✉ *Korespondenční seminář, KMA MFF UK, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8 – Karlín* ✉

1. úloha Zjistěte, jestli existuje komplexní číslo z takové, že $\sin z = 2$. Pakliže ano, nalezněte nějaké takové.

Rozepíšeme-li si definici sinu v komplexním oboru (vztah (**) v textu před zadáním), dostaneme, že $\sin z = 2$ právě tehdy, když

$$\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = 2$$
$$\left(e^{iz}\right)^2 - 1 = 4ie^{iz}.$$

Rovnici jsme pouze přenásobili (nenulovou) hodnotou $2ie^{iz}$. Položíme-li $w = e^{iz}$, dostaneme kvadratickou rovnici $w^2 - 4iw - 1 = 0$, což můžeme ekvivalentně (pomocí vzorce pro čtverec rozdílu) přepsat na $(w-2i)^2+3 = 0$; označíme-li $u = w-2i$, je $\sin z = 2$ ekvivalentní $u^2 = -3$. Snadno se ukáže (buď z důsledku fundamentální věty algebry nebo z Moivréovy věty), že to nastane právě tehdy, když $u = \pm i\sqrt{3}$, tedy $e^{iz} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right) i$. Položme ještě $x + yi = iz$, rovnice přejde na $e^x(\cos y + i \sin y) = \left(2 \pm \sqrt{3}\right) i$, což okamžitě implikuje $x = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$, $\cos y + i \sin y = i$, tedy $y = \pi/2 + 2k\pi$ (kde $k \in \mathbb{Z}$). No a protože vztah mezi $x + yi$ a v je zjevně jednoznačný, dostáváme, že $\sin z = 2$ právě tehdy, když

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \left(2 \pm \sqrt{3}\right) i, \quad \text{kde } k \text{ je celé číslo.}$$

2. úloha Zobecněnou kružnicí v rovině nazveme libovolnou kružnici nebo přímku. Dokažte, že racionální lomená funkce

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

(a, b, c, d jsou komplexní koeficienty) zobrazuje libovolnou zobecněnou kružnici opět na zobecněnou kružnici.

Dokážeme ještě malý dodatek, který se nám bude hodit ve třetí úloze: lineární lomená funkce navíc buď zobrazí kruh na kruh a doplněk na doplněk nebo kruh na doplněk kruhu a doplněk kruhu na kruh. Všechny formulace budou o něco jednodušší, pokud $\mathbb{C}$ doplníme o bod ∞, definujeme $f(\infty) = a/c$, $f(-d/c) = \infty$ a řekneme, že ∞ leží na každé přímce.

V zadání úlohy jsem bohužel vynechal podstatný předpoklad $ad \neq bc$. Pokud totiž $ad = bc$, je příslušná lineární lomená funkce identicky rovna konstantě. Dále pokud $c = 0$, jde o lineární funkci, podle přípravného textu tedy o podobnost. Nechť tedy $ad \neq bc$, $c \neq 0$. Snadno dostaneme

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{ad-bc}{c(cx+d)} = \varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(x))),$$

kde $\varphi_1(y) = a/c + (ad-bc)y$, $\varphi_2(y) = 1/y$, $\varphi_3(y) = c^2y + cd$. Funkce φ_1 a φ_3 jsou lineární s nenulovým koeficientem u y, mají tedy požadovanou vlastnost. Stačí proto ukázat, že ji má i φ_2.

Protože funkce $1/y$ je prostá a inverzní sama k sobě, zřejmě stačí ukázat, že obraz libovolné zobecněné kružnice je částí nějaké zobecněné kružnice. K tomu stačí ukázat, že pokud čtyři body leží na zobecněné kružnici, jejich obrazy leží také na zobecněné kružnici. Definujme *dvojpoměr* čtveřice (různých) bodů

$$(x,y,z,w) := \frac{(z-x)(w-y)}{(w-x)(z-y)}$$

s tím, že pokud je jedno z čísel rovno ∞, vynecháme ty dva rozdíly, kde by se vyskytovalo. Uvědomíme-li si, že argument $(v-u)/(w-u)$ je (orientovaný) úhel $\sphericalangle vuw$, snadno z věty o obvodových úhlech dostaneme, že body (x,y,z,w) je reálné číslo právě tehdy, když body x, y, z a w leží na zobecněné kružnici (rozeberte si jednotlivé případy). Navíc pro pevné x, y, z znaménko imaginární části (x,y,z,w) odpovídá tomu, ve které z částí, na které dělí rovinu zobecněná kružnice procházející x, y, z, leží bod w. Dokazované tvrzení je pak okamžitým důsledkem identity $(x^{-1},y^{-1},z^{-1},w^{-1}) = (x,y,z,w)$ (dokažte si ji za cvičení, nezapomeňte na případ, kdy jedno z čísel je 0 nebo ∞).

3. úloha Nalezněte nutnou a postačující podmínku na koeficienty a, b, c, d racionální lomené funkce (viz. druhou úlohu), aby zobrazovala otevřený jednotkový kruh na sebe.

Dodatek, který jsme dokázali navíc ve druhé úloze nám zajišťuje, že lineární lomená funkce zobrazuje jednotkový kruh na sebe právě tehdy, když zobrazuje jednotkovou kružnici na sebe a počátek zobrazuje dovnitř jednotkového kruhu. Jednotkový kruh budeme značit U.

Definujme tzv. *Blaschkeho faktor* $B_\alpha(z) = (z-\alpha)/(1-\bar{\alpha}z)$; chvilka počítání nám dá následující vlastnosti: pro $|\alpha|<1$ je $B_\alpha(U) = U$, $B_\alpha = 0$, $B_\alpha(B_{-\alpha}(z)) = z$. Snadno zjistíme, že složením dvou lineárních lomených funkcí je opět lineární lomená funkce. Mějme nyní $L(z) = (az+b)/(cz+d)$ zobrazující U na sebe a položme $\alpha := -b/d$. Potom $M = B_{-\alpha} \circ L$ je lineární lomená funkce splňující $M(0) = 0$, $M(U) = U$.

Podívejme se, jak může M vypadat. Bez omezení obecnosti nechť je $M(z) = (z+f)/(gz+h)$ (vykrácením). Protože $M(0) = 0$, je $f = 0$. Zobrazuje-li nyní M jednotkovou kružnici na sebe, platí pro každou komplexní jednotku u rovnost $|u/(gu+h)| = 1$, tedy $|gu+h| = 1$. Probíhá-li u jednotkovou kružnici, probíhá $gu+h$ kružnici se středem h a poloměrem g. Mají-li mít všechy tyto hodnoty absolutní hodnotu 1, musí být buď $|g| = 1$, $h = 0$ nebo $|h| = 1$, $g = 0$. Druhá možnost je vyloučena, protože to by M byla konstanta. Je tedy $M(z) = \varepsilon z$, kde $|\varepsilon| = 1$.

Protože $B_\alpha(M(z)) = B_\alpha(B_{-\alpha}(L(z))) = L(z)$, dostáváme $L(z) = \varepsilon B_\alpha(z)$. Naopak každá taková funkce zřejmě vyhovuje. Dvě lineární lomené funkce jsou stejné pouze v případě, že koeficienty jedné dostaneme z koeficientů druhé přenásobením konstantou. L tedy vyhovuje právě tehdy, když existují $\xi \in \mathbb{C}$, $\xi \neq 0$, $\alpha \in U$, $|\alpha| < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že

$$a = e^{i\lambda}\xi, \qquad b = -e^{i\lambda}\xi\alpha, \qquad c = -\xi\bar{\alpha}, \qquad d = \xi.$$

4. úloha Mějme dány v rovině body $X \neq Y$ a úhly α, β tak, že $\alpha+\beta$ není celočíselný násobek 2π. Dokažte, že složením $R(X,\alpha) \circ R(Y,\beta)$ (kde $R(Z,\gamma)$ je otočení okolo bodu Z o úhel γ) je opět otočení. Popište, jak najdeme (geometricky) jeho střed.

Snadno nahlédneme, že otočení $R(X,\alpha)$ dostaneme tak, že složíme posunutí, které posume X do nuly, otočení okolo nuly o úhel α a posunutí, které posune nulu do X. Bod z se nám tedy zobrazí na $(z-X)e^{i\alpha}+X$. Složení $R(X,\alpha)\circ R(Y,\beta)$ nám tedy z zobrazí na $((z-Y)e^{i\beta}+Y-X)\,e^{i\alpha}+X$. Toto zobrazení je otočením o úhel $\alpha+\beta$ (snadno by se ukázalo, že pokud je to otočení, pak jedině o tento úhel) právě tehdy, když

$$((z-Y)e^{i\beta}+Y-X)\,e^{i\alpha}+X=(z-W)e^{i(\alpha+\beta)}+W$$

$$W=\frac{Ye^{i\alpha}(1-e^{i\beta})+X(1-e^{i\alpha})}{1-e^{i(\alpha+\beta)}}$$

(použitá úprava je ekvivalentní). Zlomek má smysl protože $\alpha+\beta$ není celočíselný násobek π, a tedy $e^{i(\alpha+\beta)}\neq 1$. Zvolíme-li tedy W podle spodního vztahu, bude výsledkem otočení okolo W o úhel $\alpha+\beta$.

Když už víme, že výsledkem je otočení, není těžké geometrickou úvahou najít jeho střed. Z cvičných důvodů si to však spočítáme jinak. Trocha hraní s goniometrickými identitami nás odmění vztahem

$$e^{i\lambda}-e^{i\mu}=2i\sin\frac{\lambda-\mu}{2}\,e^{i(\lambda+\mu)/2},$$

s jehož pomocí ze vztahu pro W dostaneme $(1=e^0=e^{0i})$

$$\frac{W-Y}{X-Y}=\frac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{i(\alpha+\beta)}}=\frac{\sin\alpha/2}{\sin(\alpha+\beta)/2}e^{-i\beta/2}$$

$$\frac{W-X}{Y-X}=\frac{e^{i\alpha}(1-e^{i\beta})}{1-e^{i(\alpha+\beta)}}=\frac{\sin\beta/2}{\sin(\alpha+\beta)/2}e^{i\alpha/2}$$

V obou případech je podíl sinů reálný; kdybychom znali jeho znaménko, znali bychom i (orientované) úhly $\sphericalangle WYX$ a $\sphericalangle WXY$. K určení polohy W to ale není nutné: zvolíme-li nějaký W_1 tak, aby $\sphericalangle WYX=-\beta/2$, bude zřejmě W ležet na přímce YW_1. Podobně zvolíme W_2 tak, aby $\sphericalangle WXY=\alpha/2$ a víme, že W leží na přímce XW_2. Protože $(\alpha+\beta)/2$ není celočíselný násobek π, jsou YW_1 a XW_2 různoběžné, protínají se tedy v jediném bodě W.

Malá poznámka k řešením: jestliže po vás chceme ukázat, že složení dvou otočení je opět otočení, nelze akceptovat důkaz, stojící na (silnějším) tvrzení, že přímá shodnost musí být posunutí, otočení nebo identita, případně na tvrzení, že každou shodnost lze napsat jako složení nejvýše tří osových souměrností. Budete-li dokazovat, že existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $4k+3$, také byste to neměli zdůvodňovat tím, že podle Dirichletovy věty existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $an+b$ kdykoli jsou a a b nesoudělná (na vysvětlenou: jediný důkaz Dirichletovy věty, který jsem viděl, má asi dvacet stran a k jeho pochopení je třeba toho znát opravdu dost).

5. úloha Vrcholy pravidelného n-úhelníka jsou obarveny několika barvami tak, že vrcholy obarvené barvou j tvoří vždy právě vrcholy nějakého pravidelného k_j-úhelníka. Dokažte, že mezi čísly k_j se vyskytují aspoň dvě stejná.

Ze zadání původně vypadlo jedno slovíčko *pravidelného*, čímž se z jinak pěkné úlohy stal nesmysl. Naštěstí si toho **Honza Rychtář a Norbert Vaněk** na poslední chvíli všimli a ručně to opravili. Autor série je jim za to hluboce zavázán.

Zvolíme-li vhodně souřadnice v rovině, budou vrcholy našeho n-úhelníka právě kořeny rovnice $z^n = 1$ (to je snadný důsledek Moivréovy věty). Vybereme-li nyní nějakých k_j jeho vrcholů, které jsou vrcholy pravidelného k_j-úhelníka, bude mít tento k_j-úhelník střed v bodě 0 a bude vepsán do jednotkové kružnice. Jeho vrcholy pak budou právě kořeny rovnice $z^{k_j} = \varepsilon_j$, kde $|\varepsilon_j| = 1$. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že $k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_s$, kde s je počet barev. Polynom $\prod_{j=1}^{s} (z^{k_j} - \varepsilon_j)$ (stupně n) má tedy stejných n kořenů jako $z^n - 1$, oba jsou to polynomy stupně n s vedoucím koeficientem 1. Podle tvrzení v přípravném textu je tedy

$$\prod_{j=1}^{s} (z^{k_j} - \varepsilon_j) = z^n - 1$$

a musí se rovnat i koeficienty u všech mocnin. Roznásobíme-li levou stranu, dostaneme absolutní člen $(-1)^s \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_s$, jinak vždy dostaneme aspoň z^{k_1}; předpokládejme, že $k_1 < k_2$. Potom dostaneme nalevo z^{k_1} pouze pokud vezmeme z první závorky z^{k_1} a z ostatních $-\varepsilon_j$; při jiné volbě totiž dostaneme aspoň z^{k_2}. Koeficient u z^{k_1} na levé straně je tedy $(-1)^{s-1}\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_s$, jeho absolutní hodnota je 1. Napravo však pokud $n \ne k_1$ (tedy $s > 1$) dostaneme u této mocniny nulu. Tedy $k_1 = k_2$.

Komentáře k 8. sérii

1. úloha Dokažte, že číslo $77777777^{7777^{77^7}} + 1$ má alespoň k různých prvočíselných dělitelů. Číslo k tentokrát není chybou v zadání, zvolte si ho podle svých schopností. Čím větší bude, tím více bodů můžete dostat.

Ukáži zde jednoduchý postup pro $k = 77^7 + 1$.

Označme $\xi = 77777777^{7777^{77^7}} + 1$, dále pro každé kladné celé i položme

$$\zeta_i = 77777777^{1111^{77^7} \cdot 7^i}, \quad \theta_i = \zeta_i^6 - \zeta_i^5 + \zeta_i^4 - \zeta_i^3 + \zeta_i^2 - \zeta_i + 1.$$

Pro každé $i \in N_0$ platí zřejmé identity

$$\zeta_{i+1} + 1 = \theta_i \cdot (\zeta_i + 1), \tag{1}$$

$$\theta_i - (\zeta_i^5 - 2\zeta_i^4 + 3\zeta_i^3 - 4\zeta_i^2 + 5\zeta_i - 6) \cdot (\zeta_i + 1) = 7. \tag{2}$$

Ze vztahu (2) plyne: pokud pro nějaké prvočíslo p platí $p \mid \theta_i$ a $p \mid (\zeta_i + 1)$, pak $p \mid 7$, tj. $p = 7$. Avšak 7 není dělitelem čísla $(\zeta_i + 1)$, tedy jsou čísla $(\zeta_i + 1)$ a θ_i nesoudělná. Využitím vztahu (1) a zřejmé skutečnosti $\xi = \zeta_{k-1} + 1$ máme

$$\xi = \theta_{k-1}\theta_{k-2} \ldots \theta_2\theta_1\theta_0(\zeta_0 + 1).$$

To je však rozklad čísla ξ na k po dvou nesoudělných činitelů, které jsou zřejmě větší než 1. Tedy ξ má aspoň k prvočíselných dělitelů, což jsme chtěli.