6. série

Téma: Finální myš(maš)

Datum odeslání: 18. KVĚTNA 1997

1. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte všechna $\alpha \in (0, 2\pi)$ taková, že čísla $\sqrt{2}\cos\alpha$ a $\sin\alpha$ jsou racionální.

2. ÚLOHA (5 BODŮ)

Hamižný generál prohrál sázku a byl nucen vyplatit několika vojáčkům po k korunách. Nechtěl se ale peněz tak snadno vzdát, proto si vzal svých k korun, posadil se s vojáčky (každý z nich měl k korun od generála) okolo kulatého stolu a hráli následující hru. Generál náhodně určí dva vojáčky (včetně sebe), ti si střihnou a vítěz dostane korunu od souseda po levici a poražený dá korunu sousedovi po levici (pokud ten, co má platit, má peníze, jinak se nestane nic). Toto opakují, dokud to generála nepřestane bavit. Generál hru přerušil ve chvíli, kdy měl právě $kn-1$ korun a všichni vojáčci se tváří, že už nemají vůbec nic. Poradíte hamižnému generálovi, kdo má poslední korunu?

3. ÚLOHA (5 BODŮ)

(a) Uvažujme číslo A zapsané v dekadickém zápise ve tvaru

$$A = 7^{4^{1348}}.$$

Označme symbolem A_r jeho poslední trojčíslí v r-adické soustavě. Vyjádřete v dekadické soustavě číslo

$$B = \max_{2 \le r \le 7} A_r$$

(tj. B je maximum z čísel A_r, pro $r \in \{2, 3, \ldots, 7\}$).

(b) Uvažujme Ludolfovo číslo π zapsané ve dvojkové soustavě a označme jeho i-tou číslici za desetinnou čárkou symbolem a_i. Rozhodněte, zda existují taková přirozená čísla c, d, že

$$A \le c \le d \quad \text{a} \quad (a_c a_{c+1} a_{c+2} \ldots a_{d-1} a_d)_7 \text{ je násobkem čísla } B,$$

kde A, B jsou čísla z bodu (a).

(c) Číslo A nám připomíná, že 7. dubna 1348 císař římský[1] a král český Karel IV. založil pražskou univerzitu, první vysokou školu tohoto druhu ve střední Evropě; dnes je pojmenována na jeho počest. Jaké výročí oslaví **Univerzita Karlova** příští rok?

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

V rovině jsou kružnice $k_1, \ldots, k_4$, l tak, že

(1) k_i se dotýká l v bodě A_i ($i = 1, 2, 3, 4$), A_i jsou po dvou různé

(2) k_1 se dotýká k_2, k_2 se dotýká k_3 a k_3 se dotýká k_4 (všechny doteky jsou vnější)

[1] Přesněji, 7. dubna 1348 založil Karel IV. univerzitu z moci českého krále (již 26. ledna 1347 k tomu dal svou listinou souhlas papež Kliment VI.) a 14. ledna 1349 potvrdil z moci římského krále všechna její práva a svobody (tzv. eisenašský diplom). Císařské koruny dosáhl Karel IV. až později při své římské jízdě 5. dubna 1355.

Bod, který je na kružnici l naproti A_1 označíme B, tečnu k l v B nazvěme b. Průsečíky přímky b a A_1A_i označme B_i ($i = 2, 3, 4$).

Kružnice k_1, k_4 a l jsou pevné, k_2 a k_3 se mění (při zachování výše uvedených pravidel). Ukažte, že poměr $|B_2B_3| / |B_3B_4|$ nezávisí na volbě k_2 a k_3.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť $F_0 = 3$, $F_1 = 0$, $F_2 = 2$ a $F_{n+3} = F_{n+1} + F_n$. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení: „Nechť p je prvočíslo. Pak p dělí F_p."

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Malý čertík dostal k Vánocům nový aero-hydroplán a nyní plánuje výlet po reálné ose. V každém bodě této osy může mít libovolnou nadmořskou výšku, pohybovat se však musí spojitě. Z kolika různých možností si může vybrat?

Pro suchary: nechť $\mathcal{C}$ značí množinu spojitých funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dokažte, že $\mathcal{C} \asymp \mathbb{R}$.

Řešení 8. série

1. úloha

Najděte všechna $\alpha \in (0, 2\pi)$ taková, že čísla $\sqrt{2}\cos\alpha$ a $\sin\alpha$ jsou racionální.

Položme $x = \sqrt{2}\cos\alpha$ a $y = \sin\alpha$. Potom

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1\,. \tag{1}$$

Hledáme tedy na elipse E o rovnici (1) všechny body $[x, y]$, jejichž obě souřadnice jsou racionální. Uvažujme následující zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to E$

$$\varphi(A) = \left[\frac{4A}{A^2+2}, \frac{A^2-2}{A^2+2}\right] \tag{2}$$

Geometrický význam: bod na ose x o souřadnicích $[A, 0]$ spojíme s bodem elipsy $[0, 1]$ přímkou. Tato přímka protíná elipsu E ve dvou bodech. Jedním z nich je zřejmě $[0, 1]$, souřadnice druhého jsou dány vzorcem (2). Ověřte výpočtem a uvědomte si, že φ prostě zobrazí $\mathbb{R}$ na $E \setminus \{[0, 1]\}$. Inverzní zobrazení je pak dáno předpisem

$$A = \varphi^{-1}([x, y]) = \frac{x}{1-y}\,. \tag{3}$$

Z vzorců (2) a (3) snadno plyne, že

$$A \text{ je racionální} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{4A}{A^2+2} \text{ a } \frac{A^2-2}{A^2+2} \text{ jsou racionální}$$

Všechny body o racionálních souřadnicích na E najdeme tak, že do vzorce (2) dosadíme za A všechna racionální čísla:

$$\left[\frac{4pq}{p^2+2q^2}, \frac{p^2-2q^2}{p^2+2q^2}\right], \qquad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$$

Uvědomte si, že jsme takto našli i všechna celočíselná řešení rovnice

$$a^2 + 2b^2 = c^2 .$$

Jsou to trojice

$$[4pq, p^2 - 2q^2, p^2 + 2q^2] , \qquad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} .$$

Konečně hledané úhly α nalezneme užitím cyklometrických funkcí (pozor na znaménka a kvadranty!).

2. úloha

Hamižný generál prohrál sázku a byl nucen vyplatit několika vojáčkům po k korunách. Nechtěl se ale peněz tak snadno vzdát, proto si vzal svých k korun, posadil se s vojáčky (každý z nich měl k korun od generála) okolo kulatého stolu a hráli následující hru. Generál náhodně určí dva vojáčky (včetně sebe), ti si střihnou a vítěz dostane korunu od souseda po levici a poražený dá korunu sousedovi po levici (pokud ten, co má platit, má peníze, jinak se nestane nic). Toto opakují, dokud to generála nepřestane bavit. Generál hru přerušil ve chvíli, kdy měl právě $kn - 1$ korun a všichni vojáčci se tváří, že už nemají vůbec nic. Poradíte hamižnému generálovi, kdo má poslední korunu?

Vojáčky si očíslujeme čísly 1 až $n - 1$ po řadě tak, jak sedí kolem stolu, generálovi dáme číslo 0. Každé koruně pak přiřadíme číslo vojáčka, který ji právě vlastní. Čísla všech korun sečteme. Zbytek tohoto čísla (označme ho č) po dělení n se během hry nemění. Každé kolo jedna koruna zvýší své číslo o jedničku a druhá jej o jedničku sníží, případně jedna sníží (resp. zvýší) o jedna a druhá sníží (resp. zvýší) o $n - 1$.

Na začátku hry je $č = k + 2k + \cdots + (n-1)k = k\frac{n(n-1)}{2} = n\frac{k(n-1)}{2}$. Na konci je č rovno číslu vojáčka, který vlastní poslední korunu. Vidíme, že pokud je $n - 1$ nebo k sudé, pak $č \mod n = 0$ a poslední korunu by měl na konci hry generál, což není možné. Pokud jsou $n - 1$ i k lichá čísla, pak jistě $č \bmod n = \frac{n}{2}$ a poslední korunu tedy má vojáček s číslem $\frac{n}{2}$.

Poslední korunu má vojáček sedící naproti generálovi a správná odpověď zní: „Ne, hamižnému generálovi neporadíme.“

Poznámky k došlým řešením:

Přišla celkem čtyři řešení. Nikdo z těchto čtyř řešitelů správně nepochopil zadání, takže chyba asi nebude na vaší straně. Formulací „ ... jinak se nestane nic“ jsem myslel, že v tomto případě žádný z vojáčků nic nepošle.

3. úloha

(a) Uvažujme číslo A zapsané v dekadickém zápise ve tvaru

$$A \ = 7^{4^{1348}} .$$

Označme symbolem A_r jeho poslední trojčíslí v r-adické soustavě. Vyjádřete v dekadické soustavě číslo

$$B = \max_{2 \le r \le 7} A_r$$

(tj. B je maximum z čísel A_r, pro $r \in \{2, 3, \ldots, 7\}$).

(b) Uvažujme Ludolfovo číslo π zapsané ve dvojkové soustavě a označme jeho i-tou číslici za desetinnou čárkou symbolem a_i. Rozhodněte, zda existují taková přirozená čísla c, d, že

$$A \le c \le d \quad \text{a} \quad (a_c a_{c+1} a_{c+2} \dots a_{d-1} a_d)_7 \text{ je násobkem čísla } B,$$

kde A, B jsou čísla z bodu (a).
(c) Číslo A nám připomíná, že 7. dubna 1348 císař římský[2] a král český Karel IV. založil pražskou univerzitu, první vysokou školu tohoto druhu ve střední Evropě; dnes je pojmenována na jeho počest. Jaké výročí oslaví **Univerzita Karlova** příští rok?

(a)

Lemma (Eulerova věta). *Označme pro $m \in N$ symbolem $\varphi(m)$ počet přirozených čísel menších než m a s m nesoudělných. Nechť a je nesoudělné s m, pak*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m.$$

Důkaz: Je jednak v každé příručce o elementární teorii čísel, a není zas tak náročný, aby ho laskavý čtenář nemohl vymyslet jako cvičení.

Dále nepříliš těžkou kombinatorickou úvahou snadno nahlédneme, že pro m s prvočíselným rozkladem $m = p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_n^{q_n}$ lze Eulerovu funkci $\varphi(m)$ získat pomocí vztahu

$$\varphi(m) = m(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_n}).$$

Nyní se vrátíme k naší úloze. Budeme-li A_r vyjadřovat v dekadické soustavě, stačí pouze počítat zbytek při celočíselném dělení čísla A číslem r^3. K tomu využijeme Eulerovu větu a známých vlastností kongruencí.[3]

(A_2) : $$A = 7^{4^{1348}} \equiv (-1)^{4^{1348}} = 1 \pmod 8 \qquad \Rightarrow \qquad A_2 = 1$$

(A_3): Eulerova funkce[4] čísla $3^3 = 27$ je 18. Využitím zřejmé identity $2^7 \equiv 2 \pmod{18}$ máme

$$4^{1348} = 2^{2696} = 2^{55 \cdot 7^2 + 1} \equiv 2^{56} \equiv 2^8 \equiv 4 \pmod{18},$$

proto

$$A = 7^{4^{1348}} \equiv 7^4 = 49^2 \equiv (-5)^2 = 25 \pmod{27} \qquad \Rightarrow \qquad A_3 = 25.$$

(A_4): $4^3 = 64$, a proto využitím zřejmé[5] identity $7^8 \equiv 1 \pmod{64}$ máme

$$A = 7^{4^{1348}} = 7^{8^{898} \cdot 4} \equiv 1^4 = 1 \pmod{64} \qquad \Rightarrow \qquad A_4 = 1.$$

---

[2] Přesněji, 7. dubna 1348 založil Karel IV. univerzitu z moci českého krále (již 26. ledna 1347 k tomu dal svou listinou souhlas papež Kliment VI.) a 14. ledna 1349 potvrdil z moci římského krále všechna její práva a svobody (tzv. eisenašský diplom). Císařské koruny dosáhl Karel IV. až později při své římské jízdě 5. dubna 1355.

[3] Uvědomte si, že z binomické věty máme $(m \cdot p + q)^r \equiv q^r \pmod m$, pro $p, q, r, m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$.

[4] Zde i dále lze k rychlému vyčíslení Eulerovy funkce využít výše uvedený vztah.

[5] Zřejmé?! Nonono. Dejme tomu, že není těžké ji ověřit, po jistém uvažování i bez kalkulačky. Podobně chápej toto slovo i dále. Poznámka svědomitého Roberta.

(A_5): Eulerova funkce čísla $5^3 = 125$ je 100. Využitím zřejmé identity $4^6 \equiv -4 \pmod{100}$ máme

$$4^{1348} = 4^{224\cdot 6+4} \equiv 4^{228} = 4^{38\cdot 6} \equiv 4^{38} \equiv 4^8 \equiv (-4)^3 \equiv 36 \pmod{100},$$

proto

$$A = 7^{4^{1348}} \equiv 7^{36} = 7^{6\cdot 6} \equiv 24^6 \equiv 74^2 \equiv 101 \pmod{125} \qquad \Rightarrow \qquad A_5 = 101.$$

(A_6): Eulerova funkce čísla $6^3 = 216$ je 72. Využitím zřejmé identity $4^5 \equiv 4^2 \pmod{72}$ máme[6]

$$4^{1348} = 4^{269\cdot 5+3} \equiv 4^{269\cdot 2+3} = 4^{108\cdot 5+1} \equiv 4^{108\cdot 2+1} = 4^{43\cdot 5+2} \equiv 4^{43\cdot 2+2} = 4^{17\cdot 5+3} \equiv$$

$$\equiv 4^{17\cdot 2+3} = 4^{7\cdot 5+2} \equiv 4^{7\cdot 2+2} = 4^{3\cdot 5+1} \equiv 4^7 \equiv 4^4 \equiv 40 \pmod{72},$$

proto

$$A = 7^{4^{1348}} \equiv 7^{40} = 7^{4\cdot 10} \equiv 25^{10} \equiv 49^2 \equiv 25 \pmod{216} \qquad \Rightarrow \qquad A_6 = 25.$$

(A_7) : $$A = 7^{4^{1348}} \equiv 0 \pmod{7)^3} \qquad \Rightarrow \qquad A_7 = 0$$

Proto[7] B=101.

(b) Uvažujme $(B+1)$ čísel tvaru $(a_k a_{k+1} \dots a_{A+B-1} a_{A+B})_7$, kde k nabývá hodnot $A, A+1, \dots (A+B)$. Mezi těmito čísly existují z Dirichletova principu dvě (různá), která dávají stejný zbytek po dělení číslem B, nechť to jsou čísla $(a_c a_{c+1} \dots a_{A+B-1} a_{A+B})_7$, $(a_{d+1} a_{d+2} \dots a_{A+B-1} a_{A+B})_7$, kde $c \le d$. Jejich rozdíl $(a_c a_{c+1} \dots a_{d-1} a_d 00 \dots 00)_7$ je dělitelný B. Vzhledem k tomu, že B není dělitelné sedmi, nalezli jsme taková c, d, že platí podmínky požadované zadáním.

(c) 650

4. úloha

V rovině jsou kružnice $k_1, \dots, k_4, l$ tak, že

(1) k_i se dotýká l v bodě A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, A_i jsou po dvou různé
(2) k_1 se dotýká k_2, k_2 se dotýká k_3 a k_3 se dotýká k_4 (všechny doteky jsou vnější)

Bod, který je na kružnici l naproti A_1 označíme B, tečnu k l v B nazvěme b. Průsečíky přímky b a A_1A_i označme B_i $(i = 2, 3, 4)$.

Kružnice k_1, k_4 a l jsou pevné, k_2 a k_3 se mění (při zachování výše uvedených pravidel). Ukažte, že poměr $|B_2B_3| / |B_3B_4|$ nezávisí na volbě k_2 a k_3.

---

[6] Rychleji by nám pomohla k cíli též identita $4^{14} \equiv 4^2 \pmod{72}$, ale o té si myslím, že její nalezení bez kalkulačky již není tak jednoduché.

[7] Vzhledem k tomu, že $A_5 = 101$, je počítání A_2, A_3 a A_4 pro řešení naší úlohy naprosto zbytečné (tato čísla totiž mohou být nejvýše $4^3 - 1 = 63$). Bylo uvedeno pro poučení čtenáře.

Lemma. *Nechť k, l jsou kružnice o poloměrech m, n; t je jejich společná vnější tečna; K, L jsou příslušné dotykové body. Pak $|KL| = 2\sqrt{mn}$.*

Důkaz: zvládnete sami, nejsložitější, čeho se použije, je Pythagorova věta.

Nyní k vlastní úloze. Doporučuji kreslit si při čtení obrázek. Provedeme kruhovou inverzi se středem v A_1 a poloměrem $|A_1B|$, zinvertované útvary značme čárkou. Zjevně l' a k_1' jsou rovnoběžné přímky, $b' = l$ (a tedy i $l' = b$). Z posledního vztahu a z toho, že pro libovolný bod X leží X' na polopřímce $\mapsto A_1X$, je vidět, že $A_i' = B_i$ ($i = 2, 3, 4$). Takže (pro $i = 2, 3, 4$) bude k_i' kružnice dotýkající se l' v B_i, přičemž k_2' se dotýká obou z přímek l', k_1'; k_3' se dotýká k_2' a k_4'. Označme r_i poloměr k_i'. Užijeme dvakrát Lemma, a zjistíme, že

$$\frac{|B_2B_3|}{|B_3B_4|} = \frac{2\sqrt{r_2r_3}}{2\sqrt{r_3r_4}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_4}}.$$

Ovšem k_4 je pevná, tedy i k_4' a r_4 jsou neměnné. Kružnice k_2' se sice mění, její průměr je však roven vzdálenosti přímek l' a k_1', tedy i r_2 je neměnný. A jsme hotovi.

Poznámky k došlým řešením: Všechna správná řešení využívala kruhovou inverzi. Kromě výše uvedeného postupu někteří řešitelé provedli inverzi podle bodu B, čímž si řešení poněkud ztížili.

5. úloha

Nechť $F_0 = 3$, $F_1 = 0$, $F_2 = 2$ a $F_{n+3} = F_{n+1} + F_n$. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení: „Nechť p je prvočíslo. Pak p dělí F_p.“

Hledejme řešení rekurentní rovnice ve tvaru $a_n = \lambda^n$. Pak

$$\lambda^{n+3} - \lambda^{n+1} - \lambda^n = 0 \quad \text{a tedy} \quad \lambda^3 - \lambda^1 - 1 = 0$$

Kořeny této rovnice (označme je λ_1, λ_2 a λ_3) nejsou příliš hezké (ujasněte si alespoň, že jsou to tři různá reálná čísla), nicméně k vyřešení naší úlohy je nepotřebujeme znát. Stačí si uvědomit, že

$$\text{(V)} \qquad e_1 := \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\,, \quad e_2 := \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = -1\,, \quad e_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$$

Obecné řešení rekurentní rovnice je tvaru $A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n$, z podmínek $a_0 = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ a ze vztahů (V) nahlédneme, že $A = B = C = 1$. Nyní užijeme Waringovu formuli[8]

$$\frac{1}{n}\left(\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n\right) = \sum (-1)^{n-\alpha-\beta-\gamma} \frac{(\alpha+\beta+\gamma-1)!}{\alpha!\beta!\gamma!} e_1^\alpha e_2^\beta e_3^\gamma$$

přičemž se sčítá přes všechny trojice nezáporných čísel α, β a γ takových, že $\alpha + 2\beta + 3\gamma = n$. Zvážíme-li, že $e_1 = 0$, formule se zjednoduší

$$\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n = n \sum (-1)^{n-\beta-\gamma} \frac{(\beta+\gamma-1)!}{\beta!\gamma!} e_2^\beta e_3^\gamma$$

a sčítá se přes všechny dvojice nezáporných čísel β a γ takové, že $2\beta + 3\gamma = n$. Odsud již snadno odvodíte pro prvočíselná n kýžené tvrzení.

[8] Viz např. ŠMM svazek 52: Alois Kufner *Symetrické funkce*

6. úloha

Malý čertík dostal k Vánocům nový aero-hydroplán a nyní plánuje výlet po reálné ose. V každém bodě této osy může mít libovolnou nadmořskou výšku, pohybovat se však musí spojitě. Z kolika různých možností si může vybrat?

Pro suchary: nechť $\mathcal{C}$ značí množinu spojitých funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dokažte, že $\mathcal{C} \asymp \mathbb{R}$.

Řešení úlohy je založeno na tom, že známe-li hodnoty spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v racionálních bodech (tj. známe-li funkci $g = f|\mathbb{Q}$, tzv. restrikci f na Q), umíme si zbývající body funkce f doplnit předpisem

$$f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} g(x).$$

Z toho, je vidět, že označíme-li $\mathcal{C}$ množinu všech spojitých funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\mathcal{Q}$ množinu všech funkcí $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, pak $\mathcal{C} \preccurlyeq \mathcal{Q}$. Podotýkám, že nerovnost $\mathbb{R} \preccurlyeq \mathcal{C}$ je dostatečně zřejmá. K řešení úlohy nám tedy stačí dokázat $\mathcal{Q} \preccurlyeq \mathbb{R}$.

Jako lemmátko dokažme následující větu. Nechť S značí množinu všech posloupností nul a jedniček. Pak $S \asymp \mathbb{R}$. Zakážeme-li ve dvojkovém desetinném zápisu čísla periodickou jedničku, má každé číslo z intervalu $(0, 1)$ jednoznačný dvojkový zápis, který lze chápat jako posloupnost nul a jedniček, z toho[9] $\mathbb{R} \asymp (0, 1) \preccurlyeq S$. Vezmeme-li ale posloupnost z S jako trojkový rozvoj čísla z intervalu $[0, 1]$, dostáváme též $S \preccurlyeq [0, 1] \preccurlyeq \mathbb{R}$, tedy $S \asymp \mathbb{R}$.

Protože $\mathbb{Q} \asymp \mathbb{N}$ a $\mathbb{R} \asymp S$, má množina $\mathcal{Q}$ stejně prvků jako množina všech posloupností prvků S, to je totéž co posloupnost posloupností jedniček a nul. Takovou posloupnost posloupností lze chápat jako zobrazení $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Protože $\mathbb{N} \asymp \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, je těchto zobrazení stejně jako zobrazení $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Tím tedy dostáváme

$$\mathbb{R} \preccurlyeq \mathcal{C} \preccurlyeq \mathcal{Q} \asymp \{f \mid f : \mathbb{N} \to S\} \asymp \{f \mid f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\} = S \asymp \mathbb{R}.$$

Závěr: $\mathcal{C} \asymp \mathbb{R}$.

Poznámka ke značení: symboly $\preccurlyeq$, $\asymp$ jsem si vybral z jen estetických důvodů, nejedná se o žádné standardní značení (vlastně nevím o nikom, kromě řešitelů PraSete, kdo by jej používal). Např. v *Teorii množin* od pánů Balcara a Štěpánka najdete $\preccurlyeq$ a $\approx$.

Poznámka k řešitelům: množina všech funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemá stejnou potenci jako množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ může například reprezentovat množinu bodů v rovině. Reálná funkce f je ale podmnožina (s některými požadovanými vlastnostmi) množiny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, množina všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ je tedy částí potenční množiny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — takže může mít větší mohutnost, než $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Zkuste si rozmyslet, že tomu tak skutečně je.

[9] To, že platí $\mathbb{R} \asymp (0, 1)$, je zdůvodněno v řešení příkladu 6.2