

3. série

Téma: Fibonacciho posloupnost

Termín odeslání: 15. PROSINCE 1995

Fibonacciho posloupnost je definována takto:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (\text{pro } n > 2).$$

1. ÚLOHA

Dokažte, že pro každé přirozené k platí

$$\sum_{i=0}^k \binom{k+i}{k-i} = \sqrt{1 + f_{2k} \sum_{i=0}^k \binom{2k+1-i}{i}}$$

2. ÚLOHA

Dokažte, že existují různá celá čísla a, b, m taková, že $0 < a < m; 0 < b < m$ a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad m \mid f_n - anb^n.$$

3. ÚLOHA

Máme kružnici o obvodu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Na její obvod budeme psát přirozená čísla tímto způsobem: nejprve kamkoliv zapíšeme jedničku. Ve vzdálenosti 1, měřeno po obvodu kružnice v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček), napíšeme číslo 2. Stejně pokračujeme dále. V n -tém kroku napíšeme číslo n ve vzdálenosti 1 od čísla $n-1$ (opět v kladném smyslu).

Dokažte, že až po libovolně mnoha krocích skončíme, bude rozdíl každých dvou sousedních (tj. nejbližších na kružnici) čísel napsaných na kružnici nějaké Fibonacciho číslo.

4. ÚLOHA

Pro která přirozená čísla n, k je $f_n^{4k} + 4$ prvočíslo?

5. ÚLOHA

Pro která přirozená čísla existuje člen Fibonacciho posloupnosti dělitelný tímto číslem?