Korespondenční seminář, KMA MFF UK, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8 – Karlín

4. série

Téma: Stereometrie

Termín odeslání: 8. LEDNA 1996

1. ÚLOHA

V čtyřstěnu $ABCD$ jsou každé dvě protilehlé hrany stejně dlouhé. Ukažte, že

a) všechny tělesové výšky jsou stejně dlouhé

b) pro každý vnitřní bod čtyřstěnu je součet jeho vzdáleností od jednotlivých stěn čtyřstěnu stejný.

2. ÚLOHA

Vnitřním bodem čtyřstěnu jsou vedeny roviny rovnoběžné se stěnami čtyřstěnu tak, že každý trojúhelník vzniklý protnutím roviny takto vedené má obsah s. Zjistěte velikost s, znáte-li obsahy stěn čtyřstěnu a, b, c, d. Nápověda: zkuste nejprve vyřešit dvourozměrnou analogii.

3. ÚLOHA

(Pomocná úloha k 4. Její řešení můžete pro 4. využít, i když tuto úlohu nevyřešíte.) Nechť A, B, C, D jsou body v prostoru. Dokažte, že

$$|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCD| + |\sphericalangle CDA| \leq 2\pi.$$

4. ÚLOHA

Dokažte, že součet úhlů svíraných stěnami čtyřstěnu je

a) menší než 3π

b) větší než 2π.

5. ÚLOHA

Na sféře (tj. na kulové ploše) jsou body A, B, C, A', B', C' tak, že úsečky AA', BB' a CC' se protínají v bodě P, $|AA'| = |BB'| = |CC'|$ a koule procházející body A, B, C a P se dotýká koule procházející body A', B', C' a P. Musí být $|AO| = |BO| = |CO|$? Odpověď dokažte.