Komentáře k 5. sérii

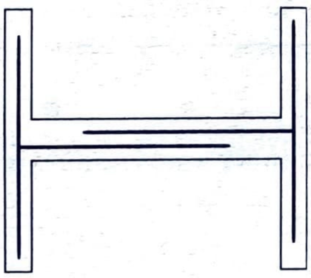
1. úloha Nekonečný čtverečkovaný papír obarvíme 7 barvami. Dokažte, že lze vybrat 1948 řádků a 1989 sloupců tak, aby všechny jejich průsečíky měly stejnou barvu.

Tato úloha je poměrně jednoduchá: uvažujme nekonečně široký pás o výšce $7 \cdot 1947 + 1$. Kdykoli obarvíme políčka v jednom sloupci sedmi barvami, bude mezi nimi některá, která se vyskytuje aspoň 1948-krát. Počet způsobů, jak obarvit sloupec, je $P = 7^{7 \cdot 1947+1}$. Vezmeme-li libovolných $1988P + 1$ sloupců, najdeme mezi nimi 1989, které jsou obarveny stejně. Provedeme-li pak v nich výše uvedenou úvahu, dostaneme příslušných 1949 řádků (ve všech sloupcích stejné).

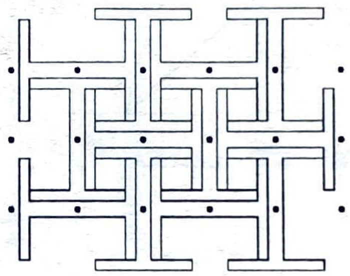
2. úloha Téčko se skládá ze dvou kolmých úseček délky 2 takových, že koncový bod jedné z nich splývá se středem druhé (viz. obrázek). Rozhodněte, jestli lze do čtvece o straně 18 umístit

(a) 240
(b) 340

téček tak, aby byla po dvou disjunktní.



TÉČKA – HÁČKO



TÉČKA – KONSTRUKCE

asi

Mějme nějaké malé $\varepsilon > 0$ a dejme k sobě dvě téčka tak jako na prvním obrázku. Vzdálenost vodorovných nožiček nechť je ε, vzdálenost svislých $2 + 5\varepsilon$. Tato dvě téčka (disjunktní) můžeme zabalit do útvaru, který nazveme háčkem. Svislé nožičky háčka budou mít šířku 2ε, vodorovná 3ε; délka svislých nožiček bude $2+3\varepsilon$, délka vodorovné nožičky (bez částí společné se svislými) také. Všechny úhly jsou pochopitelně pravé.

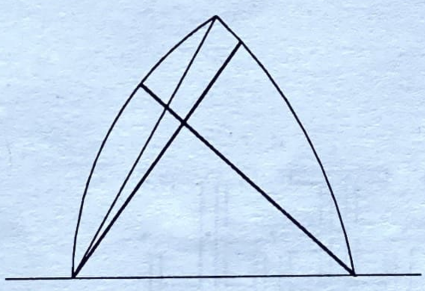
Teď budeme skládat háčka dohromady. Vyznačme si uzly čtvercové sítě o straně $1 + 5\varepsilon$ a šachovnicovitě je obarvěme modrou a červenou (nebo třeba zelenou a fialovou). Každý uzel bude středem nějakého háčka, na modré dáme vodorovná, na červené svislá. Vzhledem k tomu, že celé háčko se vejde do obdélníka o stranách $2 + 7\varepsilon$ a $2 + 3\varepsilon$, bude ke každému háčku existovat jen osm dalších, která by se s ním mohla překrývat (čtyři stejné barvy, čtyři opačné). Snadno si rozmyslíme, že se překrývat nebudou.

Zvolme nyní síť tak, abychom uprostřed velkého čtverce o straně 18 měli menší o straně $15(1+5\varepsilon)$, obsahující $16^2 = 256$ uzlů. Zvolíme-li nyní $\varepsilon < 1/82$, budou všechna naše háčka ve čtverci se stejným středem a stranou $17 + 82\varepsilon < 18$ (vyplývá to z úvahy minulého odstavce o tom, do jakého obdélníka lze téčko uzavřít, $82 = 5 \cdot 15 + 7$), tedy uvnitř velkého čtverce. Do vnitřku každého háčka lze dát dvě disjunktní téčka, takže dohromady takto umístíme $512 > 340 > 240$ téček. Jsou tedy obě možnosti proveditelné.

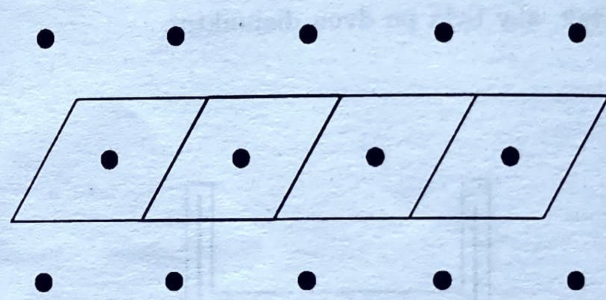
3. úloha Hvězdička se skládá ze šesti úseček délky 1, vycházejících ze společného koncového bodu tak, že sousední svírají úhel 60° (viz. obrázek; na obou obrázcích délka 1 odpovídá jednomu centimetru). Rozhodněte, jestli lze do kruhu o poloměru 100 umístit

(a) 28001
(b) 34001
(c) 40001

hvězdiček tak, aby byly po dvou disjunktní.



HVĚZDIČKY - LEMMA



HVĚZDIČKY - ROVNOBĚŽNÍK

Řešení této úlohy bude silně připomínat řešení první úlohy loňské poslední série. Nejprve ukážeme, že možnost (c) je vyloučena. K tomuto účelu nejdřív ukážeme, že středy libovolných dvou disjunktních hvězdiček mají vzdálenost větší než 1.

Mějme dvě hvězdičky, jejichž středy mají vzdálenost nejvýše 1. Nejprve si uvědomme, že v libovolném úhlu s vrcholem ve středu hvězdičky a velikostí aspoň 60° se nachází aspoň jedno rameno. Uvažujme úhel, jehož jedno rameno je spojnice středů hvězdiček (viz. obrázek) a který má velikost 60°. Rameno, které tak dostaneme, je určitě ze středu druhé hvězdičky vidět pod úhlem aspoň 60° (rozmyslete si, kde může ležet jeho koncový bod). V takovém úhlu pak bude určitě ležet některé rameno druhé hvězdičky. Protože ale libovolný bod ramene první hvězdičky má od středu druhé vzdálenost nejvýše 1, nemohou být ramena disjunktní.

Jestliže okolo středu každé hvězdičky uděláme kruh o poloměru 1/2, budou tyto kruhy disjunktní. Každý z nich má plochu $\pi/4$ a protože budou ležet ve velkém kruhu o ploše 10000π (rozmyslete si, že tam opravdu leží celé), bude jich nejvýše 40000.

Teď ukážeme, že do kruhu lze umístit 34001 hvězdiček, což bude odpověď na (a) i (b). Uvažujme body o souřadnicích $\left((p+q/2)l, ql\sqrt{3}/2\right)$, kde p, q probíhají celá čísla (jsou to vrcholy trojúhelníkové sítě o straně l). Spočítejme, kolik jich bude v kruhu se stejným středem a poloměrem $100-l$. Umístíme-li totiž do takového bodu střed libovolně natočené hvězdičky, bude celá v původním kruhu.

Každému takovému bodu můžeme přiřadit množinu těch bodů (x, y), pro které je $p-\frac{1}{2} \leq (x - y/\sqrt{3})l \leq p+\frac{1}{2}$, $q-\frac{1}{2} \leq 2y/(l\sqrt{3}) \leq q+\frac{1}{2}$ (je to rovnoběžník – viz. obrázek). Snadno se ukáže, že tyto rovnoběžníky pokrývají kruh o stejném středu a poloměru $100-l-l\sqrt{3}/2$ ($l\sqrt{3}/2$ je půl délky delší úhlopříčky rovnoběžníka). Protože ale každý z nich má plochu $l^2\sqrt{3}/2$, musí jich být aspoň

$$\frac{\pi\left(100-(1+\sqrt{3}/2)l\right)^2}{l^2\sqrt{3}/2}.$$

což pro $1 < l \leq 1.01$ můžeme odhadnout

$$\frac{\pi\left(100-(1+\sqrt{3}/2)l\right)^2}{l^2\sqrt{3}/2} \leq \frac{\pi\left(100-(1+\sqrt{3}/2)\right)^2}{1.01^2\sqrt{3}/2} \doteq 34246.4 > 34001.$$

Zbývá ukázat, že do uzlů příslušné sítě lze umístit středy disjunktních hvězdiček. Umístíme nejprve hvězdičky tak, aby ramena byla ve směrech k sousedním středům. Rozmyslete si, že pokud je nyní pootočíme všechny o dostatečně malý (ale nenulový) úhel α, budou disjunktní.

Jedno i ztratil každý, kdo odhadoval počet hvězdiček způsobem, který by dost těžko šel zobecnit na libovolný poloměr a už při poloměru 1000 by se docela zapotil. No a $-2i$ si vysloužil ten, kdo dokázal nějaké nepravdivé tvrzení.

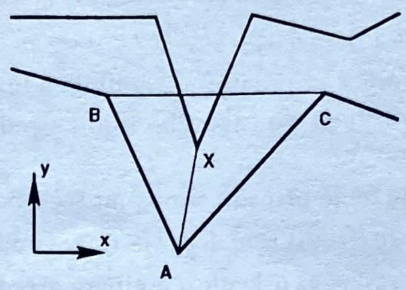
4. úloha Dokažte, že mezi každými šesti nezápornými celými čísly lze najít x a y tak, že $x \neq y$ a

$$5\,|x-y| < (x+1)(y+1)$$

Tady jsem na poslední chvíli upravil zadání – původně se úloha neomezovala na celá čísla. Bohužel se ukázalo, že se tím příklad příliš zjednodušil, protože drtivá většina řešení toho podstatným způsobem využívala. Ostatní využili toho, že pětka není zas až tak velké číslo. Abyste se necítili ochuzeni, vyřešíte si původní úlohu v osmé sérii.

Označíme-li našich šest čísel (různých – řešitelé, kteří se nesnaží využít každé skulinky v zadáních, to pochopili) $a_1, \ldots, a_6$ tak, aby $a_1 < \cdots < a_6$, potom indukcí podle n snadno ukážeme, že $a_n \geq n-1$. Je tedy $a_6 > a_5 \geq 4$. Položíme-li pak $x = a_6$, $y = a_5$, dostaneme okamžitě $y+1 \geq 5$, $x+1 > x \geq x-y = |x-y|$ a vynásobením snadno $(x+1)(y+1) > 5\,|x-y|$.

5. úloha Místnost má tvar $3n$-úhelníka (ne nutně konvexního). Dokažte, že do místnosti lze rozmístit n hlídačů tak, aby dohromady viděli celou místnost (hlídač vidí do všech směrů ale ne skrz zeď).



Triangulace

Tato úloha pochází z celostátního kola 40. ročníku matematické olympiády (Nitra 1991). Nejprve je třeba si ujasnit, co je to mnohoúhelník. Definice říká, že je to omezená část roviny, ohraničená jedinou neprotínající se lomenou čarou. Dokážeme si pomocné tvrzení o triangulaci:

Lemma: *Každý n-úhelník lze rozdělit úhlopříčkami na $n-2$ trojúhelníků s vrcholy ve vrcholech původního n-úhelníka.*

Důkaz: Je tam n, takže indukcí; pro $n = 3$ je to zřejmé. Ukážeme-li, že každý n-úhelník lze rozdělit úhlopříčkou na dva mnohoúhelníky, budou mít oba méně vrcholů než původní a princip matematické indukce obstará zbytek. Vyberme si libovolný vrchol A, při kterém je vnitřní úhel ostrý (rozmyslete si, že existuje), označme sousední vrcholy B, C (sleduj obrázek). Pokud trojúhelník BAC neobsahuje uvnitř žádný vrchol, stačí vzít úhlopříčku BC.

Nechť je tedy uvnitř trojúhelníka BAC ještě alespoň jeden další vrchol. Zaveďme soustavu souřadnic tak, aby vrchol A byl počátkem, BC byla rovnoběžná s osou x a B a C měly y-ovou souřadnici (stejnou) kladnou. Označíme-li pak X ten z vrcholů uvnitř BAC, který má nejmenší souřadnici y, snadno nahlédneme, že úhlopříčka AX nemůže protínat žádnou stranu mnohoúhelníka; můžeme ji tedy použít.

Rozmyslete si pro zajímavost, že z platnosti lemmatu už plyne, že vždy lze A vybrat tak, aby šlo použít první způsob (odříznutí trojúhelníka BAC) – stačí vzít takový vrchol, ze kterého nevychází žádná úhlopříčka triangulace. Jenže při důkazu tvrzení se nemůžeme opírat o jeho platnost.

Teď označíme vrcholy $3n$-úhelníka čísly 1, 2, 3 tak, aby každý trojúhelník triangulace měl vrcholy s těmito třemi čísly. Začít můžeme libovolným trojúhelníkem, pokračujeme tak, abychom vždy očíslovali vrcholy některého trojúhelníka, který sousedí stranou s některým už očíslovaným – dva vrcholy už očíslované máme, do třetího tedy dáme zbývající číslo. Abychom věděli, že to půjde, stačí si uvědomit, že graf, jehož vrcholy odpovídají trojúhelníkům triangulace a jsou spojeny hranou pokud trojúhelníky sousedí, je strom. Souvislost plyne z toho, že $3n$-úhelník je souvislý a neexistence kružnic z výše uvedené definice mnohoúhelníka.

Zbytek tvrzení už je jednoduchý. Jedno z čísel 1, 2, 3 se určitě vyskytuje nejvýše n-krát. Postavme hlídače do těchto vrcholů. Každý trojúhelník má jeden vrchol s tímto číslem a je obhospodařen příslušným hlídačem a trojúhelníky dohromady dávají celý $3n$-úhelník.