Kruhová inverze

Cílem této série je seznámit vás s tím, co je to kruhová inverze, jaké má vlastnosti (to už asi mnozí z vás vědí) a hlavně s tím, jak ji lze efektně a efektivně využít při řešení geometrických úloh.

Co to tedy je kruhová inverze? Je to geometrické zobrazení — předpis, který bodům (v našem případě bodům v rovině) přiřazuje body. K jejímu určení potřebujeme bod S — tzv. střed kruhové inverze — a kladné reálné číslo r — tzv. poloměr kruhové inverze. Bod X zobrazíme na bod X' takto:

(1) X' leží na polopřímce $\mapsto SX$
(2) $|SX'| = \frac{r^2}{|SX|}$

Zbývá vyřešit, jak zobrazit bod S — při jeho zobrazování právě popsaným postupem bychom totiž dělili nulou, bod S' vychází „nekonečně daleko“. Přidejme proto k rovině jeden „bod v nekonečnu“ — tzv. nevlastní bod. Upozorňuji, že je jen jeden — leží ve všech směrech, takže jím prochází například každá přímka. Kruhová inverze zobrazuje bod S na nevlastní bod, nevlastní bod na S.

Pro objasnění, proč se nevlastní bod zavádí právě takto, následuje malá motivační vsuvka. Uvažme v prostoru sféru (povrch koule) nad průměrem AB a rovinu ϱ dotýkající se sféry v bodě B. Uvažme dále středový průmět (se středem A) ϱ na sféru. Pokud bereme v rovině jen vlastní (tj. nikoli nevlastní) body, pak se žádný bod nezobrazí na A. Bodu A odpovídá právě ten nevlastní bod. Rozmyslete si, jak v průmětu na sféru vypadají přímky a kružnice, jak se na průmětu projeví provedení kruhové inverze. Tím myslím toto: Provedeme kruhovou inverzi a pak rovinu promítneme na sféru. Jaký je vztah tohoto průmětu a průmětu „původní“, tj. nezinvertované roviny?

Vlastnosti kruhové inverze

Při řešení můžete využívat dále uvedených vlastností kruhové inverze. Zkuste se zamyslet nad tím, jak byste je dokazovali. Pokud některý důkaz nevymyslíte a bude vás zajímat, napište nám o tom — bude-li vás více, může se příslušný důkaz objevit ve vzorovém řešení této série. A teď už slíbené vlastnosti:

(1) Dvojím provedením téže kruhové inverze dostaneme identitu.
(2) Kružnice se středem v S se zobrazí na kružnici se středem v S. Speciálně — kružnice se středem v S a poloměrem r je samodružná (tj. zobrazí se sama na sebe).
(3) Vnitřek samodružné kružnice se zobrazí na její vnějšek a naopak. To znamená, že rovina se jaksi obrátí na ruby kolem samodružné kružnice — odtud získala kruhová inverze své jméno.
(4) Přímka procházející středem (tj. bodem S) je samodružná.
(5) Přímka neprocházející středem se zobrazí na kružnici procházející středem a naopak.
(6) Kružnice neprocházející středem se zobrazí na kružnici neprocházející středem.
(7) Úhel mezi křivkami se zachovává, pokud průsečík těchto křivek není bod S.

Použití kruhové inverze

A konečně se dostáváme k tomu nejzajímavějšímu — jak lze kruhovou inverzi využít. Poměrně známým užitím jsou tzv. Appoloniovy úlohy. Tak se nazývají úkoly sestrojit kružnici vyhovující třem podmínkám. Každá z podmínek říká buď, že se hledaná kružnice dotýká dané přímky či kružnice, anebo že prochází daným bodem. Některé Appoloniovy úlohy lze šikovně vyřešit užitím kruhové inverze. Zkusme například sestrojit kružnici dotýkající se dvou daných kružnic a procházející daným bodem (neležícím na žádné z kružnic). Provedeme kruhovou inverzi se středem v daném bodě. Při ní přejdou dané kružnice v kružnice (neboť neprocházejí středem kruhové inverze), hledaná kružnice přejde v přímku, jejich společnou tečnu. A tu už není problém zkonstruovat. Všimněte si, že nezáleží na poloměru, s nímž inverzi provádíme. To je poměrně častý případ — jde nám jen o to, zda obraz bude přímka či kružnice, na jejich poloze a velikosti nezáleží.

Dále vyřešíme pomocí inverze ještě jeden příklad, jehož řešení klasickými prostředky by bylo poměrně obtížné a zdlouhavé. Je dána kružnice k a dva různé body L, M ležící na k. Kružnice l (resp. m) se dotýká k v bodě L (resp. M), navíc se l a m dotýkají v bodě B. Jsou-li kružnice k a body L, M pevné, jaká je množina všech bodů B?

Možná vám není příliš jasné, co znamená pojem množina všech bodů B. Míní se tím toto: sestrojíme kružnice l, m všemi způsoby (podle uvedených podmínek). Útvar vytvořený všemi takto získanými body B budeme nazývat množina všech bodů B. Úloha po nás žádá popsat nějaký útvar v rovině a dokázat o něm, že je to množina všech bodů B. Důkaz by se měl skládat ze dvou kroků — je třeba dokázat jednak, že každý přípustný bod B leží v nalezeném útvaru, jednak že každý bod nalezeného útvaru je bod B pro nějakou volbu kružnic l, m.

Nyní už přistupme k řešení úlohy. Doporučuji kreslit si při čtení obrázek. Proveďme kruhovou inverzi se středem L a s libovolným poloměrem. Zinvertované útvary budeme značit čárkovaně. Zvolme si nějakou dvojici kružnic l, m. Kruhovou inverzí dostaneme k', l' — rovnoběžné přímky (rozmyslete si, proč jsou rovnoběžné) a m' — kružnici, která se dotýká k' v M', l' v B'. Snadno si představíte (a určitě také snadno dokážete), že je $k' \perp B'M'$. Tudíž množina všech B' je částí přímky p' kolmé na k' a procházející M'. To ovšem znamená, že množina všech B je částí kružnice p procházející L a M, kolmé na k v bodě M (neboť úhly se zachovávají). Stejnou úvahou, kde provádíme kruhovou inverzi se středem M zjistíme, že tato kružnice je kolmá na k i v bodě L.[1]

Zbývá provést druhou část důkazu — zjistit, zda každý bod této kružnice je bodem B pro nějakou volbu l a m. Zvolíme-li na přímce p libovolně vlastní bod B' různý od M', můžeme evidentně sestrojit přímku l' ($B' \in l'$) rovnoběžnou s k' a kružnici m' nad průměrem $B'M'$ (ta se bude dotýkat k' i l', neboť tečna je kolmá na spojnici středu s dotykovým bodem). Provedením kruhové inverze získáme kružnice k, l a m, které mají požadované vlastnosti.

Zvolíme-li $B' = M'$ či B' nevlastní (tj. $B' = L'$), měla by m' mít poloměr nulový, resp. nekonečný. Zejména druhý případ je trochu těžký na představu (navíc takové kružnice nemáme definovány), proto postupujme jinak. Tyto možnosti odpovídají tomu, že bod B splývá s jedním z bodů L, M a tedy jedna z kružnic l, m má nulový poloměr, druhá splývá s k. Pokud povolujeme i kružnice degenerované v bod a považujeme dvě shodné kružnice za dotýkající se (dohodněme se, že obé budeme činit), budou i body L, M možnou polohou bodu B.

V souhrnu jsme tedy zjistili, že množina všech bodů B je kružnice, která prochází body L, M a je na kružnici k v těchto bodech kolmá. Z této kolmosti je patrná i poloha středu této kružnice — je to průsečík tečen ke k v L a v M.

Upozornění: V právě skončeném řešení je jedna malá chyba. Odhalíte ji?

[1] to je ostatně vidět i ze symetrie kružnice

4. série

Téma: Kruhová inverze

Datum odeslání: 13. LEDNA 1997

1. ÚLOHA (5 BODŮ)

Jsou dány dvě dotýkající se kružnice k, l o poloměrech r, s. Sestrojíme další dvě kružnice tak, aby se dotýkaly k i l a navíc sebe navzájem. Jaká je množina bodů, v nichž se takto vzniklé kružnice dotýkají? Jinak řečeno, když sestrojíme všechny takové dvojice kružnic, jaký útvar vytvoří jejich (vzájemné) dotykové body?

2. ÚLOHA (5 BODŮ)

Je dán pevný trojúhelník ABC, bod D probíhá stranu BC. Zjistěte, jakých hodnot může nabývat úhel svíraný kružnicí opsanou $\triangle ABD$ a kružnicí opsanou $\triangle ACD$.

3. ÚLOHA (5 BODŮ)

Je dána kružnice k a bod B. Najděte kružnici, která prochází bodem B, protíná k pod daným úhlem α a je co nejmenší.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

V prostoru jsou dány koule k, l, m a to tak, že l, m leží uvnitř k, dotýkají se jí a dotýkají se navzájem. Sestrojíme kouli ρ, která se dotýká k, l i m. Najděte množinu dotykových bodů ρ a k.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

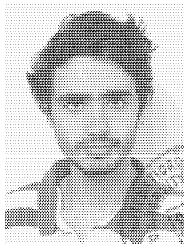
a) Nechť A, B, S jsou po dvou různé body v rovině. Provedením kruhové inverze se středem S a poloměrem r přejdou body A, B na body A', B'. Vyjádřete $|A'B'|$ pomocí vzájemných vzdáleností bodů A, B, S.

b) Máme dán ostroúhlý trojúhelník ABC a bod D uvnitř trojúhelníka takový, že platí $|AC|\,|BD| = |AD|\,|BC|$ a $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| + 90°$. Zjistěte hodnotu podílu

$$\frac{|AB|\,|CD|}{|AC|\,|BD|}.$$

Návod: Zkuste v části b) využít část a).

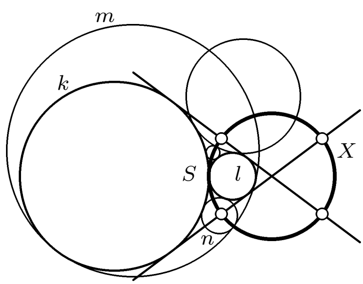
Řešení 4. série



Robert Šámal

1. úloha

Jsou dány dvě dotýkající se kružnice k, l o poloměrech r, s. Sestrojíme další dvě kružnice tak, aby se dotýkaly k i l a navíc sebe navzájem. Jaká je množina bodů, v nichž se takto vzniklé kružnice dotýkají? Jinak řečeno, když sestrojíme všechny takové dvojice kružnic, jaký útvar vytvoří jejich (vzájemné) dotykové body?



Provedeme kruhovou inverzi se středem S (dotykový bod k a l) a poloměrem 1. Ta převede kružnice k, l na přímky k', l'.

Libovolné kružnice m, n (dotýkající se k, l i sebe navzájem) převede inverze na dvojici kružnic m', n', které se dotýkají sebe navzájem a navíc přímek k', l'. Dotykový bod m, n se převede na dotykový bod m', n'. Ten bude očividně ležet na přímce (označme ji p'), která je rovnoběžná s k' i s l' a má od obou tutéž vzdálenost[2].

Hledaná množina (označme ji X) je tedy částí p — obrazu přímky p' v kruhové inverzi. Nyní prozkoumejme, kdy se nějaký bod $B \in p'$ zobrazí na bod z X, neboli kdy se dvě kružnice m', n' (které se dotýkají k', l' a navzájem v B) převedou inverzí na dvě „vyhovující“ kružnice. Obrazem m', n' jsou určitě dva objekty, které se dotýkají k, l a sebe navzájem v obrazu bodu B. Jediná otázka je, zda tyto objekty jsou kružnice. Pokud nejsou (tj. pokud aspoň jedna z m', n' prochází bodem S) bude (aspoň) jeden z těchto objektů přímka — společná (vnější) tečna k a l. To ovšem znamená, že v X chybí ty body p, které leží na jedné ze dvou společných vnějších tečen k, l. Ještě jeden bod v X je výjimečný: je to bod S. V něm se dotýkají jednak dvě „kružnice s nulovým poloměrem“, které nepřipouštíme (Obrazu bodu S se dotýkají „nevlastní kružnice“ tvořené jediným (nevlastním) bodem.), zároveň však také mnoho dvojic kružnic, které se jedné z kružnic k, l dotýkají zevnitř (obrazem takovéto dvojice jsou přímky rovnoběžné s k', l', „dotýkají“ se jich v nevlastním bodě.

Zbývá zjistit, jak vypadá p. Přímka p' bude procházet bodem S právě tehdy, když bod S má stejnou vzdálenost od k' i l', neboli když $r = s$. Jejím vzorem v inverzi je tedy přímka (pokud $r = s$) nebo kružnice, která se v S dotýká k i l (promyslete si proč). Střed oné kružnice je na přímce procházející středy k a l; za domácí cvičení zkuste z r a s zjistit poloměr této kružnice.

Závěr: hledanou množinou bodů je přímka či kružnice (viz minulý odstavec), kromě bodu S a průsečíků této přímky či kružnice se společnými vnějšími tečnami k a l. Tuto množinu vidíte na obrázku, společně se dvěma příklady kružnic m, n.

Poznámky k došlým řešením: Řešitelé se dělili do následujících pěti skupin:

[2] Této přímce se říká osa pásu.

(1) špatně si přečetli zadání — například hledali body dotyku všech kružnic, ne jenom kružnic, které měli sestrojit $(0 + 0i)$
(2) uhodli alespoň částečně správně řešení a částečně jej odůvodnili $(1 + 0i)$
(3) použili správně kruhovou inverzi, neuvažovali však speciální případy, a to především ten, kdy kružnice měly stejné poloměry $(3 + 0i)$
(4) kompletně správně vyřešili příklad s použitím kruhové inverze, neuvažovali však ty čtyři body dotyku při možných pozicích dvou kružnic, kdy se jedna nebo obě kružnice deformují inverzí v přímku $(4 + 0i)$
(5) kompletně správně vyřešili příklad $(5+0i)$ — tj. uvědomili si, že čtyři (nedegenerované) kružnice mohou mít společný dotykový bod; stačí aby některé z nich ležely uvnitř jiných.

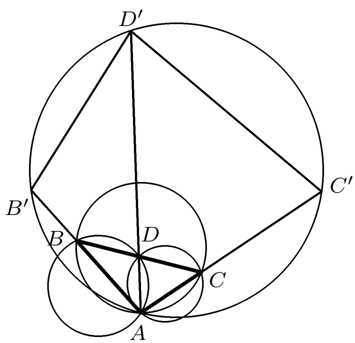
Jeden kladný imaginární bod jsem udělovala těm, kteří například navíc vypočítali poloměr výsledné kružnice a zjistili její střed. Dva kladné imaginární body byly za originální (například využitím stejnolehlosti) nebo jinak pěkný způsob nalezení poloměru kružnice a jejího středu. Imaginární body byly také za vyčerpávající (a správnou) analýzu situace.

Nejvíce řešitelů skončilo ve čtvrté skupině, tedy dokázali správně použít kruhovou inverzi a nalézt výslednou množinu dotyků obou kružnic, ale nevyloučili případy, kdy po provedení kruhové inverze bude alespoň jedna invertovaná kružnice procházet středem kruhové inverze. V tomto případě se totiž daná kružnice zpětnou kruhovou inverzí zobrazí na přímku, která nevyhovuje požadavkům zadání.

Naopak nejméně řešitelů skončilo ve druhé skupině — tedy se jim povedlo uhodnout alespoň částečně řešení tohoto příkladu a nějak ho zdůvodnili, tedy hádání řešení se většinou nevyplácelo.

2. úloha

Je dán pevný trojúhelník ABC, bod D probíhá stranu BC. Zjistěte, jakých hodnot může nabývat úhel svíraný kružnicí opsanou $\triangle ABD$ a kružnicí opsanou $\triangle ACD$.



Proveďme kruhovou inverzi se středem A a libovolným poloměrem. Obrazy bodů B, C, D označme B', C', D'. Uvažovaná inverze převede kružnice opsané trojúhelníkům $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ na přímky $\leftrightarrow B'D'$, $\leftrightarrow C'D'$.

Úhel mezi křivkami se inverzí zachovává, proto zkoumaný úhel má stejnou velikost jako úhel $\sphericalangle B'D'C'$. (To není tak úplně pravda, úhlem mezi dvěma přímkami (či křivkami) se obvykle rozumí menší ze dvou možných úhlů. Velikost zkoumaného úhlu je tedy $\min(|\sphericalangle B'D'C'|, 180° - |\sphericalangle B'D'C'|)$.)

Čtyřúhelníku $AB'D'C'$ lze opsat kružnici, neboť přímka procházející body B, D, C se inverzí zobrazí na kružnici procházející středem inverze, tj. bodem A. Podle věty o obvodovém úhlu je tudíž $|\sphericalangle B'D'C'| + |\sphericalangle B'AC'| = 180°$. Body A, B, B' (resp. A, C, C') leží na přímce, proto je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'AC'$. A jsme hotovi — hledaný úhel má vždy stejnou velikost, a to menší z čísel $|\sphericalangle BAC|$, $180° - |\sphericalangle BAC|$.

Poznámky k došlým řešením: Správná řešení využívala postupů:
(a) kruhovou inverzi se středem
v A, či v D — což je obdoba autorského řešení
v B, nebo v C — trochu komplikovanější, ale též vedlo k cíli
(b) bez kruhové inverze (to bylo myšlenkově v podstatě stejně náročné jako autorské řešení)
Imaginární body byly uděleny většinou za srozumitelnost podání řešení.

Poznámky k došlým řešením: Správná řešení využívala postupů:
(a) kruhovou inverzi se středem
v A, či v D — což je obdoba autorského řešení
v B, nebo v C — trochu komplikovanější, ale též vedlo k cíli
(b) bez kruhové inverze (to bylo myšlenkově v podstatě stejně náročné jako autorské řešení)
Imaginární body byly uděleny většinou za srozumitelnost podání řešení.

3. úloha
Je dána kružnice k a bod B. Najděte kružnici, která prochází bodem B, protíná k pod daným úhlem α a je co nejmenší.

Provedeme kruhovou inverzi se středem B a libovolným poloměrem. Kružnice l procházející B a protínající k pod úhlem α přejde v této inverzi v přímku l' protínající kružnici k' (obraz k) pod úhlem α (úhly mezi křivkami se totiž zachovávají). Vzdálenost této přímky od bodu B je nepřímo úměrná poloměru sestrojené kružnice. Takže hledat co nejmenší kružnici l znamená hledat co nejvzdálenější přímku l'. Převedli jsme úlohu na jinou, snazší: nalézt k danému bodu B a kružnici k' přímku l', která protíná k pod úhlem α a je od B co nejdále.

Najdeme nějakou přímku p, která protíná k' pod úhlem α (tj. najdeme libovolnou tečnu a od ní odměříme úhel α). Všechny přímky, které protínají k' pod tímto úhlem dostaneme tak, že p otočíme o vhodný úhel okolo S — středu k'. Nejvzdálenější přímka bude vzdálenější ze dvou přímek, které jsou kolmé na SB. Intuitivně je zcela jasné, že se jedná skutečné o nejvzdálenější přímku (pro procvičení si můžete zkusit tuto skutečnost dokázat).

Požadovanou kružnici tedy nalezneme takto: Danou kružnici k zobrazíme kruhovou inverzí (Konstrukčně to lze provést třeba tak, že zobrazíme tři body a opíšeme jim kružnici. Zkuste podumat, jaké řešení by bylo nejlepší pro praktické rýsování.), podle předchozího odstavce nalezneme nejvzdálenější přímku l' a tu kruhovou inverzí (třeba opět pomocí tří bodů) zobrazíme na hledanou kružnici l.

4. úloha
V prostoru jsou dány koule k, l, m a to tak, že l, m leží uvnitř k, dotýkají se jí a dotýkají se navzájem. Sestrojíme kouli ρ, která se dotýká k, l i m. Najděte množinu dotykových bodů ρ a k.

V této úloze využijeme tzv. kulovou inverzi — trojrozměrnou analogii kruhové inverze. Pomocí kulové inverze zobrazujeme zcela stejně jako pomocí kruhové, má i podobné vlastnosti. Z těch budeme potřebovat jen toto: koule procházející středem inverze se zobrazí na rovinu neprocházející středem, koule neprocházející středem se zobrazí na kouli neprocházející středem. Důkaz si bystrý čtenář provede sám (stačí vhodně využít vlastností kruhové inverze).

Označme S dotykový bod koulí k a l. Proveďme kulovou inverzi se středem S a libovolným poloměrem, získané útvary označme čárkovaně. Podle výše uvedené vlastnosti kulové inverze budou k', l' roviny neprocházející S; m', ρ' budou koule. (Toto není pravda, pokud k a l mají vnitřní dotyk, tj. jedna leží uvnitř druhé. Rozmyslete si, jak bude v tomto případě vypadat řešení úlohy.) Koule k, l neměly kromě středu inverze žádný společný bod, proto ani k', l' nebudou mít žádný vlastní („nikoli nekonečný") společný bod, budou tedy rovnoběžné. Koule m se dotýkala k a l, proto se m' bude dotýkat k' a l'. Libovolná ρ je koule dotýkající se k, l i m, tudíž libovolná ρ' je koule dotýkající se rovin k', l' a koule m'. Naopak každá takováto ρ' je obrazem nějaké „přípustné" ρ. Takže hledaná množina dotykových bodů se kulovou inverzí zobrazí na množinu dotykových bodů ρ' a k'. Jistě si snadno představíte, že druhá jmenovaná množina je kružnice.

Zbývá nahlédnout, že kulová inverze zobrazuje kružnice neprocházející středem (a kružnice z konce minulého odstavce středem neprochází, neboť je obsažena v rovině k', která neprochází středem) na kružnice. To provedeme třeba takto: každou takovou kružnici můžeme dostat jako průnik dvou koulí neprocházejících středem (nejvýše jedna z nekonečně mnoha koulí procházejících danou kružnicí prochází středem inverze). Kulová inverze zobrazí tyto koule opět na koule, čili průnik obrazů bude opět kružnice (nemůže to být prázdná množina ani bod — kulová inverze je prosté zobrazení, tj. „neslepuje body"). Ze závěrů tohoto a předchozího odstavce už přímo plyne, že hledaná množina je kružnice. Pilný čtenář může zkusit zjistit její poloměr.

Poznámky k došlým řešením: Při opravování úlohy jsem byl velice mírný. Těm, kteří nic nedokázali jsem nic nestrhl, naopak ti kteří udělali něco navíc, či se alespoň pokusili o důkaz, si to „odnesli" v podobě plus íček. Často jste však zapomínali na případ, kdy má k, l a m ***vnitřní*** dotyk. Toto opomenutí vás stálo jeden bod.

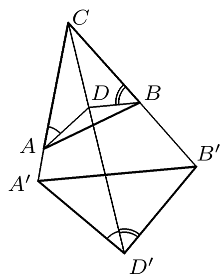
5. úloha

a) Nechť A, B, S jsou po dvou různé body v rovině. Provedením kruhové inverze se středem S a poloměrem r přejdou body A, B na body A', B'. Vyjádřete $|A'B'|$ pomocí vzájemných vzdáleností bodů A, B, S.

b) Máme dán ostroúhlý trojúhelník ABC a bod D uvnitř trojúhelníka takový, že platí $|AC|\,|BD| = |AD|\,|BC|$ a $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| + 90°$. Zjistěte hodnotu podílu

$$\frac{|AB|\,|CD|}{|AC|\,|BD|}.$$

Návod: Zkuste v části b) využít část a).



(a) Trojúhelníky SAB a $SB'A'$ jsou podobné. Mají totiž stejný úhel u vrcholu S a poměr délek odpovídajících stran je stejný:

$$\frac{|SA'|}{|SB'|} = \frac{r^2/\,|SA|}{r^2/\,|SB|} = \frac{|SB|}{|SA|}.$$

Proto je stejný i poměr délek jiných odpovídajících si stran:

$$\frac{|A'B'|}{|SA'|} = \frac{|AB|}{|SB|}.$$

Dosazením a úpravou získáme požadované vyjádření.

$$|A'B'| = \frac{|AB|\,|SA'|}{|SB|} = \frac{r^2}{|SA|\,|SB|}\,|AB|$$

(b) Provedeme kruhovou inverzi se středem C a poloměrem 1, obrazy bodů A, B, D označíme A', B', D'. Využijeme část a) pro zjištění délek úseček $B'D'$, $B'A'$, $A'D'$. Pokud navíc použijeme daný vztah mezi délkami některých úseček v trojúhelníku, dostáváme

$$\frac{|B'D'|}{|A'D'|} = \frac{\frac{|BD|}{|BC||DC|}}{\frac{|AD|}{|AC||DC|}} = \frac{|AC|\,|BD|}{|AD|\,|BC|} = 1 \qquad \frac{|A'B'|}{|B'D'|} = \frac{\frac{|AB|}{|AC||BC|}}{\frac{|BD|}{|BC||DC|}} = \frac{|AB|\,|CD|}{|AC|\,|BD|} = ?$$

Víme tedy, že hledaný podíl je roven poměru délek úseček $A'B'$ a $B'D'$ a že trojúhelník $A'D'B'$ je rovnoramenný. V dalším odstavci zjistíme, že trojúhelník $A'D'B'$ je navíc pravoúhlý; proto je poměr přepony $A'B'$ a odvěsny $B'D'$ roven $\sqrt{2}$. Hledaný podíl jest roven $\sqrt{2}$.

Nyní určíme velikost úhlu $\sphericalangle B'D'A'$. Stejnou úvahou jako v části a) zjistíme, že $\triangle CBD \sim \triangle CD'B'$ a $\triangle CAD \sim \triangle CD'A'$. Proto $|\sphericalangle B'D'A'| = |\sphericalangle B'D'C| + |\sphericalangle CD'A'| = |\sphericalangle CBD| + |\sphericalangle CAD|$. Nyní užijeme toho, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$. Dostaneme $|\sphericalangle CBD| + |\sphericalangle BDC| + |\sphericalangle DCB| = 180°$ a $|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle DCA| = 180°$. Sečtením dostaneme $(|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle CBD|) + (360° - |\sphericalangle ADB|) + |\sphericalangle ACB| = 360°$; využitím vztahu $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| + 90°$ zjistíme, že $|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle CBD| = 90°$, což jsme slíbili v minulém odstavci.

Poznámky k došlým řešením: V části (a) jste kromě stejnolehlosti využívali i jiné postupy, obvykle kosinovou větu a několik úprav. Za tuto část úlohy jste mohli dostat dva reálné body, řešení pomocí stejnolehlosti jsem navíc ocenil jedním imaginárním bodíkem.

Jen nemnozí z vás zvládli i část (b), užili přitom téhož postupu jako autorské řešení. Ti, jejichž řešení nebyla příliš těžkopádná, obdrželi $+1i$.