Komentáře k 4. sérii

1. úloha V čtyřstěnu $ABCD$ jsou každé dvě protilehlé hrany stejně dlouhé. Ukažte, že
a) všechny tělesové výšky jsou stejně dlouhé
b) pro každý vnitřní bod čtyřstěnu je součet jeho vzdáleností od jednotlivých stěn čtyřstěnu stejný.

Je evidentní, že všechny stěny čtyřstěnu mají týž obsah S — jsou to totiž shodné trojúhelníky. Je nyní v nějaká tělesová výška v $ABCD$.

a) Podle známého vztahu pro výpočet objemu čtyřstěnu je $v = 6\frac{V}{S}$, kde V je objem $ABCD$. Protože čtyřstěn má jen jeden objem, musí mít všechny výšky tutéž velikost.

b) Čtyřstěn $ABCD$ si rozdělíme na čtyři čtyřstěny $XABC$, $XABD$, $XACD$, $XBCD$. Protože X je uvnitř $ABCD$, je objem $ABCD$ roven součtu objemů malých čtyřstěnů, tedy

$$\frac{1}{6}vS = \frac{1}{6}X_D S + \frac{1}{6}X_C S + \frac{1}{6}X_B S + \frac{1}{6}X_A S,$$

kde $X_A, \dots, X_D$ jsou vzdálenosti bodu X od jednotlivých stěn čtyřstěnu. A je to.

2. úloha Vnitřním bodem čtyřstěnu jsou vedeny roviny rovnoběžné se stěnami čtyřstěnu tak, že každý trojúhelník vzniklý protnutím roviny takto vedené má obsah s. Zjistěte velikost s, znáte-li obsahy stěn čtyřstěnu a, b, c, d. Nápověda: zkuste nejprve vyřešit dvourozměrnou analogii.

Následující řešení je psáno v angličtine. Chceme totiž, abyste si trochu procvičili také svoje jazykové znalosti (kromě matematiky). Pro úplnost je přiloženo také anglické zadání, přičemž je vyřešena nejprve planimetrická verze.

Problems: (a) Three lines are drawn through a point in a triangle parallel[6] to its sides. The segments intercepted on these lines by the triangle turn out to have the same length. Given the triangle's side lengths a, b, and c, find the length of the segments.
(b) Four planes are drawn through a point in a tetrathedron parallel to its faces[7]. The sections of the tetrahedron[8] created by these planes turn out to have the same area.Given the areas a, b, c, and d of the faces, find the area of the sections.

Solution: (a)The answer is

$$r = 2/(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}),$$

where r is the unknown length. We'll show this using a method that can be applied in the three-dimesional case as well.

---

[6] rovnoběžně
[7] stěny
[8] čtyřstěn

Let's first prove[9] if three segments joining the vertices[10] A, B, and C of a triangle to points A_1, B_1, and C_1 on their opposite sides meet at point P, then

$$\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PC_1}{CC_1}=1.$$

Let PP_0 and AA_0 be the altitudes[11] of triangles PBC and ABC, respectively. From similar[12] triangles A_1PP_0 and A_1AA_0, we see that the ratio[13] PA_1/AA_1 is equal[14] to the ratio PP_0/AA_0. This ratio is in turn equal to the ratio of the area of PBC to that of ABC (since these triangles have a common base[15]).

For similar reasons, the left side of our equation can be rewritten (using absolute-value signs to denote area) as

$$\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PC_1}{CC_1}=\frac{|PBC|}{|ABC|}+\frac{|APC|}{|ABC|}+\frac{|ABP|}{|ABC|}=\frac{|ABC|}{|ABC|}=1,$$

completing the proof.

Now, if P is the point considered in the problem, then by the similarity of the triangles cut off by the lines through P and the original triangle we get[16] $AP/AA_1=r/a$, so

$$\frac{PA_1}{AA_1}=\frac{AA_1-AP}{AA_1}=1-\frac{r}{a},$$

and in the same way

$$\frac{PB_1}{BB_1}=1-\frac{r}{b},\qquad \frac{PC_1}{CC_1}=1-\frac{r}{c}.$$

Together with equation

$$\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PC_1}{CC_1}=1$$

this yields the equation

$$3-r(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})=1$$

and the expression for r given above.

(b) The solution for the three-dimensional case repeats the previous one almost without any changes. Four segments in a tetrahedron $ABCD$ meeting at a point P (points are marked in the similar way as in the planar case) always satisfy

$$\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PC_1}{CC_1}+\frac{PD_1}{DD_1}=1.$$

---

[9] nejprve dokažme

[10] vrcholy

[11] výšky

[12] podobné

[13] poměr

[14] je roven

[15] mají společnou základnu

[16] $a=|BC|$

The only difference in the proof is that we must replace the areas of triangles by the volumes[17] of tetrahedrons. Then, if s is the unknown area and A is the vertex[18] opposite the face of the area a, then $s/a = (AP/AA_1)^2$, for instance, because the ratio of the areas of similar figures is the square[19] of their ratio of similarity, and the planes considered in the problem cut off from the given tetrahedron similar tetrahedrons with the ratios of similarity AP/AA_1, BP/BB_1, and so on.

Expressing the left side of equation

$$\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PC_1}{CC_1}+\frac{PD_1}{DD_1}=1$$

in terms of the ratios s/a, s/b, s/c, s/d, we arrive at the equation

$$4-\sqrt{\frac{s}{a}}-\sqrt{\frac{s}{b}}-\sqrt{\frac{s}{c}}-\sqrt{\frac{s}{d}}=1$$

which yields the answer

$$s=\left(\frac{3}{a^{-1/2}+b^{-1/2}+c^{-1/2}+d^{-1/2}}\right)^2.$$

3. úloha (Pomocná úloha k 4. Její řešení můžete pro 4. využít, i když tuto úlohu nevyřešíte.) Nechť A, B, C, D jsou body v prostoru. Dokažte, že

$$|\sphericalangle DAB|+|\sphericalangle ABC|+|\sphericalangle BCD|+|\sphericalangle CDA|\le 2\pi.$$

(podle Michala Beneše) Nejprve si náš útvar sklopíme do roviny: najdeme bod C' v rovině ABD tak, aby $\triangle BCD \cong \triangle BC'D$ a úsečka AC' protínala přímku BD (to zajistí sklopení do správné poloroviny). Tím jsme dostali rovinný útvar — čtyřúhelník $ABC'D$, součet jeho vnitřních úhlů je přesně $\check{e}\pi$. Ukážeme, že součet úhlů v původním útvaru byl menší (či stejný).

Nejdřív si uvědomme, že $|AC|\le|AC'|$. Je-li totiž X průsečík přímek BD a AC', je $|AC'|=|AX|+|XC'|=|AX|+|XC|\ge|AC|$, kde poslední úprava je trojúhelníková nerovnost. Nyní napišme kosinové věty pro trojúhelníky ABC a ABC'.

$$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2|AB||BC|\cos|\sphericalangle ABC|$$
$$|AC'|^2=|AB|^2+|BC'|^2-2|AB||BC'|\cos|\sphericalangle ABC'|$$

Vzhledem k tomu, že $|BC|=|BC'|$ je $\cos|\sphericalangle ABC|\ge\cos|\sphericalangle ABC'|$. Protože na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ (jiná velikost úhlů být nemůže) je kosinus klesající, plyne odsud, že $|\sphericalangle ABC|\le|\sphericalangle ABC'|$.

[17] objemy
[18] vrchol
[19] druhá mocnina

Analogicky postupujeme pro úhly u bodu D. Takže sklopením do roviny jsme opravdu součet úhlů nezvětšili a dokazovaná nerovnost platí.

4. úloha Dokažte, že součet úhlů svíraných stěnami čtyřstěnu je
a) menší než 3π
b) větší než 2π.

(a) Sčítá se šest úhlů mezi stěnami. Úhel mezi stěnami je něco mezi nulou a $\pi/2$. Tedy celkem to je něco mezi nulou a 3π. Ale 3π to asi nebudou, poněvadž těžko bychom hledali čtyřstěn, který má všechny stěny kolmé. Tedy, součet úhlů v čtyřstěnu je menší než 3π, což bylo dokázati. Je zvláštní, že na toto řešení přišel celý jeden řešitel.

Bohužel se do zadání této úlohy vloudila nepřesnost, kvůli níž se jedna její část stala takto triviální. Úhly svíranými stěnami čtyřstěnu byly původně myšleny vnitřní úhly, tj. mohou být i větší než $\frac{\pi}{2}$, je-li čtyřstěn dostatečně „sešlápnutý". To způsobí, že důkaz toho, že součet je menší než 3π, je třeba udělat rafinovaněji.

Lemma: *Pokud každé stěně libovolného čtyřstěnu přiřadíme vektor kolmý na tu stěnu jehož velikost je rovna obsahu příslušné stěny, pak součet čtyř takto popsaných vektorů je nula.*

Důkaz: je triviální pro každého, kdo zná vektorový součin. Platí totiž, že $u \times v$ je vektor kolmý na u a v, jeho velikost je rovna obsahu rovnoběžníku určeného u, v a jeho orientace je taková, aby úhel mezi u a v byl kladný. Označme nyní a, b, c, d vektory z (libovolného) počátku do jednotlivých vrcholů čtyřstěnu. Pak vektor příslušný stěně ABC bude $\frac{1}{2}(c-b)\times(a-b)$ (jsou-li A, B, C řazeny v kladném smyslu[20], díváme-li se na ně z vnějšku. Když vyjádříme stenym způsobem všechny čtyři „stěnové"vektory, zjistíme, že stačí ověřit identitu

$$(c-b)\times(a-b)+(a-b)\times(d-b)+(d-b)\times(c-b)+(a-d)\times(c-d)=0,$$

a to je snadné. Stačí využít toho, že $u \times u = 0$ a $u \times v = -v \times u$ pro každé u, v.

Nyní už můžeme směle přistoupit k vlastní úloze. Uvědomme si, že úhel svíraný stěnami čtyřstěnu je roven úhlu mezi příslušnými stěnovými vektory. Vytvořme ze čtyř stěnových vektorů všech šest[21] prostorových čtyřúhelníků. Dle 3. Úlohy je součet vnitřních úhlů v každém z nich nejvýše 2π. Celkem máme v šesti čtyřúhelnících 24 úhlů, tedy každý z úhlů svíraných dvěma stěnami čtyřstěnu tam bude započten $\frac{24}{6} = 4$-krát. Situace je totiž symetrická, takže každý z úhlů bude započten stejněkrát. Víme tedy, že čtyřnásobek součtu úhlů svíraných stěnami čtyřstěnu je nejvýše roven $6 \cdot 2\pi$, což po vydělení čtyřmi dává požadované. Rovnost nenastává, stěnové vektory totiž nemohou ležet v jedné rovině (jinak by stěny splývaly), a tudíž v jednotlivých čtyřúhelnících bude platit ostrá nerovnost.

(b) **Lemma:** *Svírají-li spolu dvě roviny úhel $\alpha = |\angle PXQ|, |PX| = |QX|$, pak pro libovolný bod Y na průsečnici je $\beta = |\angle PYQ| \leq \alpha$*

[20] proti směru hodinových ručiček

[21] Jeden z nich si zvolíme jako pevný. K němu můžeme zbylé tři přidat $3! = 6$ různými způsoby.

Důkaz:

$$\tan \beta/2 = \frac{|QP|}{2|SY|}$$
$$\tan \alpha/2 = \frac{|QP|}{2|SX|}$$

Protože $|SX| \leq |SY|$, je i $\tan \beta/2 \leq \tan \alpha/2$, čímž díky rostoucnosti funkce tangens na $(0, \pi)$ dostáváme $\beta \leq \alpha$, což bylo dokázati.

Označím-li si úhly stěn čtyřstěnu $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ a úhly při vrcholech čtyřstěnu $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{12}$, pak z lemmatu dostávám

$$2\sum_{i=1}^{6} \alpha_i \geq \sum_{i=1}^{12} \beta_i = 4\pi$$

(neboť úhly β_i tvoří čtyři trojúhelníky), po vykrácení

$$\sum_{i=1}^{6} \alpha_i \geq 2\pi,$$

což takřka bylo dokázat — stačí už jen vyloučit rovnost. Je zřejmé, že součet úhlů tří stěn nemůže být π , neboť pak by tyto stěny byly kolmé na podstavu a nebyl by to čtyřstěn, nýbrž, jak si snadno představiti, kolmý trojboký hranol (bez vrchní podstavy).

5. úloha Na sféře (tj. na kulové ploše) jsou body A, B, C, A', B', C' tak, že úsečky AA', BB' a CC' se protínají v bodě P, $|AA'| = |BB'| = |CC'|$ a koule procházející body A, B, C a P se dotýká koule procházející body A', B', C' a P. Musí být $|AP| = |BP| = |CP|$? Odpověď dokažte.

Jelikož se koule (označme ji k_1) procházející body A, B, C a P dotýká koule (označme ji k_2) procházející body A', B', C' a P, mají k_1 a k_2 společný právě jeden bod a to bod P. Snadno nahlédneme, že koule k_2 je obrazem koule k_1 ve stejnolehlosti se středem P a koeficientem stejnolehlosti[22] $\xi = -r_{k_2}/r_{k_1}$. Položme $c = -\xi$. Tedy platí

$$c|AP| = |PA'|, \quad c|BP| = |PB'|, \quad c|CP| = |PC'|.$$

Využitím rovnosti $|AA'| = |BB'| = |CC'|$ nyní dostáváme

$$|AP| + c|AP| = |BP| + c|BP| = |CP| + c|CP|.$$

Zřejmě $(1 + c) > 0$, a proto musí platit $|AP| = |BP| = |CP|$.

V zadání, které bylo rozesláno došlo k maličké chybě. Omylem byl bod P v otázce nazván jiným písmenem — ... Musí být $|AO| = |BO| = |CO|$? ... Naprostá většina řešitelů to však pochopila a většina z nich také úlohu správně vyřešila. Ti, co to nepochopili se rozpadají

[22] r_{k_1} (resp. r_{k_2}) je poloměr koule k_1 (resp. k_2)

do dvou skupin. Jeden řešitel nás přecenil — zvolil si bod O sice různý od P ,ale správnou úlohu dokázal jako pomocné tvrzení. Další řešitelé nás trochu podcenili. Řekli si, že bod O je obecný, pak se však odpověď na naši otázku stává triviální. Jejich bodové hodnocení je proto trochu problematické. Na jednu stranu vyřešili zadaný problém vlastně správně (bylo by tudíž nespravedlivé jim nějaký bod z pěti strhávat), na druhou stranu však každý pozorný čtenář[23] snadno nahlédne, že pro nějaký bod O v prostoru a dané různé body A, B, C neplatí $|AO| = |BO| = |CO|$. (bylo by tedy nespravedlivé vůči ostatním, co úlohu neposlali, udělit těmto řešitelům více než nula bodů). Nakonec jsme (ne se zcela čistým svědomím) udělili těmto řešitelům $2 + 0i$ bodů. Z těch řešení, která se zabývala správným zadáním, se mi nejvíce líbila řešení *Tomáše Bárty* a *Eugena Kováče.*

[23]Bohužel žádný pozorný čtenář není mezi tvůrci zadání semináře.