5. série

Téma: Kombinatorické indentity

Datum odeslání: 24. ÚNORA 1997

1. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť p je liché prvočíslo. Dokažte, že

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}.$$

2. ÚLOHA (5 BODŮ)

Sečtěte

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

3. ÚLOHA (5 BODŮ)

Sečtěte

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2.$$

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Ve kterých řádcích Pascalova trojúhelníku se za sebou vyskytují tři čísla v poměru 3:4:5 ?

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Zvolte přirozené číslo $k > 1$. Do prvého řádku nekonečné tabulky napište vzestupně všechna přirozená čísla. Poté každé k-té číslo v prvém řádku vyškrtněte. Do druhého řádku zapište na j-té místo součet prvních j nevyškrtnutých čísel z prvého řádku. Poté každé $(k-1)$-ní číslo ve druhém řádku vyškrtněte. Do třetího řádku zapište na j-té místo součet prvních j nevyškrtnutých čísel z druhého řádku. Poté každé $(k-2)$-hé číslo ve třetím řádku vyškrtněte. A tak dále . . . . (Viz tabulka, kde jsme zvolili $k = 5$.) Jaká čísla budete zapisovat do k-tého řádku?

1	2	3	4	■	6	7	8	9	■	11	12	13	14	■	16	...
1	3	6	■	16	23	31	■	51	63	76	■	106	...			
1	4	■	26	49	■	131	194	■								

Řešení 5. série

1. úloha
Nechť p je liché prvočíslo. Dokažte, že

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}.$$

Nejprve několik trivialit: Nechť $p > 2$ je prvočíslo. Potom[1]

(1) Je-li $1 \le k \le p-1$, pak $\binom{p}{k} \equiv_p 0$ a $\binom{p}{k}^2 \equiv_{p^2} 0$. No comment.
(2) Nechť $a \equiv_p 0$ a $b \equiv_p 1$. Potom $ab \equiv_{p^2} a$. Zřejmé.
(3) $\binom{2p}{p} \equiv_{p^2} 2$. Nahlédneme snadno užitím (1), uvážíme-li, že

$$\binom{2p}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}^2 = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k}^2 + 2 \equiv_{p^2} 2.$$

První rovnost lze a) nalézt v loňském ročníku semináře (8. série, 6. úloha) nebo b) dokázat obdobně jako rovnost ve třetí úloze této série:

$$(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}\,,$$

všechny závorky upravte dle binomické věty, sumy na levé straně roznásobte a porovnejte koeficient u x^n.
(4) Je-li $1 \le k \le p-1$, pak $\binom{p+k}{k} \equiv_p 1$. Označíme-li $A := \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+k)}{k!} = \binom{p+k}{k}$, pak $k!A = (p+1)(p+2)\dots(p+k) \equiv_p k!$. Číslo $k!$ je nesoudělné s p a proto jej lze v rovnosti $k!A \equiv_p k!$ krátit. (Rozmyslete si podrobněji.) Tedy $A \equiv_p 1$.
(5) Z předchozího tvrzení a z (2) dostáváme: Je-li $1 \le k \le p-1$, pak

$$\binom{p}{k}\binom{p+k}{k} \equiv_{p^2} \binom{p}{k}.$$

(6) Ještě jedno připomenutí

$$2^p = (1+1)^p = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\,.$$

Na závěr splácáme vše dohromady:

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\binom{p+j}{j} = 1 + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j}\binom{p+j}{j} + \binom{2p}{p} \equiv_{p^2}$$
$$\equiv_{p^2} 1 + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} + 2 = 1 + \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} = 2^p + 1$$

[1] Pro $a \equiv b \pmod{c}$ budeme používat kratší zápis $a \equiv_c b$.

2. úloha
Sečtěte

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}.$$

Nejprve nahlédneme, že (pro $1 \leq k \ \leq n$)

$$k\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Nyní již snadno dostáváme užitím vztahu (6) z řešení prvé úlohy, že

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}.$$

Ve druhém případě budeme postupovat obdobně. Zřejmě $k^2 = k(k-1) + k$, a tedy

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Vzhledem k první části úlohy se stačí zabývat výrazem $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$. Zřejmě (pro $k \geq 2$)

$$k(k-1)\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} = n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2},$$

a tedy

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

a hledaný součet je roven

$$n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Poznámky k došlým řešením: Úlohu vyřešila většina řešitelů správně. Malé upozornění: úpravy výrazu $k\binom{n}{k}$ nefungují pro $k = 0$, $(-1)!$ totiž není definováno. Pokud však definujete $\binom{r}{k} = (r.(r-1).\ldots.(r-k+1))/k!$ pro $k > 0$ a $\binom{r}{k} = 0$ pro $k < 0$, pak vztah $k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}$ platí pro všechna k přirozená a r reálná.

3. úloha
Sečtěte

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\binom{n}{k}^2.$$

Nejprve si povšimneme, že

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

Uvažujme polynom $p(x) = (1-x^2)^n$. Podle binomické věty dostáváme

$$p(x) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}x^{2m}. \tag{A}$$

Binomickou větu však můžeme použít také na oba činitele v rozkladu $1-x^2 = (1-x)(1+x)$

$$p(x) = (1-x)^n(1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right).$$

Roznásobením obou sum dostáváme (píšeme m místo $k+j$)

$$\sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}\right)x^m. \tag{B}$$

Srovnáním koeficientů u členu x^n v (A) a (B) dostáváme výsledek

(1) Je-li n liché, pak

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = 0.$$

(2) Je-li n sudé, pak

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = (-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}.$$

Doporučení: Pokud nejste sběhlí v užívaní sumační symboliky, zkuste si rozepsat příslušné polynomy a jejich součiny alespoň pro některá malá n, a pak se vraťte k našemu zápisu.

Poznámky k došlým řešením: Všichni řešitelé, kteří úlohu správně vyřešili, postupovali stejně jako autorské řešení. Nenašel se nikdo, kdo by úlohu řešil např. kombinatoricky. (Mně se to také ještě nepodařilo, takže vzorové kombinatorické řešení neudávám). Byly pokusy řešit úlohu indukcí podle n, ale tato cesta jak se zdá, k cíli nevede, vede totiž na výrazy ještě složitější, než je výraz původní. Mnozí řešitelé výsledek prostě uhádli, což oceňuji (nemnoha body ovšem), protože u těchto řešitelů je jasné, že to odnikud neopsali, nebot to by asi opsali i důkaz.

4. úloha

Ve kterých řádcích Pascalova trojúhelníku se za sebou vyskytují tři čísla v poměru 3:4:5 ?

Nechť $\binom{n}{k} : \binom{n}{k+1} : \binom{n}{k+2} = 3:4:5$. Pak

$$4\binom{n}{k} = 3\binom{n}{k+1} = 3\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$

Odtud $4(k+1) = 3(n-k)$, neboli

$$7k - 3n = -4\,. \tag{R1}$$

Obdobně

$$5\binom{n}{k+1} = 4\binom{n}{k+2} = 4\binom{n}{k+1}\frac{n-k-1}{k+2}$$

Odtud $5(k+2) = 4(n-k-1)$, neboli

$$9k - 4n = -14\,. \tag{R2}$$

Řešením soustavy lineárních rovnic (R1) a (R2) dostáváme $k = 26$ a $n = 62$.

Poznámky k došlým řešením: Tato úloha byla zřejmě příliš jednoduchá, absolutní většina řešitelů za ni získala 5 bodů. Imaginární body jsem uděloval kladné, pokud se řešitel snažil, byť ve všech případech neúspěšně, o nějaké zobecnění či další úvahy, záporné pochopitelně tam, kde jste používali složitější postup, než bylo nutné. Méně reálných bodů dostali ti, kteří udělali při řešení rovnic nějakou numerickou chybu (zpravidla 4 body), případně si už špatně rozepsali vztah pro kombinační číslo (pak to bylo méně), ale také ti, kteří neověřili, zda skutečně dostali řešení úlohy. Konkrétně šlo o toto: pokud řešíte soustavu rovnic o dvou neznámých v přirozených číslech, nestačí, že jedna neznámá vyjde celá, musíte také ověřit, že tak vyjde i druhá. To, zda jste počítali řádky Pascalova trojúhelníku od nultého či prvního, nerozhodovalo.

5. úloha

Zvolte přirozené číslo $k > 1$. Do prvého řádku nekonečné tabulky napište vzestupně všechna přirozená čísla. Poté každé k-té číslo v prvém řádku vyškrtněte. Do druhého řádku zapište na j-té místo součet prvních j nevyškrtnutých čísel z prvého řádku. Poté každé $(k-1)$-ní číslo ve druhém řádku vyškrtněte. Do třetího řádku zapište na j-té místo součet prvních j nevyškrtnutých čísel z druhého řádku. Poté každé $(k-2)$-hé číslo ve třetím řádku vyškrtněte. A tak dále .... (Viz tabulka, kde jsme zvolili $k = 5$.) Jaká čísla budete zapisovat do k-tého řádku?

1	2	3	4	■	6	7	8	9	■	11	12	13	14	■	16	...
1	3	6	■	16	23	31	■	51	63	76	■	106	...			
1	4	■	26	49	■	131	194	■								

(podle *Jana Vybírala*) Všechny řádky si rozdělíme na skupiny o $k-n+1$ číslech, takže vždy poslední číslo ve skupině je přeškrtnuté. Zavedeme si toto označení: k, n, m, l jsou postupně celkový počet řádků tabulky, řádek tabulky, číslo skupiny, pozice čísla ve skupině. $V(k,n,m,l)$ značí číslo napsané pro zvolené k na n-tém řádku v m-té skupině na l-tém místě.

Lemma 1. $\binom{k}{i-1}\binom{k-i+1}{k-n} = \binom{k}{n}\binom{n}{i-1}$

Důkaz: Čtenář si sám ověří dosazením.

Lemma 2.

$$V(k,n,m,l) = \sum_{i=1}^{n+1}\binom{k}{i-1}\binom{l+n-i}{l-1}(m-1)^{i-1}$$

Důkaz: Provedeme indukcí podle n a l. Pro první řádek platí, že na i-tém místě je napsáno číslo i, tedy $V(k,1,m,l) = k(m-1)+l$ a první číslo v každém řádku je jednička, tedy $V(k,n,1,1) = 1$ — oboje vyhovuje našemu vzorci, jak si čtenář sám ověří dosazením.

Indukční krok od $n-1$ k n provedeme v každém řádku indukcí podle l po skupinách:
a) $l>1$

Z definice tabulky plyne, že počet čísel ve skupině v n-tém řádku se rovná počtu nepřeškrtnutých čísel v odpovídající skupině v $(n-1)$-ním řádku. Z toho dostáváme, že každé číslo se rovná součtu čísla ve stejném řádku o jedno dopředu a čísla ve stejné poloze o jednu řádku výš. Platí $V(k,n,m,l) = V(k,n,m,l-1) + V(k,n-1,m,l)$. Dosadíme a upravíme:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \binom{k}{i-1}\binom{l-1+n-i}{l-1-1}(m-1)^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{i-1}\binom{l+n-1-i}{l-1}(m-1)^{i-1} =$$
$$= \binom{k}{n}\binom{l-2}{l-2}(m-1)^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{i-1}\left(\binom{l-1+n-i}{l-2} + \binom{l+n-1-i}{l-1}\right)(m-1)^{i-1} =$$
$$= \binom{k}{n}\binom{l-1}{l-1}(m-1)^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{i-1}\binom{l+n-i}{l-1}(m-1)^{i-1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{k}{i-1}\binom{l+n-i}{l-1}(m-1)^{i-1}$$

Při úpravách jsme použili pouze vzorečku $\binom{p-1}{q-1} + \binom{p-1}{q} = \binom{p}{q}$.
b) $l=1$

Platí $V(k,n,m,1) = V(k,n,m-1,k-n+1) + V(k,n-1,m,1)$. Dosazením, použitím lemmatu 1 a binomické věty dostaneme:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \binom{k}{i-1}\binom{k-i+1}{k-n}(m-2)^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{i-1}\binom{n-i}{0}(m-1)^{i-1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{k}{n}\binom{n}{i-1}(m-2)^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{i-1}\binom{n-i}{0}(m-1)^{i-1} =$$
$$= \binom{k}{n}(m-2+1)^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{i-1}(m-1)^{i-1} = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{k}{i-1}(m-1)^{i-1}$$

Úkolem bylo zjistit, jak vypadají čísla v k-tém řádku:

$V(k,k,m,1) = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1}\binom{1+k-i}{0}(m-1)^{i-1} = (m-1+1)^k = m^k$ z binomické věty. Tedy v k-tém řádku budou k-té mocniny přirozených čísel.

Poznámky k došlým řešením:

(1) za řešení konstatující, že v k-tém řádku jsou k-té mocniny, je 0 bodů
(2) za důkaz pro $k=2$ je jeden bod
(3) spočítání několika prvních čísel v řádcích a zjištění, že to pro ně vychází, není ani ověření ani důkaz: $-i$
(4) prosíme Honzu Vybírala i ostatní, kteří ve svém řešení užili vzorec z lemmatu 2, aby nám sdělili, jak na něj přišli — moc nás to zajímá.