8. série

Téma: Zlatý hřeb

Termín odeslání: 20. KVĚTNA 1996

1. ÚLOHA

Dokažte, že číslo $77777777^{7777^{77^{7}}} + 1$ má alespoň k různých prvočíselných dělitelů. Číslo k tentokrát není chybou v zadání, zvolte si ho podle svých schopností. Čím větší bude, tím víc bodů můžete dostat.

2. ÚLOHA

Máme dánu kružnici k se středem S a její tečnu, přímku p. Nyní na přímce p zvolme bod X ($X \notin k$), na tečně q kružnice k procházející bodem X ($q \neq p$) body M, N, na přímce p body K, L, aby byly splněny následující podmínky:

(a) $|XK| > |XL|$, $|XM| > |XN|$;
(b) bod S náleží úsečce KM;
(c) přímka LN je tečnou kružnice k;
(d) $|\sphericalangle LNM| + |\sphericalangle MKL| = |\sphericalangle NLK| + |\sphericalangle KMN|$.

Musí pak platit $|KM| = |KL| + |MN|$?

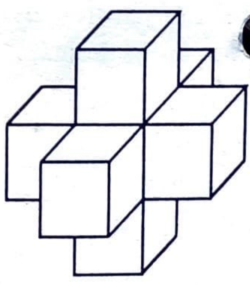
3. ÚLOHA

(a) Nechť r je přirozené číslo. Najděte všechna n (v závislosti na r) taková, že f_{f_n} je dělitelem čísla f_{f_r}; f_i je i-tý člen Fibonacciho posloupnosti.

(b) Dokažte, že žádné Fibonacciho číslo není dělitelné sedmnácti.

(c) Dokažte, že Fibonacciho číslo je dělitelné čtyřmi právě tehdy, když je dělitelné šesti.

4. ÚLOHA



Představ si těleso, které vznikne tak, že na každou stěnu krychle přilepíme další, stejně velkou. Nedokáš-li si ho představit, podívej se napravo od tohoto odstavce (pak jsem ovšem zvědav, jak budeš úlohu řešit). Zjisti, jestli lze kopiemi tohoto tělesa beze zbytku vyplnit prostor.

5. ÚLOHA

Mějme dáno $n + 1$ různých nezáporných **reálných** čísel. Dokažte, že lze mezi nimi nalézt x, y tak, aby $0 < n\,|x - y| < (x + 1)(y + 1)$.

6. ÚLOHA

Sečtěte:

(a) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}^2 = \binom{2m}{m}$ (b) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n}{l}\binom{n}{l+1}.$

Kombinatorická řešení mají přednost (tj. dostanete za ně (nejspíš) více bodů.

7. ÚLOHA

Buď P polynom s komplexními koeficienty takový, že všechny jeho kořeny (komplexní) leží v horní polorovině, tj. mají nezápornou imaginární část. Dokažte, že i kořeny jeho derivace leží v horní polorovině.

Nadprůměrně inteligentní jedinci (tedy například řešitelé našeho semináře) si jistě povšimli poněkud neobvyklého počtu příkladů v této sérii. Ano, je jich sedm. Ti všímavější si možná také všimli, že pokud získají 35 bodů, což je při sedmi příkladech docela snadno (?) proveditelné, vzniknou značné problémy při dosazování do bonifikačního vzorečku uvedeného v úvodním letáku.

Proto se s platností od letošní osmé série nejméně do konce tohoto ročníku upravuje předpis pro bonifikaci takto: všude, kde se v úvodním letáku vyskytovala konstanta 25, bude nahrazena hodnotou $5n$, kde n je počet příkladů v sérii.

Za poslední sérii je tedy možné získat až 35 bodů. Do celkového pořadí se bude započítávat šest nejlepších sérií, takže je velice praktické osmou sérii řešit. Doufejme, že to aspoň někoho odradí od úmyslu osmou sérii neposílat (což je poměrně hojně rozšířený zvyk).