2. série

Téma: Úlohy o vojáččích

Datum odeslání: 28. ŘÍJNA 1996

1. ÚLOHA (5 BODŮ)

V řadě stojí n vojáčků. Trpělivý generál hledá dobrovolníky pro nebezpečný úkol. Všichni vojáčci vystoupí z řady o jeden krok dopředu. Po chvíli si to někteří rozmyslí a každý druhý udělá krok zpět. V zápětí každý třetí změní názor (to znamená — kdo byl vepředu, udělá krok vzad a naopak). Pak změní názor každý čtvrtý, pátý, šestý, ..., n-tý[1]. Ze kterých vojáčků bude moci nakonec generál vybírat?

2. ÚLOHA (5 BODŮ)

Šílený generál nechal nastoupit svoji jednotku čítající $n = 1155$ vojáčků do řady. Pak velel: „Každý prvý nechť udělá krok vpřed, každý druhý krok vzad, každý třetí krok vpřed, každý čtvrtý krok vzad, ..., každý $(n-1)$-tý krok vzad a každý n-tý krok vpřed“. Který z vojáčků bude po provedení všech těchto rozkazů nejdále vepředu?

3. ÚLOHA (5 BODŮ)

Zcela šílený generál chce rozdělit svoji armádu o síle n mužů na tři části (n je liché). Nechá je proto nastoupit do řady doprostřed zákopu, který je široký jen na dva kroky (to znamená — vojáček může ze základní pozice udělat pouze jeden krok vzad či vpřed, pak narazí na stěnu zákopu). Pak generál velí stejně jako jeho kolega z druhé úlohy. Rozhodněte, v které řadě bude nejvíce a v které nejméně vojáčků?

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Sadistický generál hraje svou oblíbenou hru s dezertéry. Nechá si n dezertérů nastoupit do kruhu. Zvolí počátek a směr a pak každého druhého pošle na mučení. Jen poslednímu zbylému dezertérovi udělí milost. Který z dezertérů bude mít to štěstí? Určete jeho pořadí od počátku v závislosti na n.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Náš poslední generál má rád pouze dokonalé vojáčky. Jejich dokonalost testuje touto metodou: postaví svoji n-člennou jednotku do řady. Pak první udělá dva kroky vpřed, druhý čtyři, třetí šest, čtvrtý osm, ..., n-tý $2n$ kroků vpřed. Poté všichni provedou čelem vzad. Nyní každý i-tý udělá i kroků vpřed, pro $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Vojáček, který skončí na svém původním místě, je dokonalý.

a) Kolik dokonalých vojáčků se bude vyskytovat ve stočlenné jednotce? ($n = 100$)
b) Pokuste se popsat dokonalé vojáčky pro libovolné n.

WARNING! Upozorňujeme raději předem všechny řešitele, že s ohledem na specifický charakter úloh v této sérii řešení opírající se pouze o počítačovou simulaci nemají (bez ohledu na správnost výsledku) šanci dosáhnout jiného hodnocení než $0 - 2i$. Jedná se o seminář **matematický**, nezajímá nás rychlost ani paměťová kapacita tvého počítače. Pokud Tě naše podezíravost uráží a zmiňovaný způsob řešení by Tě ani ve snu nenapadl, tím lépe.

---

[1] každý n-tý znamená (zde i v dalších úlohách) n-tý, $2n$-tý, $3n$-tý, ...

Řešení 2. série

Vojáčky si ve všech úlohách očíslujeme 1, 2, … , n. Dále ztotožněme vojáčka s číslem jemu přiřazeným (vojáček n je dělitelný číslem k, právě když k dělí n).

1. úloha
V řadě stojí n vojáčků. Trpělivý generál hledá dobrovolníky pro nebezpečný úkol. Všichni vojáčci vystoupí z řady o jeden krok dopředu. Po chvíli si to někteří rozmyslí a každý druhý udělá krok zpět. V zápětí každý třetí změní názor (to znamená — kdo byl vepředu, udělá krok vzad a naopak). Pak změní názor každý čtvrtý, pátý, šestý, … , n-tý[2]. Ze kterých vojáčků bude moci nakonec generál vybírat?

Každý vojáček změní názor tolikrát, kolik má dělitelů (každý i-tý znamená všechna čísla, která jsou dělitelná číslem i), proto vpředu zůstanou ti, kteří mají lichý počet dělitelů. Ale ke každému děliteli k čísla m (takovému, že $k < \sqrt{m}$) můžeme vzájemně jednoznačně přiřadit číslo l ($l > \sqrt{m}$) takové, že $k \cdot l = m$, tedy počet dělitelů čísla m různých od $\sqrt{m}$ bude sudý. Potom počet dělitelů bude lichý, pouze když $\sqrt{m}$ bude celé číslo.

Generál bude moci vybírat samozřejmě ze všech vojáčků, ale sami se mu nabídnou pouze vojáčci, jejichž číslo je druhou mocninou.

2. úloha
Šílený generál nechal nastoupit svoji jednotku čítající $n = 1155$ vojáčků do řady. Pak velel: „Každý prvý nechť udělá krok vpřed, každý druhý krok vzad, každý třetí krok vpřed, každý čtvrtý krok vzad, … , každý $(n-1)$-tý krok vzad a každý n-tý krok vpřed“. Který z vojáčků bude po provedení všech těchto rozkazů nejdále vepředu?

Každý vojáček udělá tolik kroků, kolik má dělitelů (jako v minulé úloze), a to za každého lichého dělitele to bude krok vpřed a za každého sudého krok vzad. Zřejmě pokud je m sudé, pak pro každého lichého dělitele k čísla m najdeme l sudé (toto zobrazení je prosté) tak, že $k \cdot l = m$, odtud plyne, že sudí vojáčci nebudou na konci více vpředu než na začátku, zatímco liší určitě ano, protože budou dělat jen kroky vpřed.

Číslo $m = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_j^{a_j}$ má $(a_1+1) \cdot (a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_j+1)$ dělitelů (v děliteli může být každé prvočíslo obsaženo v nulté až a_i-té mocnině). Dále jistě $(a+1)(b+1) > a+b+1$, tedy dvě různá prvočísla obsažené v prvočíselném rozkladu v mocninách a a b nám dají více dělitelů než jedno prvočíslo obsažené v mocnině $a+b$.

Číslo $1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ má tedy $2^4 = 16$ dělitelů. Více dělitelů už můžou mít už pouze čísla, která lze rozložit na součin více než čtyř (nikoli různých, takové liché číslo by totiž muselo být větší než 1155) prvočísel: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ (také 16), $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ (jen 10) nebo 3^6 (7 dělitelů). Čísla $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$, $3^5 \cdot 5$ a 3^7 a tudíž zřejmě i všechna další jsou větší než 1155.

Vidíme, že nejdále vpředu budou vojáčci s čísly 1155 a 945.

3. úloha
Zcela šílený generál chce rozdělit svoji armádu o síle n mužů na tři části (n je liché). Nechá je proto nastoupit do řady doprostřed zákopu, který je široký jen na dva kroky (to znamená — vojáček může ze základní pozice udělat pouze jeden krok vzad či vpřed, pak narazí na stěnu zákopu). Pak generál velí stejně jako jeho kolega z druhé úlohy. Rozhodněte, v které řadě bude nejvíce a v které nejméně vojáčků?

[2] každý n-tý znamená (zde i v dalších úlohách) n-tý, $2n$-tý, $3n$-tý, …

Za každého sudého dělitele udělá vojáček krok vzad. Pokud je vojáček dělitelný čtyřmi, udělá poslední dva kroky vzad (2 největší dělitelé čísla $4n$ jsou $2n$ a $4n$) a skončí tedy v zadní řadě. Pokud je vojáček lichý, dělá jen kroky vpřed (a to aspoň jeden) a skončí tedy v přední řadě.

Stačí zjistit chování zbylých vojáčků, tedy vojáčků typu $4k + 2$. Ti budou mít stejně sudých a lichých dělitelů, to však ještě neznamená, že skončí v prostřední řadě. Největší dělitel čísla $4k + 2$ je $4k + 2$ (sudé číslo) a druhý největší dělitel je $2k + 1$ (liché číslo). Pokud jim budou předcházet dva sudí dělitelé (dva kroky vzad), skončí vojáček jistě v poslední řadě. K tomu stačí, aby dva nejmenší (kromě dvojky) prvočíselní dělitelé p_1, p_2 čísla $4k + 2$ splňovali podmínku $p_1 < p_2 < 2p_1$, pak třetí a čtvrtý největší dělitel budou $\frac{4k+2}{p_1}$ a $\frac{4k+2}{p_2}$ (obě čísla jsou jistě sudá). Nejmenší dvojice prvočísel s touto vlastností je 3 a 5, proto číslo 30 $(2 \cdot 3 \cdot 5)$ je nejmenší číslo ve tvaru $4k + 2$, které skončí v poslední řadě. Všechna čísla tvaru $4k + 2$ menší než 30 skončí ve druhé řadě, jak si můžeme snadno vyzkoušet.

Závěr: Nejvíce vojáčků bude vždy v první řadě (všichni liší). Nejméně vojáčků bude pro $n < 30$, $n = 4k + 1$ ve druhé a třetí řadě, pro $n = 4k + 3$ bude ve třetí řadě o vojáčka méně než ve druhé. Pro $n > 30$ bude nejméně vojáčků ve druhé řadě.

Poznámky k došlým řešením: Mnozí řešitelé si mysleli, že vepředu budou ti vojáčci, jejichž pořadové číslo má více lichých než sudých dělitelů, a vzadu ti, jejichž pořadové číslo má více sudých než lichých dělitelů. Tito řešitelé si asi neuvědomili, že ne každému děliteli odpovídá nějaký krok (Stojí-li vojáček např. před stěnou zákopu, nemůže už udělat krok vpřed, a tudíž v případě lichého dělitele zůstane stát.)
Chtěl bych upozornit některé řešitele, že za šetření papírem žádné body nezískají(ani imaginární). Řešení by se měla psát na formát A4 a ne na proužek papíru o šířce 5 cm.

4. úloha

Sadistický generál hraje svou oblíbenou hru s dezertéry. Nechá si n dezertérů nastoupit do kruhu. Zvolí počátek a směr a pak každého druhého pošle na mučení. Jen poslednímu zbylému dezertérovi udělí milost. Který z dezertérů bude mít to štěstí? Určete jeho pořadí od počátku v závislosti na n.

Pokud je dezertérů $n = 2^k$, pak jako poslední zbyde vojáček 1. Celý proces vyřazování vojáčků z kruhu si rozdělme na kola (jedno kolo znamená jednou dokola). Pokud je v i-tém kole v kruhu sudý počet vojáčků, pak jistě prvního v $(i + 1)$-ním kole přeskočíme. Dále pokud do i-tého kola postoupí 2^j vojáčků, pak do $(i + 1)$-ního kola postoupí 2^{j-1} vojáčků (pro $j > 0$). Odtud plyne, že prvního budeme stále přeskakovat, až nakonec v kruhu zbyde sám, a tedy dostane milost.

Dále dokážeme matematickou indukcí, že pokud je vojáčků v kruhu $2^k + m$ $(m < 2^k)$, pak milost dostane vojáček s číslem $2m + 1$. Pro $m = 0$ jsme tvrzení dokázali, stačí provést indukční krok: Nechť pro $2^k + m$ vyslovené tvrzení platí, pak chceme dokázat, že bude platit i po přidání dalšího vojáčka, tedy pro $2^k + m + 1$ $(m + 1 < 2^k)$.

Mějme v kruhu $2^k + m + 1$ dezertérů, vojáčka 2 pošleme na mučení a máme kruh s $2^k + m$ dezertéry, začínající číslem 3. Pak jako poslední musí jistě zbýt vojáček s číslem o dvě větším, než pro kruh s $2^k + m$ dezertéry začínající číslem 1. Pokud pro m byl výsledek $2m + 1$, pak pro $m + 1$ to bude $2m + 1 + 2 = 2(m + 1) + 1$, což jsme chtěli dokázat.

Tím je důkaz téměř hotov, stačí ověřit, že číslo, které dostaneme, není rovno 2^k+m+2, na jeho místě v kruhu je totiž jednička. Pokud $m+1 < 2^k$, pak $2(m+1)+1 = m+1+m+2 < 2^k+m+2$. (Je vidět, že pro $m + 1 = 2^k$ by milost dostalo číslo $2 \cdot 2^k + 1 = 2^k + m + 2$, které zde nahrazuje jednička, a tedy pro $2^k + m + 1 = 2^{k+1}$ vojáčků dostane milost vojáček 1.)

Závěr: Pokud je v kruhu $2^k + m$ dezertérů ($m < 2^k$), pak milost dostane $(2m+1)$-ní vojáček od počátku.

5. úloha

Náš poslední generál má rád pouze dokonalé vojáčky. Jejich dokonalost testuje touto metodou: postaví svoji n-člennou jednotku do řady. Pak první udělá dva kroky vpřed, druhý čtyři, třetí šest, čtvrtý osm, ..., n-tý $2n$ kroků vpřed. Poté všichni provedou čelem vzad. Nyní každý i-tý udělá i kroků vpřed, pro $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Vojáček, který skončí na svém původním místě, je dokonalý.

a) Kolik dokonalých vojáčků se bude vyskytovat ve stočlenné jednotce? ($n = 100$)
b) Pokuste se popsat dokonalé vojáčky pro libovolné n.

Označme počet zpátečních kroků vojáčka s číslem k. Pokud je vojáček dělitelný číslem i, pak udělá i kroků zpět (pro $i = 1, 2, \ldots, n$), to znamená, že $\sigma(k)$ je rovno součtu všech dělitelů čísla k. Vojáček s číslem k skončí na svém původním místě, právě když $\sigma(k) = 2k$.

Čísla splňující tuto podmínku se nazývají dokonalá. Budeme tedy hledat dokonalá čísla do sta. Jeden způsob, jak to udělat, je prozkoumat dělitele všech čísel. Druhý způsob je vyřazovat určité skupiny čísel a zbytek vyzkoušet — je to sice složitější, ale mnohem zajímavější.

Základní věta aritmetiky (ZVA) nám říká, že každé přirozené číslo $n > 1$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k},$$

kde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ jsou prvočísla a $a_1, a_2, \ldots a_k \in \mathbb{N}$. (Tato věta je rovněž využita v řešení druhé úlohy.)

Pro $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ je

$$(\heartsuit) \qquad \sigma(n) = (p_1^0 + p_1^1 + \cdots + p_1^{a_1})(p_2^0 + p_2^1 + \cdots + p_2^{a_2}) \ldots (p_k^0 + p_k^1 + \cdots + p_k^{a_k}),$$

$$(\diamondsuit) \qquad \sigma(n) = \frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} \ldots \frac{p_k^{a_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

Rozmyslete si, že po roznásobení závorek ve vzorci ($\heartsuit$) dostaneme součet všech dělitelů čísla n. Jednoduchou úpravou tohoto vzorce dostaneme ($\diamondsuit$).

V1. *Jestliže $n > 1$ je liché dokonalé číslo, pak musí být tvaru $n = p^{4k+1} \cdot N^2$, kde p je prvočíslo tvaru $4s + 1$ $(s \geq 1)$, k je celé nezáporné a N je přirozené číslo, které není dělitelné prvočíslem p.*

Důkaz: Nechť $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ (dle ZVA), pak aby n bylo dokonalé, musí platit $\sigma(n) = 2n$. Na pravé straně máme sudé číslo, které však není dělitelné čtyřmi (n je liché), totéž musí platit pro $\sigma(n)$. Proto ve vzorci ($\heartsuit$) musí být právě jedna závorka (i-tá) dělitelná dvěma $\Rightarrow a_i$ je liché (všechny sčítance jsou liché, musí jich tedy být sudý počet). Výrazy v ostatních závorkách musí být sudé, proto zbylá prvočísla v jsou rozkladu čísla n dle ZVA obsažena v sudých mocninách ($\forall j \neq i : a_j$ sudé) a jejich součin je tudíž druhou mocninou přirozeného čísla (N), které není dělitelné prvočíslem p_i.

Stačí dokázat, že p_i je tvaru $4s + 1$ (jinak by bylo tvaru $4s - 1$, a pak by i-tá závorka byla dělitelná čtyřmi) a že a_i je tvaru $4k+1$: zřejmě $1 + p_i + \cdots + p_i^{a_i} = (p_i + 1)(1 + p_i^2 + p_i^4 + \cdots + p_i^{a_i - 1})$, kde $p_i + 1$ je sudé, tedy druhá závorka musí být lichá $\Rightarrow$ počet sčítanců v ní je lichý $\Rightarrow a_i = 4k+1$. Tím je důkaz hotov.

V2. *Sudé přirozené číslo n je dokonalé právě tehdy, když má tvar $n = 2^{s-1}(2^s - 1)$, kde $s \in \mathbb{N}$ a $2^s - 1$ je prvočíslo.*

Důkaz: Pokud je n v uvedeném tvaru, pak stačí dosadit do vzorce ($\heartsuit$). Nyní se budeme zabývat obrácenou implikací: předpokládejme, že n je sudé dokonalé číslo. Jistě $\sigma(n) = 2n$ je číslo sudé, pak ze vzorce ($\heartsuit$) plyne, že n je dělitelné ještě jiným prvočíslem (kromě dvojky). Nechť tedy $n = 2^a \cdot L$, kde $L = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, $k \geq 1$, $a = s - 1 \geq 1$. Pak ze vzorce ($\diamondsuit$) pro $\sigma(n)$ a $\sigma(L)$ plyne

$$\sigma(n) = \frac{2^{a+1} - 1}{2 - 1}\sigma(L) = (2^s - 1)\sigma(L) = 2n = 2^s L.$$

Z rovnosti

$$(2^s - 1)\sigma(L) = 2^s L \tag{1}$$

plyne $2^s | \sigma(L)$, tedy existuje q takové, že $\sigma(L) = 2^s q$. Po dosazení do (1) za $\sigma(L)$ dostáváme:

$$(2^s - 1)q = L, \tag{2}$$

$$2^s q = L + q, \tag{3}$$

$$\sigma(L) = L + q. \tag{4}$$

Protože $s \geq 2$, plyne z (3) $L \neq q$, Jistě $L|L$ a $q|L$, proto ze (4) plyne, že L nemá jiné dělitele než L a q, proto $q = 1$ a L (ze (2) plyne $L = 2^s - 1$) je prvočíslo. Tím jsme dokázali, že $n = 2^{s-1}(2^s - 1)$, kde $2^s - 1$ je prvočíslo, což jsme chtěli.

Z věty V2 plyne, že nejmenší sudá dokonalá čísla jsou $2 \cdot 3 = 6$, $4 \cdot 7 = 28$ a $16 \cdot 31 = 496$. Z věty V1 plyne, že lichá dokonalá čísla (pokud vůbec existují[3]) musí být tvaru $12k + 1$ nebo $36k + 9$. Prvočísla (kromě 2 a 3) jsou tvaru $6k \pm 1$, tedy N^2 je jistě tvaru $6l + 1$ (pokud není dělitelné třemi) a p je tvaru $4k + 1$, pak jistě pN^2 je tvaru $12m + 1$. Pokud $3|N^2$, pak i $9|N^2$ a $pN^2 = 36m + 9$. Dále je zřejmé, že prvočísla nejsou dokonalá (neboť $\sigma(p) = p + 1 < 2p$).

Stačí vyzkoušet čísla[4]: 13 (p), 25 (N^2), 37 (p), 49 (N^2), 61 (p), 73 (p), 85 ($5 \cdot 17$), 97 (p), 45 ($5 \cdot 3^2$), 81 (N^2). Je vidět, že jedině 45 by mohlo být dokonalé (je ve tvaru požadovaném větou V1), ale součtem dělitelů zjistíme, že není.

Závěr: Dokonalá čísla menší nebo rovna 100 jsou pouze 6 a 28.

Poznámky k došlým řešením: a) Ti z vás, kteří dostali 0 bodů, si špatně přečetli zadání. Podívejte se, co bylo myšleno jako „každý n-tý“!

b) Vysvětlení pro ty, kteří dostali 2 až 5 bodů: Přijít na to, že dokonalí vojáčci jsou právě ti, jejichž pořadové číslo je číslo dokonalé, nebyl pro toho, kdo zná definici dokonalých čísel, žádný problém. Takové zjištění nebylo vrcholem úlohy, proto ti, kteří se již dále nesnažili, neobdrželi více než 2 body. (Naopak, kdo definici dokonalých čísel nezná, nebyl nijak postihován; není účelem semináře, abyste jen prohlédávali knihy a zjišťovali, jak se čemu říká.) Přinejmenším jste se měli snažit nějak vyjádřit obecné dokonalé číslo (alespoň u sudých to lze, a i u lichých se dá na něco přijít) a hlavně svá tvrzení dokázat. Zde byl právě kámen úrazu: většina z vás totiž našla jakási tvrzení v jakýchsi knihách a slepě jim věřila. Najdete-li někde něco a opíšete to, musíte to také dokázat a nebo alespoň napsat, že důkaz je tam a tam a nechce se vám ho opisovat (i mě to

[3] Zatím není žádné známo, ani není dokázáno, že takové neexistuje.

[4] Symbolem p značíme prvočíslo, N značí přirozené číslo.

připadá trochu zbytečné, takže taková řešení jsem uznával, ale museli jste projevit alespoň to, že si uvědomujete, že důkaz by do řešení patřil, a zmínit se o něm). Plný počet bodů tedy dostali jen ti, kteří nejen přišli na obecný vztah pro sudá dokonalá čísla, případně i na něco pro lichá, ale kteří se ho snažili také dokázat, nebo uvedli přesně, kde lze důkaz najít. Kdo uvedl vztah, nedokázal jej a ani se nezmínil o tom, kde se důkaz nalézá, dostal zhruba 3 body. Mnoho z vás pak také dokázalo jen jednu implikaci (tedy že jste našli sudá dokonalá čísla, ale ne že jiná sudá neexistují, to jest tu lehčí), ti pak dostali zhruba 4 body (nebo 3 nebo dokonce 5, podle toho, jak se snažili pro lichá čísla).

c) Stále větší část z vás posílá svá řešení na listech nestandardních formátů. Každou úlohu máte psát na zvláštní list formátu A4! Pokud pošlete papír jiného formátu (zpravidla menšího), pak kromě toho, že znepříjemníte život opravovatelům, také riskujete, že při třídění vaše řešení vypadne a mnohem snadněji se ztratí.