Komentáře k 6. sérii

1. úloha Na kruhu jsou v nějakém pořadí napsány čtyři jedničky a pět nul. V jednom kroku provedeme následující změnu těchto čísel. Mezi každá dvě čísla napíšeme nové — mezi stejná čísla nulu, mezi různá čísla jedničku. Pak staré cifry smažeme. Tento krok opakujeme s novými čísly. Zjistěte, zda je možno tímto postupem získat samé nuly

Ukážeme sporem, že nelze dostat samé nuly. Nechť tedy i-tý krok je první krok, po kterém jsme obdrželi na kružnici devět nul. V předcházejícím $(i-1)$-vém kroku musely být na kružnici stejné číslice, dle volby i to musely být samé jedničky. To však znamená, že v kroku $(i-2)$-hém se na kružnici musely střídat nuly a jedničky. Tedy na kružnici muselo být v $(i-2)$-hém kroku sudý počet čísel, ale počet čísel na kružnici se v jednotlivých krocích zachovává, což je *SPOR* se skutečností, že na počátku byl počet čísel na kružnici lichý.

2. úloha Myš žere kostku sýra ve tvaru (duté) krychle o hraně 3 rozdělené na 26 krychliček — prostřední chybí. Začne s libovolnou krychličkou, pak přejde na některou sousední (se společnou stěnou). Toto stále opakuje. Může takto myška sežrat všechny sýrové krychličky?

Obarvěme si krychličky následujícím "šachovnicovým" způsobem. Ty krychličky, které mají právě dvě stěny na povrchu krychle (tj. hranové), obarvíme černou barvou, zbývající bílou. Všech krychliček je 26, bílých je 14 a černých 12. Při konzumaci krychliček může myška procházet jen mezi krychličkami s různou barvou (společnou stěnu mají pouze krychličky obarvené různými barvami). Avšak černých krychliček je o dvě méně než bílých, a proto všechny krychličky myšička sežrat nemůže — to by totiž šlo rozbít krychli na 13 párů krychliček, z nichž jedna by byla černá a druhá bílá, tedy černých a bílých krychliček by muselo být stejně.

3. úloha Určete počet způsobů, jimiž lze uzávorkovat

(a) n nekomutativních činitelů (tzn. nemůžeme měnit pořadí)
(b) n komutativních činitelů (tzn. můžeme měnit pořadí).

(a) Postupujme indukcí.

Nechť n členů lze uzávorkovat a_n způsoby. Uvažujme uzávorkování n členů a zapišme si jej se všemi závorkami (i s těmi kolem jednotlivých členů). Příklad je zde

$$(((x)\cdot(y))\cdot(z)).$$

Další člen můžeme přidat do libovolné ze závorek a to buď nalevo nebo napravo — v zápisu pak přibude jedna závorka kolem nového členu a jedna kolem operace. Je jasné, že popsaným způsobem vznikne smysluplný zápis a také smysluplný zápis s $n+1$ činiteli lze dostat právě jedním způsobem přidáním $n+1$-vého členu k zápisu libovolně (ale smysluplně) vytvořeného z n členů.

Celkem lze tedy $n+1$ členů uzávorkovat $a_{n+1} = 2k_n a_n$ různými způsoby, kde k_n je počet závorek v zápise o n činitelích. Zřejmě $k_n = 2n-1$ (závorky jsou kolem n členů a kolem $n-1$ operací). Tím dostáváme $a_1 = 1$

$$a_n = 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1).$$

Po drobné úpravě

$$a_n = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!}.$$

(b) Pokud jsou V_1, V_2 výrazy, pak je nutno ztotožňovat výrazy $V_1 \cdot V_2$ a $V_2 \cdot V_1$. Analogickou úvahou jako v (a) (bez rozlišování, zda $n+1$-vý člen dáváme do závorky nalevo, či napravo) dostáváme pro počet uzávorkování n komutativních činitelů

$$b_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1),$$

což je

$$b_n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)! 2^{n-1}}.$$

Drobná poznámka: Tato úloha měla poněkud nejasné zadání. To může dokumentovat například skutečnost, že dvanáct řešení, které jsme obdrželi, uvádělo osm různých výsledků[3]. Vzhledem k tomu, že to bylo způsobeno především různým chápáním zadání, nebral jsem ho při opravování v potaz. Tedy u každého řešení jsem hodnotil pouze to, jak se řešitel vypořádal s tím zadáním, které on pochopil pod strohou větou "Kolika způsoby ... ". Řešení uvedené výše je podle *Michala Beneše*, ale uznával jsem i úplně jiné výsledky (různé rekurentní formule, součty geometrických řad, Fibonaciova čísla, všelijaké podíly faktoriálů a kombinačních čísel ...).

4. úloha Ve světě tvaru přímky je stěhování národů řízeno těmito pravidly

(i) Na počátku existuje jen jeden národ (jeho polohu označíme jako nula).

(ii) Vždy po sto letech se začnou všechny národy stěhovat. Každý národ se totiž rozdělil na dvě skupiny, jež se vzájemně nepohodly, a proto se rozešly na opačné strany (původní místo zůstalo volné). Po ujití 100 mílí se každá skupina usídlí na novém místě.

(iii) Pokud při stěhování na totéž místo dojdou dvě skupiny, začnou spolu krvelačně válčit a ve chvilce se navzájem vyhladí.

Zjistěte, kolik národů bude v našem světě po n staletích a kde (v jaké vzdálenosti od nuly) budou tyto národy žít.

---

[3] Když jsem se pokusil úlohu řešit, obdržel jsem výsledek devátý.

Nejprve indukcí ukážeme, že po 2^k staletích budou vždy právě dva národy, a to v poloze[4] $\pm 2^k$. Pro $k = 1$ tvrzení zjevně platí. Nechť platí pro nějaké k. To znamená, že po 2^k staletích máme jeden národ v bodě 2^k, druhý -2^k. Oba tyto národy se v průběhu dalších 2^k staletích budou vyvíjet stejně, jako původní národ. Vzájemně se neovlivní dříve než po 2^k staletích, neboť dříve žádný národ nestihne dojít do bodu 0, který oba "podsvěty" odděluje. Takže z národa v bodě 2^k vzniknou dva národy v $2^k \pm 2^k$, z národa v -2^k dva národy v $-2^k \pm 2^k$. Do bodu 0 dojdou dva národy a ty se vyvraždí. Do bodů $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ a $-2^k - 2^k = -2^{k+1}$ dojde po jednom národu a ten tam zůstane. Tím je důkaz indukcí hotov.

Nyní použijeme ještě jednou úvahu z důkazu indukčího kroku. Napišme si n v dvojkové soustavě jako $2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_s}$, kde $a_1 > a_2 > \cdots > a_s$.[5] Po 2^{a_1} staletích budou dva národy v bodech $\pm 2^{a_1}$ V dalších $2^{a_2} + \cdots + 2^{a_s} < 2^{a_1}$ staletích[6] se tyto národy neovlivní, můžeme je tedy sledovat odděleně. Z národa v 2^{a_1} se po 2^{a_2} staletích stanou národy v pozicích $2^{a_1} \pm 2^{a_2}$, analogicky pro národ v -2^{a_1}. Takto pokračujme dále (podrobný důkaz by mohl opět probíhat indukcí). zjistíme, že po n staletích bude v našem světě 2^s národů, jejich polohy jsou $\pm 2^{a_1} \pm 2^{a_2} \pm \cdots \pm 2^{a_s}$ (bereme všechny kombinace plus a mínus).

Jiné možné řešení, zvolené částí řešitelů, využívá kombinačních čísel. Ta udávají počty národů, které by to příslušného místa došly, kdyby se vzájemně nevraždily. Parita (sudost či lichost) kombinačního čísla udává, zda na odpovídajícím místě bude nebo nebude národ. Nevýhoda toho popisu polohy národů je v tom, že není tak "konstruktivní", tím myslím to, že když někdo zadá $n = 13545163$, je potřeba počítat všechna kombinační čísla $\binom{n}{k}$(nebo aspoň jejich paritu) což není zrovna záviděníhodná činnost. Při našem popisu stačí zapsat n ve dvojkové soustavě a hned například vidíme, kolik bude celkem národů ($2^{\text{ciferný součet}}$).

5. úloha Nechť X je n prvková množina. Zjistěte, jaký je součet čísel $|A \cap B|$, pokud za (A, B) dosazujeme postupně všechny dvojice podmnožin množiny X. $|M|$ označuje počet prvků množiny M.

Označme M' množinu $X \setminus M$ (pro M částí X).

Existuje 2^n různých podmnožin množiny X, a tedy existuje $(2^n)^2 = 4^n$ různých uspořádaných dvojic podmnožin množiny X. Rozdělíme všechny tyto páry (A, B) na 4^{n-1} čtveřic obsahujících dvojice (A, B), (A', B), (A, B') a (A', B'). Dostaneme tedy rozdělení množiny všech uspořádaných dvojic podmnožin množiny X na disjunktní čtveřice (neboť zřejmě $A = (A')'$, a tedy čtveřice odvozená od libovolného z párů (A', B), (A, B') a (A', B') je totožná s čtveřicí odvozenou od páru (A, B) - čtenář si snadno ověří sám).

Každý prvek množiny X patří buď do A nebo do A' (resp. do B nebo do B'), a tak tedy patří do právě jedné z množin $A \cap B$, $A' \cap B$, $A \cap B'$ a $A' \cap B'$. Vidíme, že celkové množství prvků ve čtveřici je n. Protože je 4^{n-1} čtveřic, je součet množství prvků všech množin typu $A \cap B$ roven $n.4^{n-1}$.

Komentáře k 7. sérii

[4]Počátek je tam, kde byl původní národ, jednotka je sto mil.

[5]s je tedy ciferný součet čísla n ve dvojkové soustavě

[6]zde využíváme toho, že $2^x = 1 + \sum_{i=0}^{x-1} 2^i$.