Komplexní čísla

Na množině všech dvojic reálných čísel zavedeme sčítání a násobení tímto předpisem:

$$[z_1, z_2] + [w_1, w_2] = [z_1 + w_1, z_2 + w_2]$$
$$[z_1, z_2] \cdot [w_1, w_2] = [z_1 w_1 - z_2 w_2, z_1 w_2 + z_2 w_1]$$

(sčítání je po složkách, násobení vypadá na první pohled trochu divně). Každou dvojici $z = [z_1, z_2]$ nazveme *komplexním číslem*, první složku $\mathrm{Re}\, z := z_1$ jeho reálnou částí, druhou $\mathrm{Im}\, z := z_2$ jeho *imaginární částí*. Číslo $\bar{z} := [z_1, -z_2]$ se nazývá číslem *komplexně sdruženým* k z. Snadno ověříme, že sčítání a násobení mají všechny běžné vlastnosti sčítání a násobení reálných čísel a že vztahy

$$[z_1, z_2] + [w_1, w_2] = [z_1 + w_1, z_2 + w_2]$$
$$\frac{[z_1, z_2]}{[w_1, w_2]} = \left[\frac{z_1 z_2 + w_1 w_2}{w_1^2 + w_2^2}, \frac{z_2 w_1 - z_1 w_2}{w_1^2 + w_2^2}\right]$$

definují odčítání a dělení s rozumnými vlastnostmi. Dále snadno ověříme, že ztotožníme-li $[x, 0]$ s reálným číslem x, jsou nově definované operace rozšířením původních, definovaných na $\mathbb{R}$. Označíme-li komplexní číslo $[0, 1]$ symbolem i (nazývá se *imaginární jednotka*), můžeme psát (jak je také zvykem) místo $[x, y]$ pohodlněji $x + iy$. Všimněte si, že platí $\mathrm{i}^2 = -1$. Množina všech komplexních čísel se obvykle značívá $\mathbb{C}$.

Geometricky můžeme znázornit komplexní číslo $x + iy$ jako bod o (kartézských) souřadnicích $[x, y]$ v rovině. V rovině ale také můžeme zavést polární souřadnice. Každé komplexní číslo lze tedy psát ve tvaru $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, kde r a φ jsou vhodná reálná čísla. Přidáme-li podmínky $r \geq 0$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$, bude pro $z \neq 0$ toto vyjádření dokonce jednoznačné (rozmyslete si detaily). Číslo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ se nazývá *absolutní hodnota* (*modul*) čísla z, číslo φ pak *argument*. Číslo s absolutní hodnotou rovnou jedné (tedy číslo tvaru $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$) se nazývá *komplexní jednotkou*.

Každé zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tak můžeme chápat jako zobrazení roviny do sebe. Rozmyslete si, že přičtení komplexní konstanty odpovídá posunutí, násobení kladnou reálnou konstantou stejnolehlosti se středem 0, násobení komplexní jednotkou $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ otočení okolo nuly o úhel α a konečně $f(z) = \bar{z}$ je osová symetrie podle reálné osy. Rozmyslete si, jak se popíše otočení okolo obecného středu nebo osová symetrie podle obecné osy.

Máme-li násobení, můžeme přirozeným způsobem definovat i mocniny s přirozeným exponentem. Použitím goniometrických vzorečků a matematické indukce se ukáže, že

$$[r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)] \cdot [r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)] = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$
$$[r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)]^n = r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi))$$

(Moivréova věta). Odtud snadno nahlédneme, že definujeme-li exponenciální funkci předpisem

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y), \tag{*}$$

bude rozšířením exponenciály v reálném oboru a zachová si její nejpodstatnější vlastnosti, tedy hlavně $e^{x+y} = e^x e^y$. Z definice (*) snadno odvodíme, že pro reálné číslo x platí

$$(**) \qquad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right),$$

Rovnostmi (**) můžeme definovat funkce sinus a kosinus i pro komplexní x. Ověřte si, že pak bude platit i vztah (*) pro libovolná komplexní x, y.

Speciálním druhem funkcí jsou polynomy. Polynomem s komplexními koeficienty budeme rozumět funkci tvaru $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, kde $a_j \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Číslo n budeme nazývat *stupněm* polynomu P. Z technických důvodů se ukazuje, že je praktické mezi polynomy počítat i identicky nulovou funkci. Její stupeň se někdy definuje jako -1, někdy jako $-\infty$, občas se říká, že není definován.

Derivací polynomu $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ nazveme polynom $P'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1$. Snadno ověříme základní vlastnosti: $(P \pm Q)' = P' \pm Q'$, $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ nazveme r-násobným kořenem ($r \geq 1$ celé) polynomu P, jestliže existuje polynom Q takový, že $P(z) = Q(z)(z - \alpha)^r$, $Q(z) \neq 0$. Jednou z největších výhod komplexních čísel oproti reálným se zabývá *fundamentální věta algebry*:

Věta *Buď $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polynom s komplexními koeficienty, jehož stupeň je aspoň jedna (není to konstanta). Pak existuje komplexní číslo z takové, že $P(z) = 0$.*

Podotýkám, že to je opravdu velmi hluboká věta. V oboru reálných čísel obdobné tvrzení pochopitelně neplatí, protipříkladem je třeba polynom $P(x) = x^2 + 1$ (mimochodem, jaký má komplexní kořen?).

Za pomoci této věty už se snadným postupem (pro zájemce viz. třeba V. Jarník, Integrální počet I., kap. IV., §1) ukáže, že

(i) existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tak, že $P(z) = a_n (z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_n)$;
(ii) čísla α_i jsou (až na pořadí) určena jednoznačně, jsou to kořeny P a každý se vyskytuje tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

Tomuto zápisu se obvykle říká rozklad polynomu na kořenové činitele. Někdy se píše také ve tvaru $P(z) = a_n (z - \alpha_1)^{r_1} \ldots (z - \alpha_m)^{r_m}$, kde α_j jsou (různé) kořeny, m jejich počet a r_j příslušné násobnosti. Zřejmě pak platí $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n$.