kružnici je stejná)

$$\begin{aligned}|AL_c| &= |AL_b| = |CL_b| - x - z = |CL_a| - y - z + y - x = \\ &= |BL_a| + y - x = |BL_c| + y - x = x + y - |AL_c| + y - x = 2x - |AL_c|.\end{aligned}$$

Proto $|AL_c| = y$. To znamená, že $|AL_c| = |BT|$, a tedy M — střed AB — je i středem TL_c. Takže bod L_c je jednoznačně určen body M a T.

Nyní ukážeme, že body C, S a L_c leží na přímce. Uvažujme stejnolehlost h se středem C a koeficientem $\frac{x+y+z}{z}$. Tato stejnolehlost určitě převádí bod K_b na L_b, K_a na L_a a tudíž k na kružnici, která se dotýká přímky CA v L_b a přímky CB v L_a — na kružnici l. Proto ovšem musí h také převádět přímku q — tečnu k (bližší k C ze dvou rovnoběžných tečen) — na přímku p — tečnu l rovnoběžnou s q, bližší k C; tedy i průnik k a q — bod S — na průnik l a p — bod L_c. To ovšem znamená, že body C, S a L_c leží na přímce.

Víme tedy, že pro každou polohu bodů A, B leží odpovídající bod C na přímce L_cS. Zároveň je jasné, že C nemůže ležet na polopřímce $\to SL_c$. Zbývá dokázat, že pro libovolnou volbu bodu C v U lze sestrojit odpovídající trojúhelník ABC. Zvolme tedy nějaký takový bod C v M. Veďme bodem C tečnu ke k a její průsečík s p označme A. Zvolme B tak, aby M byl střed AB a bodem B veďme tečnu ke k (různou od p). Její průsečík s tečnou z A ke k (různou od p) označme C'. Protože k je kružnice vepsaná trojúhelníku ABC' a M je střed AB, leží bod C' v U (to jsme už dokázali). Takže body C a C' leží oba na přímce SL_c (jinak by neležely v U) a na tečně z bodu A ke kružnici k (různé od p) (díky volbě bodů A a C'). Protože tyto přímky jsou evidentně různé (jedna je sečnou a druhá tečnou k), musí ležet body C, C' v jejich průsečíku a tudíž být totožné. Takže trojúhelník $ABC = ABC'$ vyhovuje podmínkám úlohy. Tím jsme dokázali, že U je množinou všech vyhovujících bodů C.

Tato úloha byla jedna z těch těžších, správně ji vyřešili jen dva řešitelé (*Michal Beneš* a *Davídek Opěla*). Bohužel jejich řešení nebyla příliš pěkná (alespoň podle mého názoru) — využívali analytické geometrie, resp. trigonometrie a po rozličných úpravách se dostali k tomu, že zkoumaná množina je přímka.

Komentáře k 3. sérii

úloha Dokažte, že pro každé přirozené k platí

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k+i}{k-i} = \sqrt{1 + f_{2k} \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1-i}{i}}$$

Lemma 1 *Pro každé* $k \in \mathbb{N}_0$

$$f_{2k+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{2k-i}{i}, \qquad f_{2k+2} = \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1-i}{i}$$

Důkaz: Matematickou indukcí. Pro $k = 0$ platí, je totiž $\binom{0}{0} = \binom{1}{0} = f_1 = f_2$. Pomocí indukčního předpokladu a „sčítací vlastnosti" Fibonacciho čísel můžeme upravovat:

$$
\begin{aligned}
f_{2(k+1)+1} = f_{2k+1} + f_{2k+2} &= \sum_{i=0}^{k} \binom{2k-i}{i} + \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1-i}{i} = \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \binom{2k+1-i}{i-1} + \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1-i}{i} = \\
&= \binom{2k+1}{0} + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{2k+1-i}{i-1} + \binom{2k+1-i}{i} \right) + \binom{k}{k} = \\
&= \binom{2k+2}{0} + \sum_{i=1}^{k} \binom{2k+2-i}{i} + \binom{k+1}{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{2(k+1)-i}{i},
\end{aligned}
$$

což je první ze vztahů, které chceme dokázat v indukčním kroku. Stejně dokážeme i druhý vztah.

$$
\begin{aligned}
f_{2(k+1)+2} = f_{2k+3} + f_{2k+2} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{2k+2-i}{i} + \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1-i}{i} = \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{2k+2-i}{i} + \sum_{i=1}^{k+1} \binom{2k+2-i}{i-1} = \\
&= \binom{2k+2}{0} + \sum_{i=1}^{k+1} \left(\binom{2k+2-i}{i-1} + \binom{2k+2-i}{i} \right) = \\
&= \binom{2k+3}{0} + \sum_{i=1}^{k+1} \binom{2k+3-i}{i} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{2(k+1)+1-i}{i}.
\end{aligned}
$$

Lemma 2 *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $f_{k+1}^2 = f_k f_{k+2} + (-1)^k$.*

Důkaz: Opět indukcí. Pro $k = 1$ dostáváme rovnost $f_2^2 = 1 = 1 \cdot 2 - 1 = f_1 f_3 + (-1)^k$. Nechť rovnost platí pro k, dokážeme ji pro $k + 1$. Upravujme:

$$
\begin{aligned}
f_{k+2}^2 &= f_{k+2}(f_{k+2} - f_{k+1}) + f_{k+2} f_{k+1} = f_{k+2} f_k + (-1)^k + (-1)^{k+1} + f_{k+2} f_{k+1} = \\
&= f_{k+1}^2 + f_{k+2} f_{k+1} + (-1)^{k+1} = f_{k+1}(f_{k+1} + f_{k+2}) + (-1)^{k+1} = \\
&= f_{k+1} f_{k+3} + (-1)^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Tím je indukční krok i celý důkaz hotov.

Teď již je řešení úlohy snadné. Substitucí $j = k - i$ zjistíme za použití *Lemmatu 1*, že $\sum_{i=0}^{k} \binom{k+i}{k-i} = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k-j}{j} = f_{2k+1}$. Díky *Lemmatu 2* je $f_{2k+1} = \sqrt{(-1)^{2k} + f_{2k} f_{2k+2}}$ a to se díky *Lemma 1* rovná $\sqrt{1 + f_{2k} \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1-i}{i}}$. Celkově jsme zjistili, že

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k+i}{k-i} = \sqrt{1 + f_{2k} \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1-i}{i}}.$$

Tím je důkaz hotov.

Řešení byla vesměs shodná s autorským (to bylo víceméně podle *Michala Beneše*) s výjimkou několika odvážlivců, kteří dokazovali *Lemma 2* pomocí Binetova vzorce

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n}.$$

2. úloha Dokažte, že existují různá celá čísla a, b, m taková, že $0 < a < m$; $0 < b < m$ a

$$\forall n \in N \qquad m \mid f_n - anb^n.$$

Odhadem nalezneme řešení $m = 5$, $a = 2$, $b = 3$. Indukcí dokážeme, že tato čísla opravdu úloze vyhovují, tj. že $\forall n \in \mathbb{N} : \; 5 \mid f_n - anb^n$.

Pro $n = 1$ a $n = 2$ tvrzení opravdu platí. Ukážeme, že pokud platí pro $n = k - 1$ a $n = k$ pak platí i pro $n = k + 1$. Tvrzení pro $n = k - 1$ říká, že $f_{n-1} = 5s + 2(n-1)3^{n-1}, \quad s \in \mathbb{N}$. Pro $n = k$ máme $f_n = 5t + 2n3^n, \quad t \in \mathbb{N}$. Vyzkoušejme nyní, zda tvrzení platí pro $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} f_{n+1} - 2(n+1)3^{n+1} &= f_n + f_{n-1} - 2(n+1)3^{n+1} = \\ &= 5(s+t) + 2.3^{n-1}[(n-1) + 3n + 3^2(n+1)] = 5\left(s + t + 2.3^{n-1}(-n-2)\right). \end{aligned}$$

Tedy $5 \mid f_{n+1} - 2(n+1)3^{n+1}$. Tím je hotov indukční krok a celý důkaz je hotov.

3. úloha Máme kružnici o obvodu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Na její obvod budeme psát přirozená čísla tímto způsobem: nejprve kamkoliv zapíšeme jedničku. Ve vzdálenosti 1, měřeno po obvodu kružice v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček), napíšeme číslo 2. Stejně pokračujeme dále. V n-tém kroku napíšeme číslo n ve vzdálenosti 1 od čísla $n-1$ (opět v kladném smyslu).

Dokažte, že až po libovolně mnoha krocích skončíme, bude rozdíl každých dvou sousedních (tj. nejbližších na kružnici) čísel napsaných na kružnici nějaké Fibonacciho číslo.

Lemmma 1 *Pro každé $n > 1$ platí*

$$f_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} f_{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Důkaz: Snadno indukcí. Ověříme platnost pro $n = 1, 2$. Platí-li tvrzení pro $n = k - 1$ a $n = k$, $k > 1$, sečteme odpovídající rovnosti:

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} f_{k-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} f_{k-2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}(f_{k-1} + f_{k-2}) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} f_k + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k},$$

neboť se snadno ověří, že $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ je kořenem rovnice $x^2 = x + 1$.

Lemma 2 *Začneme očíslovávání od nuly. Po každém kroku budou sousedé nuly Fibonacciho čísla, přesněji — v příslušné části kruhu je $f_n 0 f_{n-1}$ nebo naopak, podle parity (sudosti/lichosti) n.*

Důkaz: Nejprve si ujasníme, že Fibonacciho čísla se budou střídavě zleva a zprava blížit k nule. Z procesu zapisování čísel je jasné, že číslo $a\frac{1+\sqrt{5}}{2} + b, a \in \mathbb{N}, |b| \le \frac{1}{2}\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ bude zapsáno po a obězích kružnice na místo vzdálené $|b|$ od nuly, pro záporné b na opačnou stranu než pro kladné b. Díky 11 víme, že $f_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} f_{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$. Protože $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, je výraz $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ střídavě kladný a záporný, a jeho absolutní hodnota klesá k nule. Z předchozí, předpředchozí a předpředpředchozí věty plyne první věta tohoto odstavce.

Důkaz provedeme indukcí. Pro první kroky se snadno ověří, že tvrzení platí. Nechť platí, provedeme-li nejvýše f_n kroků. Ukážeme, že platí také provedeme-li nejvýše f_{n+1} kroků. Nechť po f_n krocích vypadá okolí nuly takto: $f_n 0 f_{n-1}$ (opačný případ se dokáže zcela stejně). Chceme ukázat, že první číslo, které padne do oblouku $f_n f_{n-1}$ je f_{n+1}. Podle předchozího odstavce tam toto číslo padne, dokonce na správnou stranu od nuly. Zbývá ukázat, že tam nepadne žádné menší. Důkaz sporem: nechť tam padne nějaké $k < f_{n+1}$. Podle indukčního předpokladu nemůže být k menší než f_n. Je tedy $k > f_n$.

(1) k padne do oblouku $f_n f_{n+1}$. Nyní kružnici přečíslujeme. Místo f_n napíšeme nulu, místo $f_n + 1$ jedničku, ..., místo k napíšeme $k - f_n$, ..., místo $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ napíšeme f_{n-1}. Nyní je po f_{n-1} krocích je dle indukčního předpokladu k (nové) nule zprava nejblíže f_{n-1}. Avšak $k - f_n$ je k ní blíže. To je SPOR !

(2) k padne do oblouku $f_{n+1} f_{n-1}$. Postupujeme zcela stejně jako v minulém případě, nulu tentokrát umístíme do f_{n-1}.

A nyní můžeme směle přejít k samotné úloze. Důkaz sporem: nechť po nějakém počtu kroků spolu sousedí čísla $a < b$ a $b - a$ není Fibonacciho číslo. Kružnici přečíslujeme stejně jako v důkazu *Lemmatu 2*, nula bude v a. Po $b - a$ krocích bude s nulou sousedit číslo $b - a$, které není Fibonacciho. Podle *Lemmatu 2* je to spor.

Tato úloha byla mezi úlohami třetí série zřejmě nejtěžší a také nejzajímavější, ačkoli jinak patřila třetí série k těm lehčím v tomto ročníku. O trošičku větší náročnosti této úlohy svědčí skutečnost, že při zadávání jsem neznal její řešení. Pouze mi bylo známo, že řešení existuje a nalezl ho (mimo jiné) jistý *Petr Kaňovský* z Brna.[8] Proto mě mile překvapilo, že jsme obdrželi

[8] Kdo ho zná, ten ví, co to znamená. Pro nezasvěcené — jedná se o jednoho z největších žijících psavců pod Sluncem (loni řešil náš seminář).

celých 6 (slovy šest, six, hat, sechs, шесть, sex, ...) řešení a některá se autorům vešla jen na dvě stránky. Kouzelné na těchto řešeních bylo, že každý z řešitelů využíval k důkazu zcela jiné metody — převedl zadání na s ním (více či méně) ekvivalentní tvrzení, které pak (více či méně) dokázal. Takže to skoro vypadalo, že opravuji najednou šest (někdy i značně) různých úloh.

4. úloha Pro která přirozená čísla n, k je $f_n^{4k} + 4$ prvočíslo ?

Tato úloha byla ze všech pěti úloh třetí série zřejmě nejjednodušší. Také má jedno z nejkratších řešení mezi úlohami, které v tomto ročníku byly a ještě budou. Jednalo se o takový náš drobný žertík, neboť jedinou vlastnost Fibonacciho posloupnosti, kterou řešení využívá, je [illegible]jmá skutečnost, že pro všechna $n > 3$ je $f_n > 1$.

Ze zřejmé identity

$$\left(\left(f_n^k\right)^2 + 2 + 2f_n^k\right)\left(\left(f_n^k\right)^2 + 2 - 2f_n^k\right) = f_n^{4k} + 4,$$

jejíž platnost si můžeš ověřit roznásobením závorek vlevo, vidíme, že pro $f_n > 1$ je $f_n^{4k} + 4$ vždy číslo složené. Pro $f_n = 1$ je $f_n^{4k} + 4 = 5$ pro libovolné k. Tedy $f_n^{4k} + 4$ je prvočíslo pro $n = 1, 2, k \in N$.[9]

5. úloha Pro která přirozená čísla existuje člen Fibonacciho posloupnosti dělitelný tímto číslem?

Jak mnozí z vás uhodli a někteří i dokázali, platí požadované pro všechna přirozená čísla.

Důkaz: Mějme libovolné n a zkoumejme, zda existuje Fibonacciho číslo dělitelné n. Dodefinujme $f_0 = 0$ a označme $d_i = [f_i \mod n, f_{i+1} \mod n]$. Zbytek po dělení n může nabývat jen n hodnot $(0, 1, \ldots, n-1)$, takže existuje jen n^2 — tedy konečně mnoho — hodnot pro d_i. Členů Fibonacciho posloupnosti a tedy i čísel d_i je však nekonečně mnoho. Tudíž se její členy musí opakovat, neboli existují různá přirozená čísla i, j tak, že $d_i = d_j$ ($f_i \equiv f_j \pmod n$ a $f_{i+1} \equiv f_{j+1} \pmod n$).[10] Zvolme tato i, j tak, aby i bylo co nejmenší. Sporem dokážeme, že musí být $i = 0$. Nechť je $i \geq 1$. Evidentně člen d_{i-1} je jednoznačně určen členem d_i ($d_{i-1,2} = d_{i,1}$, $d_{i-1,1} = (d_{i,2} - d_{i,1}) \mod n$, podle definice Fibonacciho posloupnosti a posloupnosti (d_i)). Stejně je i d_{j-1} určeno členem d_j. Protože $d_i = d_j$, je i $d_{i-1} = d_{j-1}$ — a to je spor s minimalitou i. Proto je $i = 0$. To znamená, že $f_j \equiv f_0 = 0 \pmod n$, neboli n dělí f_j.

Všechna správná řešení využívala tutéž myšlenku jako autorské řešení. Podle toho, jak přehledně byla tato myšlenka zpracována, obdrželi $-i$ až $2i$. Nejvíce se mi líbilo řešení *Tomáše Bárty*.

---

[9] To je stručnost! Hned bych si dal +i za originalitu.

[10] K řešení úlohy to není potřeba, avšak je zajímavé si povšimnout, že odtud už plyne, že posloupnost (d_i) je periodická. Nyní už jen dokážeme, že nemá předperiodu.