cest. To by v našem důkazu příliš nevadilo, přesto si raději vystačíme s „obyčejným“ grafem. Do přebytečné hrany můžeme umístit pomyslnou křižovatku stupně dva a tím z multigrafu udělat graf. Tato náhrada je korektní: při prvním příchodu na křižovatku stupně dva musím odejít jinudy než jsem přišel, při druhém rovněž tak. Tedy tato křižovatka se z hlediska popsaného algoritmu „chová jako by nebyla“.) Dvě křižovatky jsou speciální: S — tam začínáme a V — tam je východ.

Vzhledem ke konečnosti grafu a k tomu, že každou hranu projdeme nejvýše dvakrát, jednou určitě skončíme. Nejprve ukážeme, že skončíme v S. Uvažme nějaké $K \neq S$, pro něž hrozí, že v něm skončíme, tj. všech $d(K)$ cest k odchodu z K už bylo použito. Pokud jsme z K odešli, museli jsme do něj předtím i přijít, takže k příchodu do K jsme použili také všech $d(K)$ cest. Protože žádnou cestou nejdeme dvakrát týmž směrem, po $d(K)$-tém odchodu z K se do K už nikdy nemůžeme vrátit, nemůžeme v něm tedy ani uváznout.

Nyní zdůvodníme, proč musíme najít východ. Ukážeme, že předtím, než skončíme v S, projdeme každou hranu (a to v obou směrech) i každý vrchol. Nazvěme vrchol dobrý, pokud jsme všechny hrany z něj vycházející prošli oběma směry. Ukážeme, že každý vrchol je dobrý. S je jistě dobrý: až v S skončíme, budou použity všechny hrany sousedící s S směrem od S. Takže jsme z S odešli $d(S)$-krát, a tedy jsme také $d(S)$-krát přišli, neboli prošli jsme všechny cesty sousedící s S směrem dovnitř.

Nyní ukážeme, že všechny vrcholy, které jsme při průchodu grafem navštívili, jsou dobré. Pro spor předpokládejme, že jsme navštívili nějaký špatný vrchol a označme X první z nich. Protože $X \neq S$, vešli jsme do X poprvé z nějakého vrcholu Y (a hranu z Y jsme v X označili). Vrchol Y je dobrý (dle volby X), takže jsme použili hranu XY (v tomto směru). Podle pravidla (2) to ovšem znamená, že jsme z X odešli všemi $d(X)$ chodbami, a tedy jsme i všemi $d(X)$ chodbami vešli. Tudíž X není špatný — spor.

Zbývá ověřit, že nemůže existovat vrchol, který bychom vůbec nenavštívili. Opět sporem: nechť existuje vrchol N, který jsme nenavštívili. Graf je souvislý, tedy existuje cesta P z S do N. Počátek P jsme navštívili, konec nikoliv, proto na P existují va sousední vrcholy A a B, kde A jsme navštívili a B ne (vezmeme třeba za A ten nenavštívený vrchol na P, na nějž při procházení P narazíme naposledy). A je navštívený, tedy dle předchozího odstavce dobrý, a proto jsme navštívili i všechny jeho sousedy, speciálně i B. A to je spor, který dokazuje, že všechny vrcholy jsme navštívili.

Poznámky opravovatele: Většina správných řešení používala podobnou myšlenku jako autorské řešení. Objevilo se také několik důkazů matematickou indukcí podle počtu hran (hranu, kterou jsem prošel smažu, na menší graf aplikuju indukční předpoklad, ...).

Za důkaz toho, že skončíme na S jsem dával 2 body. Několik řešitelů tvrzení vyvrátilo — podařilo se jim totiž nalézt protipříklad. Navšimli si však toho, že při své procházce porušili pravidlo (2) $\Rightarrow$ dostali 0 bodů. Co se mi nelíbilo:

Mnozí řešitelé si vůbec neuvědomili, že je třeba něco dokazovat. Jejich řešení vypadalo vpodstatě takto: pořád jdu, jdu a až dojdu na konec (přičemž projdu všechny vrcholy), tak se vrátím. Bylo potřeba dokázat, že nemohu skončit, dokud jsem neprošel všechny vrcholy; dále to, že nemohu skončit mimo S. V řešeních ohodnocených 0 body jsem toto při nejlepší vůli nenašel.

Častý obrat byl: graf si rozdělím na strom[6] a cykly. Pak rozeberu zvlášť stromy, zvlášť kružnice a řeknu, že pak už je to jasné. Tato řešení však většinou už neuváděla, **jak** graf na strom a na cykly rozdělí, a hlavně, jakou souvislost to má s naší úlohou — jak zaručí, že človíček bloudící labyrintem bude respektovat jejich rozdělení.

[6] tj. souvislý graf bez cyklů (=kružnic)