2. série

Téma: Množiny bodů

Termín odeslání: 27. října 1997

1. ÚLOHA

V prostoru je dáno 7 vrcholů krychle. K této množině budeme postupně přidávat body tak, že každý nový bod vznikne jako obraz bodu z množiny ve středové souměrnosti podle jednoho z bodů množiny. Můžeme tímto způsobem po konečně mnoha krocích získat i osmý vrchol krychle?

2. ÚLOHA

Pro množinu M, která se skládá z konečně mnoha bodů roviny, platí: Pro každé dva body z M existuje třetí bod z M, že tyto body tvoří rovnostranný trojúhelník. Určete největší možný počet bodů takovéto množiny M.

3. ÚLOHA

V rovině je dáno 3000 přímek tak, že žádné 2 nejsou rovnoběžné a žádné 3 neprocházejí jedním bodem. Takto se nám rovina rozpadne do mnoha útvarů. Dokažte, že tímto způsobem vznikne minimálně 1000 trojúhelníků.

4. ÚLOHA

Množinu M bodů roviny nazveme *tupou*, tvoří-li každá trojice bodů z M tupoúhlý trojúhelník. Dokažte, že platí: Ke každé tupé množině M s konečně mnoha body existuje bod P z dané roviny, že $P \notin M$ a $M \cup \{P\}$ je také tupá. Zjistěte, zda bude tvrzení platné, nahradíme-li slovo konečný slovem nekonečný.

5. ÚLOHA

Buď M množina n bodů v prostoru ($n > 2$). Spojnice těchto bodů (=úsečky) nechť jsou různě dlouhé a r z nich je obarveno. Dále budiž m nejmenší celé číslo, pro které platí: $m \geq \frac{2r}{n}$. Dokažte, že existuje tah (tj. lomená čára, která může sama sebe libovolně protínat) z m obarvených úseček, ve kterém jsou tyto vzestupně uspořádány podle délky.

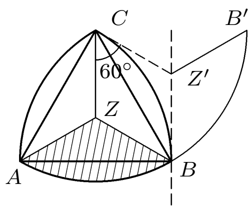
Řešení 2. série

1. úloha
V prostoru je dáno 7 vrcholů krychle. K této množině budeme postupně přidávat body tak, že každý nový bod vznikne jako obraz bodu z množiny ve středové souměrnosti podle jednoho z bodů množiny. Můžeme tímto způsobem po konečně mnoha krocích získat i osmý vrchol krychle?

Odpověď zní ne. Stačí zavést systém souřadnic tak, že vrcholy krychle mají souřadnice (i, j, k), kde $i, j, k \in \{0, 1\}$, přičemž náš osmý vrchol leží v počátku, tj. v bodě (0,0,0). Zobrazíme-li bod (p_1, p_2, p_3) podle bodu (z_1, z_2, z_3), bude mít obraz souřadnice $(2z_1 - p_1, 2z_2 - p_2, 2z_3 - p_3)$. Jsou-li tedy $p_1, p_2, p_3, z_1, z_2, z_3$ celočíselné, zůstane při přechodu z (p_1, p_2, p_3) na obraz zachována parita všech souřadnic. Jelikož žádný ze sedmi vrcholů výchozí množiny nemá všechny tři souřadnice sudé, nemůžeme ani po konečně mnoha krocích takový bod dostat. Speciálně nezískáme tedy ani osmý vrchol $(0, 0, 0)$.

Poznámky opravovatele: Až na pár výjimek zodpověděli všichni řešitelé otázku ze zadání správně. Problém však byl ve zdůvodnění správnosti této odpovědi. Řešení obsahující pouze odpověď dostala nula bodů, stejně jako několik řešitelů, kteří úlohu špatně pochopili. Mnoho řešitelů zdůvodňovalo svoji odpověď pouze obrázkem (obdrželi až tři body podle toho, jak daleko byli od správného řešení). Několik řešitelů založilo svůj důkaz na matematické indukci. Ti si za mnohdy neobratný a zdlouhavý postup vysloužili $-i$. Řešení využívající stejnou myšlenku jako autorské řešení byla vesměs správná a dostala 5 bodů.

2. úloha
Pro množinu M, která se skládá z konečně mnoha bodů roviny, platí: Pro každé dva body z M existuje třetí bod z M, že tyto body tvoří rovnostranný trojúhelník. Určete největší možný počet bodů takovéto množiny M.



Hledaná maximální množina M obsahuje zřejmě alespoň tři body. Je tedy neprázdná a konečná, pročež můžeme vybrat dva body A, B tak, že vzdálenost $|AB|$ je maximální vzdáleností dvou bodů z M. K bodům A, B existuje dle zadání bod C, že ABC je rovnostranný trojúhelník. Všechny body M leží v úseku omezeném oblouky AB, BC a AC (neboli v průniku kružnic opsaných kolem A, B, C s poloměrem $|AB|$). Kdyby ležely vně, máme spor s maximalitou AB. Obsahuje-li M kromě bodů A, B, C ještě další bod P, můžeme bez újmy na obecnosti říci, že leží ve šrafovaném úseku ABZ. Otočení o $60°$ kolem C převede tento úsek na úsek $BB'Z'$. Přímka BZ' je kolmá na AB a je tedy tečnou ke kružnici se středem A a poloměrem AB. B je tedy jediný bod, který leží v průniku úseku $BB'Z'$ s úsekem omezeným oblouky AB, BC, AC.

Dle zadání však víme, že ke každým dvěma bodům (tedy i k CP) musí existovat třetí s nimž tvoří rovnostranný trojúhelník. Takovýto třetí vrchol by musel ležet v $BB'Z'$ (nebo v úseku získaném jako obraz úseku $BB'Z'$ v osové souměrnosti dle osy CZ), což by (jak jsme již uvedli výše) byl spor s maximalitou AB.

Poznámky opravovatele: Skoro všetky riešenia, ktoré som ohodnotil $0+0i$ boli chybné v tom, že sa mohlo stát, že existuje taká množina o n bodoch, ale o $n-1$ bodoch nie a o $n-k$ bodoch zase môže existovať. A tento prípad nikto neuvažoval.

Mnoho z vás napísalo, že minimálny počet bodov je tri, ale podmienka zo zadania platí aj pre jeden bod.

3. úloha

V rovině je dáno 3000 přímek tak, že žádné 2 nejsou rovnoběžné a žádné 3 neprocházejí jedním bodem. Takto se nám rovina rozpadne do mnoha útvarů. Dokažte, že tímto způsobem vznikne minimálně 1000 trojúhelníků.

Ke každé přímce p můžeme najít jiné dvě přímky q, r takové, že průsečík přímek q, r (nazvěme ho A) má od p nejmenší vzdálenost (tj. menší nebo rovnou než průsečíky jiných dvou přímek). Označme B a C body, v nichž přímky q a r protínají p. Trojúhelník ABC již žádná další přímka neprotíná (dostali bychom spor s tím, že A má nejmenší vzdálenost od p). Pro každou z 3000 přímek takto dostaneme jeden trojúhelník, přičemž do celkového množství můžeme jeden trojúhelník počítat až třikrát (s každou jeho stranou). Přesto však získáme minimálně 1000 trojúhelníků.

4. úloha

Množinu M bodů roviny nazveme *tupou*, tvoří-li každá trojice bodů z M tupoúhlý trojúhelník. Dokažte, že platí: Ke každé tupé množině M s konečně mnoha body existuje bod P z dané roviny, že $P \notin M$ a $M \cup \{P\}$ je také tupá. Zjistěte, zda bude tvrzení platné, nahradíme-li slovo konečný slovem nekonečný.

Nejprve rozeberme konečný případ. Pro každé dva body A, B můžeme vytvořit pás, který je ohraničen přímkami procházejícími A, resp. B a kolmými na spojnici AB. Leží-li bod C mimo tento pás a mimo přímku AB (ve skutečnosti také leží-li uvnitř kruhu opsaného nad úsečkou AB), trojúhelník ABC je tupoúhlý. Tedy pro každé dva body existuje „necelý“ pás (plus přímka), kam nemůžeme umístit třetí bod, neboť bychom porušili tupost. Jelikož bodů máme konečně mnoho, máme konečně mnoho i jejich dvojic a konečným sjednocením „necelých“ pásů (plus přímky) nepokryjeme rovinu. Stále nám tedy zbyde místo, kam můžeme umístit další bod, aniž bychom porušili tupost.

Tvrzení pro nekonečný případ není pravdivé. Jako protipříklad si stačí představit půlkružnici nad nějakou úsečkou AB, ze které odebereme krajní bod B. Rozmysli si prosím, proč jde o protipříklad.

Poznámky opravovatele: První část (pro M konečnou) jsem hodnotil třemi body a druhou část dvěma body. Jeden bod jsem strhával za chybějící důkaz tvrzení: „konečně mnoho pásů konečné šířky nemůže pokrýt celou rovinu". Důkaz nebyl uveden ve vzorovém řešení, ale tady je: jistě existuje přímka p, která není rovnoběžná s žádným pásem, každý pás na ní tedy vytne úsečku konečné délky a tyto úsečky jistě nepokryjí celou přímku (součet jejich délek je konečný), proto na přímce p najdeme bod P, jehož existenci jsme chtěli dokázat.

5. úloha

Buď M množina n bodů v prostoru ($n > 2$). Spojnice těchto bodů (=úsečky) nechť jsou různě dlouhé a r z nich je obarveno. Dále budiž m nejmenší celé číslo, pro které platí: $m \geq \frac{2r}{n}$. Dokažte, že existuje tah (tj. lomená čára, která může sama sebe libovolně protínat) z m obarvených úseček, ve kterém jsou tyto vzestupně uspořádány podle délky.

Představíme si obarvené úsečky jako síť r cestiček a body jako lidi. Nejprve si mohou vyměnit místa lidé stojící na krajích nejkratší cestičky, pak lidé stojící na krajích druhé nejkratší cestičky, ..., až nakonec lidé na krajích nejdelší cestičky. Tímto způsobem projdou každou cestičkou právě dva lidé, celkově se tedy procestuje $2r$ cestiček. Dle Dirichletova principu[1] tedy musí nějaký člověk projít aspoň $\frac{2r}{n}$ cestiček. Jelikož se cesta každého člověka skládá z na sebe navazujících cestiček rostoucí délky, je zaručena existence obarvené cesty z minimálně m úseček rostoucí délky.

Jiné řešení: Uvažujme pro každý bod P z M tahy, které začínají v P, skládají se pouze z obarvených úseček a v nichž jsou tyto úsečky uspořádány vzestupně dle délky. Pro každý bod P označíme maximální počet úseček v takovémto tahu $s(P)$. Pak stačí dokázat platnost této nerovnosti:

$$\sum_{P \in M} s(P) \geq 2r$$

Pak totiž musí dle Dirichletova principu existovat takový bod P_0, pro nějž platí $s(P_0) \geq \frac{2r}{n}$ tedy i $s(P) \geq m$.

Důkaz nerovnosti si zkus sám (užije se indukce podle r).

Poznámky opravovatele: Od této úlohy jsme obdrželi pouze dvanáct řešení. Bohužel žádný z řešitelů nevyřešil úlohu dle našich představ, a tak jsem udělil pouze nula nebo jeden bod. Nejčastější chybou bylo špatné pochopení zadání. V několika případech mi též nebylo jasné, jakou má souvislost předkládané řešení s naší úlohou. Někteří řešitelé používali rovněž k řešení některé „zjevné" geometrické skutečnosti. Ve většině případů se mi podařilo nalézt protipříklad, ale i při té nejlepší víře se mi některé myšlenky nepodařilo pochopit (a to jsem nad některými (i na první pohled nelogickými) větami proseděl i hodiny). Každopádně jsem tato řešení ještě s jinými opravovateli konzultoval. Pokud se i přesto cítíš ukřivděn, klidně nám své řešení s trochu lepším vysvětlením pošli zpět, já se nebojím přiznat chybu ...

[1] Dirichletův princip říká celkem přirozenou věc: když rozdělujeme n předmětů do k přihrádek, je v alespoň jedné přihrádce alespoň n/k předmětů.