Zvolíme-li vhodně souřadnice v rovině, budou vrcholy našeho n-úhelníka právě kořeny rovnice $z^n = 1$ (to je snadný důsledek Moivréovy věty). Vybereme-li nyní nějakých k_j jeho vrcholů, které jsou vrcholy pravidelného k_j-úhelníka, bude mít tento k_j-úhelník střed v bodě 0 a bude vepsán do jednotkové kružnice. Jeho vrcholy pak budou právě kořeny rovnice $z^{k_j} = \varepsilon_j$, kde $|\varepsilon_j| = 1$. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že $k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_s$, kde s je počet barev. Polynom $\prod_{j=1}^{s} (z^{k_j} - \varepsilon_j)$ (stupně n) má tedy stejných n kořenů jako $z^n - 1$, oba jsou to polynomy stupně n s vedoucím koeficientem 1. Podle tvrzení v přípravném textu je tedy

$$\prod_{j=1}^{s} (z^{k_j} - \varepsilon_j) = z^n - 1$$

a musí se rovnat i koeficienty u všech mocnin. Roznásobíme-li levou stranu, dostaneme absolutní člen $(-1)^s \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_s$, jinak vždy dostaneme aspoň z^{k_1}; předpokládejme, že $k_1 < k_2$. Potom dostaneme nalevo z^{k_1} pouze pokud vezmeme z první závorky z^{k_1} a z ostatních $-\varepsilon_j$; při jiné volbě totiž dostaneme aspoň z^{k_2}. Koeficient u z^{k_1} na levé straně je tedy $(-1)^{s-1}\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_s$, jeho absolutní hodnota je 1. Napravo však pokud $n \neq k_1$ (tedy $s > 1$) dostaneme u této mocniny nulu. Tedy $k_1 = k_2$.

Komentáře k 8. sérii

1. úloha Dokažte, že číslo $77777777^{7777^{77^7}} + 1$ má alespoň k různých prvočíselných dělitelů. Číslo k tentokrát není chybou v zadání, zvolte si ho podle svých schopností. Čím větší bude, tím více bodů můžete dostat.

Ukáži zde jednoduchý postup pro $k = 77^7 + 1$.

Označme $\xi = 77777777^{7777^{77^7}} + 1$, dále pro každé kladné celé i položme

$$\zeta_i = 77777777^{1111^{77^7} \cdot 7^i}, \quad \theta_i = \zeta_i^6 - \zeta_i^5 + \zeta_i^4 - \zeta_i^3 + \zeta_i^2 - \zeta_i + 1.$$

Pro každé $i \in N_0$ platí zřejmé identity

$$\zeta_{i+1} + 1 = \theta_i \cdot (\zeta_i + 1), \tag{1}$$

$$\theta_i - (\zeta_i^5 - 2\zeta_i^4 + 3\zeta_i^3 - 4\zeta_i^2 + 5\zeta_i - 6) \cdot (\zeta_i + 1) = 7. \tag{2}$$

Ze vztahu (2) plyne: pokud pro nějaké prvočíslo p platí $p \mid \theta_i$ a $p \mid (\zeta_i + 1)$, pak $p \mid 7$, tj. $p = 7$. Avšak 7 není dělitelem čísla $(\zeta_i + 1)$, tedy jsou čísla $(\zeta_i + 1)$ a θ_i nesoudělná. Využitím vztahu (1) a zřejmé skutečnosti $\xi = \zeta_{k-1} + 1$ máme

$$\xi = \theta_{k-1}\theta_{k-2} \ldots \theta_2\theta_1\theta_0(\zeta_0 + 1).$$

To je však rozklad čísla ξ na k po dvou nesoudělných činitelů, které jsou zřejmě větší než 1. Tedy ξ má aspoň k prvočíselných dělitelů, což jsme chtěli.

2. úloha Máme dánu kružnici k se středem S a její tečnu, přímku p. Nyní na přímce p zvolme bod X ($X \notin k$), na tečně q kružnice k procházející bodem X ($q \neq p$) body M, N, na přímce p body K, L, aby byly splněny následující podmínky:

(a) $|XK| > |XL|$, $|XM| > |XN|$;
(b) bod S náleží úsečce KM;
(c) přímka LN je tečnou kružnice k;
(d) $|\sphericalangle LNM| + |\sphericalangle MKL| = |\sphericalangle NLK| + |\sphericalangle KMN|$.

Musí pak platit $|KM| = |KL| + |MN|$?

Označme body dotyku kružnice k s přímkami p, q po řadě U, V. Bod dotyku přímky LN s kružnicí k označme W. Ze symetrie zřejmě platí $|VN| = |WN|$, $|WL| = |UL|$. Body U, V a W jsou dotykové body tečen ke kružnici k. Proto $SV \perp MN$, $SU \perp KL$, $SW \perp LN$. Z podmínky d) plyne

$$|\sphericalangle LNM| + |\sphericalangle MKL| = \pi = |\sphericalangle NLK| + |\sphericalangle KMN|.$$

Označíme-li nyní $\alpha = |\sphericalangle NSV|$ a $\beta = |\sphericalangle LSU|$ dostáváme z podobnosti trojúhelníků $\alpha = |\sphericalangle NSW|$, $\beta = |\sphericalangle LSW|$. A z podmínky d) pak máme $|\sphericalangle MKL| = 2\alpha$, $|\sphericalangle KMN| = 2\beta$. Označíme-li poloměr kružnice k písmenem r, dostaneme z pravoúhlých trojúhelníků:

$$|KS| = \frac{r}{\sin 2\alpha} \qquad |MS| = \frac{r}{\sin 2\beta}$$
$$|KU| = \frac{r}{\operatorname{cotg} 2\alpha} \qquad |MV| = \frac{r}{\operatorname{cotg} 2\beta}$$
$$|NV| = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha} \qquad |LU| = \frac{r}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Využitím zřejmé[7] identity

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha},$$

pak máme $|NV| + |KU| = |KS|$, analogicky (záměnou α za β) dostáváme $|LU| + |MV| = |MS|$. Sečtením posledních dvou rovnic máme $|KU| + |UL| + |MV| + |VN| = |KS| + |SM|$, což nám dává $|KL| + |MN| = |KM|$. Tedy za uvedených předpokladů musí vždy platit $|KM| = |KL| + |KM|$.

3. úloha (a) Nechť r je přirozené číslo. Najděte všechna n (v závislosti na r) taková, že f_{f_n} je dělitelem čísla f_{f_r}; f_i je i-tý člen Fibonacciho posloupnosti.

(b) Dokažte, že žádné Fibonacciho číslo není dělitelné sedmnácti.

(c) Dokažte, že Fibonacciho číslo je dělitelné čtyřmi právě tehdy, když je dělitelné šesti.

Do zadání se bohužel vloudily dvě chyby, takže jsme po vás chtěli dokázat něco, co neplatilo, a mnoho z vás nalezlo protipříklad. V části (b) mělo být „... žádné liché ....“,

---

[7] Jak komu – pozn. žasnoucího Roberta

v části (c) „ ... když je jeho index dělitelný ... “ Proto bylo rozdělení bodů do částí celkem přirozené: 3:1:1. Imaginární body tentokrát dostali někteří z vás i za to, že uhodli, jak má správně zadání znít a původně zamýšlenou úlohu vyřešili. Nyní už řešení (původních úloh) (inspirováno řešeními *Tomáše Bárty* a *Michala Beneše*)

Lemma: *Dáno $n \in \mathbb{N}$. Nechť i je nejmenší kladné celé číslo, s vlastností $n \mid f_i$. Pak $n \mid f_k$ právě když $i \mid k$.*

Důkaz: Napišme Fibonacciho posloupnost modulo n (tedy posloupnost zbytků příslušného Fib. čísla po dělení n). Je snadné si uvědomit, že taková posloupnost je ryze periodická (tj. je periodická a nemá předperiodu),[8] navíc nula v této posloupnosti značí, že odpovídající Fibonacciho číslo je dělitelné n. V této posloupnosti je první nula na nultém místě (zbytek $f_0 = 0$ po dělení n), další na i-tém místě (neboť f_i je první (po nultém) Fibonacciho číslo dělitelné n). Z periodičnosti posloupnosti zbytků plyne, že všechny nuly budou na místech ki, $k \in \mathbb{N}$, a tedy že $n \mid f_k$, právě když $i \mid k$.

a) Není-li $m = 2$, pak první Fib. číslo dělitelné f_m (Nepočítaje nulté. Tuto poznámku budeme dále vynechávat.) bude právě f_m (Fib. posloupnost je totiž kromě f_2 rostoucí a $a \mid b \implies a \leq b$). Podle Lemmatu (klademe $n = f_m$, $i = m$) je proto $m \mid k \iff f_m \mid f_k$, dohromady tedy máme $f_m \mid f_k \iff m \mid k$ nebo $m = 2$. Toho nyní využijeme:

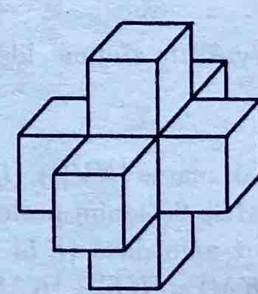
$$f_{f_n} \mid f_{f_r} \iff f_n \mid f_r \text{ nebo } f_n = 2 \iff n \mid r \text{ nebo } n = 2 \text{ nebo } f_n = 2.$$

Takže všechna hledaná n jsou 2, 3 ($f_3 = 2$) a dělitelé r.

b) První Fib. číslo dělitelné sedmnácti je $f_9 = 34$. Podle Lemmatu ($n = 17$, $i = 9$) je tedy $17 \mid f_k \iff 9 \mid k$. Podle Lemmatu ($n = 34$, $i = 9$) je $9 \mid k \iff 34 \mid f_k$. Spojením dostáváme $17 \mid f_k \iff 34 \mid f_k$, takže žádné liché Fib. číslo není dělitelné sedmnácti.

c) První Fib. číslo dělitelné čtyřmi je f_6. Odtud použitím Lemmatu dostáváme požadované.

4. úloha



Představ si těleso, které vznikne tak, že na každou stěnu krychle přilepíme další, stejně velkou. Nedokáš-li si ho představit, podívej se napravo od tohoto odstavce (pak jsem ovšem zvědav, jak budeš úlohu řešit). Zjisti, jestli lze kopiemi tohoto tělesa beze zbytku vyplnit prostor.

Rozdělme si prostor na krychličky o hraně 1 tak, aby měly středy v mřížových bodech. Krychličky rozdělme do sedmi skupin podle zbytku čísla $x + 2y + 3z$ při dělení sedmi ($[x, y, z]$ jsou souřadnice středu). Jako středové krychličky označíme ty, které dají zbytek nula a doplníme je na prostorový kříž. Stačí ukázat, že každá krychlička je právě v jednom kříži. Uvědomme si, že zbytek ukazuje jednoznačně polohu krychličky v kříži: zbytek tři znamená, že krychlička je horní, zbytek čtyři dolní, jedna pravá, šest levá, dva zadní a pět přední. Například krychlička se zbytkem čtyři má nad sebou krychličku se zbytkem nula, tedy středovou, je tedy alespoň v jednom kříži (obdobně pro ostatní zbytky). Naopak poloha každé

[8] Pokud ti to snadné nepřipadá, přečti si znovu komentář k páté úloze třetí série.

krychličky v kříži jednoznačně určuje její zbytek, krychlička se zbytkem čtyři tedy může být pouze spodní. Pokud by ovšem byla spodní ve dvou křížích, musely by se kříže shodovat. Stejně tak i pro ostatní zbytky.

5. úloha Mějme dáno $n+1$ různých nezáporných **reálných** čísel. Dokažte, že lze mezi nimi nalézt x, y tak, aby $0 < n|x-y| < (x+1)(y+1)$.

Nejprve pomocné tvrzení: máme-li $n+1$ různých čísel v intervalu $[0,1)$, musí mezi nimi být p, q tak, že $0 < q-p < 1/n$. Uvažujeme-li totiž rozdíly sousedních, je to n čísel, jejichž součet je roven rozdílu nejmenšího a největšího z původních, je tedy menší než jedna. Aspoň jeden z rozdílů je tedy menší než $1/n$.

Označme $f(x) = x/(x+1)$; funkce je rostoucí a zobrazuje $[0,\infty)$ na $[0,1)$ (prostě). Uvažujeme-li obrazy našich čísel, dostaneme $n+1$ čísel z $[0,1)$. Mezi původními tedy existují dvě tak, že $x > y$ a

$$\frac{1}{n} > \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} = \frac{x-y}{(x+1)(y+1)}.$$

Pak ovšem $0 < n|x-y| < (x+1)(y+1)$.

6. úloha Sečtěte:

$$\text{(a)} \quad \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}^2 \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l}\binom{n}{l+1}.$$

Kombinatorická řešení mají přednost (tj. dostanete za ně (nejspíš) více bodů.

Nejprve důkaz, který se často užívá při odvozování/dokazování kombinatorických identit. Nikoho nepřekvapí rovnost $(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$. Použijme na obě strany této rovnosti binomickou větu:

$$\text{(R)} \qquad (1+x)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k$$

$$\text{(L)} \qquad (1+x)^p(1+x)^q = \sum_{l=0}^{p} \binom{p}{k} x^l \sum_{m=0}^{q} \binom{q}{k} x^m.$$

Roznásobením sum v (L) a sečtením koeficientů u stejných mocnin x získáme

$$(1+x)^p(1+x)^q = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{p}{l}\binom{q}{k-l} \right) x^k.$$

Tento výraz je polynom stupně $p+q$ v proměnné x a přitom je roven polynomu, který se vyskytuje na pravé straně rovnosti (R). Koeficienty u odpovídajících si mocnin x jsou si rovny, tedy pro $k = 0,1,2,\ldots,p+q$ máme

$$\text{(C)} \qquad \sum_{l=0}^{k} \binom{p}{l}\binom{q}{k-l} = \binom{p+q}{k}.$$

Mimochodem, tato rovnost patří mezi „slavné“[9] a nazývá se Cauchyova formule.

Nyní položíme $p = q = k = n$, uvážíme, že $\binom{n}{n-l} = \binom{n}{l}$ a dostaneme

$$\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}^2 = \binom{2n}{n}$$

Dále položme $p = q = n$, $k = n - 1$ a povšimneme si, že $\binom{n}{n-1-l} = \binom{n}{l+1}$. Rovnost (C) nám poté dává

$$\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l}\binom{n}{l+1} = \binom{2n}{n-1}.$$

Tyto důkazy, které spočívají v tom, že se cosi spočte dvojím způsobem a výsledky (polynomy, mocninné řady ...) se porovnají, nejsou příliš elegantní. Snadno tímto způsobem vyprodukujete zajímavé kombinatorické identity, obrácený postup, tj. uhodnout, co počítat a srovnávat, abychom dostali konkrétní identitu, bývá mnohem obtížnější a vyžaduje jistou zkušenost. Předvedeme proto kombinatorické úvahy, kterými lze výše zmíněné rovnosti snadno odvodit.

Ve třídě je $2n$ studentů a učitel, který zrovna probírá kombinatoriku, vysvětluje, že vybrat z nich skupinu n studentů lze právě $\binom{2n}{n}$ způsoby. V tom se ozve známá feministka, studentka T.T., a říká: „Ve třídě je n hochů a n dívek. Požaduji rozbor všech možných výběrů s ohledem na pohlaví vybraných osob.“ Poté, co je vyvolána k tabuli, převede výpočet:

Lze vybrat n dívek a 0 chlapců (tiše se usmívá), což lze učinit $\binom{n}{n}\binom{n}{0}$ způsoby, nebo

$n - 1$ dívek a 1 chlapce (úsměv trvá, ale již není tak srdečný), což lze učinit $\binom{n}{n-1}\binom{n}{1}$ způsoby, nebo

$n - 2$ dívek a 2 chlapce (úsměv zvolna mizí), což lze učinit $\binom{n}{n-2}\binom{n}{2}$ způsoby, nebo

$\vdots$

nebo 0 dívek a n chlapců (vypadá velmi nahněvaně) což lze učinit $\binom{n}{0}\binom{n}{n}$ způsoby. Na tabuli pak vidíme součet

$$\text{(TT)} \qquad \binom{n}{n}\binom{n}{0} + \binom{n}{n-1}\binom{n}{1} + \binom{n}{n-2}\binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{0}\binom{n}{n}.$$

Nyní zbývá (kombinatoricky) uvážit, že $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. To je ovšem snadné, neboť zřejmě úloha vybrat k dívek ze skupiny n dívek je stejná, jako úloha určit $n - k$ dívek z této skupiny, které nebudou vybrány. Po úpravě výrazu (TT) a srovnáním s hodnotou, kterou vypočetl učitel, dostáváme kýžené. Úlohu b) a také Cauchyovu formuli lze dokázat podobnými úvahami.

---

[9] Slavné formule, nerovnosti, identity atd. jsou ty, které se po někom jmenují. Např. trojúhelníková nerovnost se jmenuje podle trojúhelníka.

Ti, kteří řešili úlohu „standartně“ (první důkaz výše) dostali 0*i*. Za hezké, kombinatorické řešení (Kromě „feministického“ se objevila i pěkná řešení pomocí cest ve čtvercové síti. (Počet nejkratších cest ve čtvercové síti mezi body $(0,0)$ a (m,n) je $\binom{m+n}{m}$)) dostali jejich autoři po jednom i.

7. úloha Buď P polynom s komplexními koeficienty takový, že všechny jeho kořeny (komplexní) leží v horní polorovině, tj. mají nezápornou imaginární část. Dokažte, že i kořeny jeho derivace leží v horní polorovině.

Buď $P(z) = a(z-z_1)\dots(z-z_n)$; ze vztahu $(PQ)' = P'Q + PQ'$ dostaneme indukcí $(P_1\dots P_k)' = P_1'P_2\dots P_k + P_1P_2'\dots P_k + \dots + P_1\dots P_{k-1}P_k'$, protože $(z-z_j)' = 1$, dostáváme

$$P'(z) = P(z)\left(\frac{1}{z-z_1} + \dots + \frac{1}{z-z_k}\right),$$

(pro z různá od všech z_j). Kořeny P' jsou tedy buď kořeny P (a ty leží v horní polorovině) nebo kořeny závorky. Stačí tedy ukázat, že pro $\operatorname{Im} z < 0$ je závorka nenulová. Snadno spočítáme, že pro $\operatorname{Im} z < 0$, $\operatorname{Im} z_j \geq 0$ (nezapomeň: z_j je kořen P) je $\operatorname{Im}(z-z_j) < 0$, a tedy $\operatorname{Im} 1/(z-z_j) > 0$. Každý ze sčítanců v závorce má tedy kladnou imaginární část, stejně tak i jejich součet, závorka tedy nemůže být nulová.