Komentáře k 2. sérii

1. úloha Mějme $\triangle ABC$ a bod D uvnitř jeho strany AB. E je průsečík CD a společné vnější tečny kružnic vepsaných trojúhelníkům ACD, BCD $(E \neq D)$. Zjistěte, po jaké křivce se pohybuje bod E, probíhá-li bod D úsečku AB.

Zvolme bod D libovolně uvnitř úsečky AB. Kružnici vepsanou $\triangle ACD$ označme k_1, kružnici vepsanou $\triangle BCD$ označme k_2. Společná vnější tečna k_1,k_2 různá od AB bude t. Dotykové body kružnice k_1 se stranami AD, DE, AC a přímkou t označme po řadě X_1, Y_1, K_1 a T_1. Dotykové body kružnice k_2 se stranami DB, DE, BC a tečnou t označme po řadě X_2, Y_2, K_2 a T_2.

Z osové souměrnosti podle spojnice středů kružnic k_1, k_2 plyne $|X_1X_2| = |T_1T_2|$. Vyjdeme-li nyní ze známého tvrzení, že vzdálenost vnějšího bodu kružnice od obou dotykových bodů tečen dané kružnice vedených tímto bodem je stejná, dostáváme postupnými úpravami

$$|DE| = |DY_1| + |Y_1E| = |DX_1| + |ET_1|$$
$$|DE| = |DY_2| + |Y_2E| = |DX_2| + |ET_2|.$$

Proto máme sečtením posledních dvou rovnic

$$2\,|DE| = |X_1X_2| + |T_1T_2|$$

a dále ze vztahu $|X_1X_2| = |T_1T_2|$ dostaneme rovnost

$$|DE| = |X_1X_2| = |T_1T_2|.$$

Dále zřejmě platí

$$|CD| = |CY_1| + |Y_1D| = |CY_1| + |DX_1|$$
$$|CD| = |CY_2| + |Y_2D| = |CY_2| + |DX_2|$$

Sečtením těchto rovnic pak máme vztah

$$2\,|CD| = |CY_1| + |CY_2| + |X_1X_2|.$$

Pro strany trojúhelníka platí zřejmě vztahy $|BC| = |CY_2| + |BX_2|$, $|AC| = |AX_1| + |CY_1|$ a $|AB| = |AX_1| + |X_1X_2| + |X_2B|$ a z těchto vztahů dostáváme $|AC| + |BC| - |AB| = |CY_1| + |CY_2| - |X_1X_2|$. Na druhé straně máme z výše uvedených vztahů pro délku úsečky $|CE|$

$$|CE| = |CD| - |DE| = \tfrac{1}{2}\left(|CY_1| + |CY_2| - |X_1X_2|\right).$$

Odtud tedy vidíme, že

$$|CE| = \tfrac{1}{2}\left(|AC| + |BC| - |AB|\right)$$

pro libovolné D, tedy $|CE|$ je pro daný trojúhelník konstantní. Probíhá-li tedy bod D úsečku AB, pohybuje se bod E po oblouku o poloměru $\frac{1}{2}(|AC| + |BC| - |AB|)$ se středem C. (Mezní případy si laskavý čtenář už rozebere sám.)

Je to možná překvapivé, ale obdrželi jsme pouze osm řešení této úlohy. Nejkrásnější (a bohužel též jediná správná) řešení měli *Tomáš Bárta, David Opěla a Zbyněk Pawlas*. Všichni tři využívali stejné myšlenky jako autorské řešení. Přesněji řečeno — autorské řešení využívá jejich myšlenek. Jeden z řešitelů (jeho jméno raději uchovám v tajnosti) se pokusil tuto úlohu řešit analyticky.[2] Obdržel velice ošklivé kvadratické rovnice a nakonec se sám v řešení utopil. Ještě drobná poznámka pro některé řešitele : Vyřešit úlohu ... po jaké křivce se pohybuje bod E, probíhá-li bod D úsečku ... neznamená načrtnout do obrázku polohu bodu E pro tři polohy bodu D a pak na základě nějakého vnuknutí usoudit, že se jedná o kružnici, či parabolu (jiné výsledky jsem neobdržel). Takovýmto postupem se dá skutečně "dokázat" cokoliv. Matematika je přesná věda a jakékoliv náčrtky by měly sloužit pouze pro vytváření hypotéz (které se pak musí přesně dokázat), pro lepší pochopení pojmů, důkazů, ale dokazovat jimi nějaká tvrzení — to prosím **NE!**)

2. úloha Trojúhelník ABC má strany délek a, b, c, kde $a>b>c$. O je střed kružnice opsané, V střed kružnice vepsané $\triangle ABC$. Jakými stranami prochází přímka OV.

(Podle *Davídka Opěly*) Označme o_a (o_b, o_c) vzdálenost bodu O od strany a (b, c), V_A, V_B, V_C průsečík osy příslušného úhlu a protilehlé strany. Zjevně (r je poloměr kružnice opsané) $o_a^2 = r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $o_b^2 = r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$, $o_c^2 = r^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Tudíž $o_a < o_b < o_c$. Protože $o_a < o_b$, je bod O v polorovině CVB.[3] Na ose úhlu totiž mají body stejnou vzdálenost od obou jeho ramen. Obdobně protože $o_b < o_c$, je bod O v polorovině AVC. Je tedy bod O v úhlu CVV_A. (Pro ostroúhlý trojúhelník ABC je dokonce O v trojúhelníku CVV_A.) Odtud je už jasné, že přímka OV protíná strany a a c.

3. úloha V rovině jsou dány kružnice k_1, k_2 se středy S_1, S_2. Bod A_1 probíhá k_1, $A_2 \in k_2$ a úsečky A_1S_1 a A_2S_2 jsou nesouhlasně rovnoběžné (tj. $\overrightarrow{S_1A_1} = k\,\overrightarrow{S_2A_2}$, $k < 0$). Po jaké křivce se pohybuje střed úsečky A_1A_2?

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $r_1 \geq r_2$ (r_i je poloměr k_i). Označme B takový bod úsečky A_1, že $|A_1B| = r_2$. Protože $BA_1S_2A_2$ je rovnoběžník a úhlopříčky rovnoběžníku půlí, můžeme místo středu A_1A_2 zkoumat střed S_2B. Pokud bod A_1 probíhá k_1, bod B probíhá kružnici $k(S_1, r_1 - r_2)$ a tudíž střed S_2B probíhá kružnici stejnolehlou se středem S_2. Odtud je tedy jasné, že hledaná křivka je kružnice se středem ve středu S_1S_2 a poloměrem $\frac{|r_1 - r_2|}{2}$. Pro $r_1 = r_2$ samozřejmě kružnicí o nulovém poloměru rozumíme jeden bod.

Úlohu bylo (výjimečně) možno řešit jednoduše analyticky, proto záporné imaginární body dostali jen ti, již zvolili nevhodně souřadnou soustavu, a proto získali dlouhé rovnice. Pěkná řešení pomocí stejnolehlosti obdržela naopak kladné imaginární body. Chybičkou, již udělalo cca 80% z vás, ale kterou jsem nakonec bodově nepostihoval, bylo-li jinak řešení v pořádku,

---

[2] Někdy lituji, že nemohu udělit méně než -2i.

[3] Polorovinou XYZ míním polorovinu s hraniční přímkou XY obsahující bod Z.

bylo, že jste tvrdili, že výsledkem je kružnice, aniž byste zvlášť zdůraznili případ $r_1 = r_2$, kdy tato kružnice degeneruje v bod.

4. úloha Nad stranami $\triangle ABC$ jsou vně sestrojeny čtverce se středy S_1, S_2, S_3. Najděte $\triangle ABC$ pomocí kružítka, pravítka a bodů S_1, S_2, S_3.

Lemma *Jsou-li X, Y libovolné body v rovině, pak složením rotací $R(X,\alpha)$ a $R(Y,\beta)$ (kde $\alpha + \beta \neq 2\pi$) je nějaká rotace o úhel $\alpha + \beta$.*

Důkaz: Složíme-li dvě přímé[4] shodnosti, dostaneme opět přímou shodnost. Může tedy vzniknout jen identitu, posunutí, nebo rotaci.[5] Zkoumejme, co se v našem zobrazení stane s přímkou. Je evidentní, že při rotaci o úhel ω svírají přímka-vzor a přímka-obraz úhel ω. Provedeme-li $R(X,\alpha)$ a pak $R(Y,\beta)$, otočí se každá přímka o úhel $\alpha+\beta$, což není 2π. To znamená, že vzniklé zobrazení není identita, ani posunutí (v těch se zachovává „orientovaná rovnoběžnost"). Je to tedy rotace a vzhledem ke druhé větě tohoto odstavce rotace o úhel $\alpha + \beta$. *Q. E. D.*

Nechť S_1, S_2, S_3 jsou po řadě středy čtverců nad AB, BC a CA. Zobrazení $R = R_3(S_3, 90°) \circ R_2(S_2, 90°) \circ R_1(S_1, 90°)$ je podle Lemmatu rotace o 270°. Evidentně[6] $R(A) = A$, takže $R = R(A, 270°)$. Nyní už můžeme přejít k vlastní konstrukci. Zvolíme v libovolně bod X a najdeme $Y = R(X)$. Díky předpředposlední větě je A vrchol pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka AXY. Díky tomu můžeme bod A snadno najít jako průsečík osy XY a Thaletovy kružnice nad průměrem XY. Ze dvou průsečíků vybereme jeden tak, aby $|\sphericalangle YAX| = +270$. Body B, C najdeme už snadno $B = R_1(A)$, $C = R_2(B)$.

Úloha má jedno nebo žádné řešení. Druhá varianta nastane, pokud jsou body S_1, S_2, S_3 na přímce nebo když tvoří tupoúhlý trojúhelník. Pak totiž budou příslušné čtverce sestrojené dovnitř, nikoli vně. Podrobnější rozbor si zkuste sami.

5. úloha Budiž k kružnice, p její tečna a M bod na p. Najděte množinu bodů C, pro něž existuje $\triangle ABC$ takový, že M je střed AB, $A, B \in p$ a k je kružnice vepsaná $\triangle ABC$.

Mějme nějaký bod C a odpovídající trojúhelník ABC. Označme q tečnu k rovnoběžnou s p, T dotykový bod p a k, S dotykový bod q a k, l kružnici připsanou ke straně AB[7], K_a, K_b, K_c, L_a, L_b, L_c dotykové body kružnic k, l a příslušných stran (resp. odpovídajících přímek) trojúhelníka), $x = |AK_c| = |AK_b|$, $y = |BK_c| = |BK_a|$ a $z = |CK_b| = |CK_a|$.

Množina U všech bodů C je polopřímka opačná k $\rightarrow SL_c$ bez bodu S.

Nejprve ukážeme, že poloha bodu L_c je jednoznačně určena body M a T, tedy že nezáleží na bodech A, B, C. Zjevně je $AL_c + BL_c = x + y$. Zároveň je (neboť „délka obou tečen" ke

[4]to znamená „nepřevracející" — není to například osová souměrnost

[5]Zkuste si dokázat, že jiná přímá shodnost neexituje. Návod: každá shodnost je složením nejvýše tří osových souměrností (dokažte!).

[6]je totiž $|\sphericalangle AS_1B| = 90°$, tudíž $R_1(A) = B$. Analogicky dále.

[7]dotýká se přímek AC a BC vně trojúhelníka a úsečky AB

kružnici je stejná)

$$\begin{aligned} |AL_c| &= |AL_b| = |CL_b| - x - z = |CL_a| - y - z + y - x = \\ &= |BL_a| + y - x = |BL_c| + y - x = x + y - |AL_c| + y - x = 2x - |AL_c| . \end{aligned}$$

Proto $|AL_c| = y$. To znamená, že $|AL_c| = |BT|$, a tedy M — střed AB — je i středem TL_c. Takže bod L_c je jednoznačně určen body M a T.

Nyní ukážeme, že body C, S a L_c leží na přímce. Uvažujme stejnolehlost h se středem C a koeficientem $\frac{x+y+z}{z}$. Tato stejnolehlost určitě převádí bod K_b na L_b, K_a na L_a a tudíž k na kružnici, která se dotýká přímky CA v L_b a přímky CB v L_a — na kružnici l. Proto ovšem musí h také převádět přímku q — tečnu k (bližší k C ze dvou rovnoběžných tečen) — na přímku p — tečnu l rovnoběžnou s q, bližší k C; tedy i průnik k a q — bod S — na průnik l a p — bod L_c. To ovšem znamená, že body C, S a L_c leží na přímce.

Víme tedy, že pro každou polohu bodů A, B leží odpovídající bod C na přímce L_cS. Zároveň je jasné, že C nemůže ležet na polopřímce $\rightarrow SL_c$. Zbývá dokázat, že pro libovolnou volbu bodu C v U lze sestrojit odpovídající trojúhelník ABC. Zvolme tedy nějaký takový bod C v M. Veďme bodem C tečnu ke k a její průsečík s p označme A. Zvolme B tak, aby M byl střed AB a bodem B veďme tečnu ke k (různou od p). Její průsečík s tečnou z A ke k (různou od p) označme C'. Protože k je kružnice vepsaná trojúhelníku ABC' a M je střed AB, leží bod C' v U (to jsme už dokázali). Takže body C a C' leží oba na přímce SL_c (jinak by neležely v U) a na tečně z bodu A ke kružnici k (různé od p) (díky volbě bodů A a C'). Protože tyto přímky jsou evidentně různé (jedna je sečnou a druhá tečnou k), musí ležet body C, C' v jejich průsečíku a tudíž být totožné. Takže trojúhelník $ABC = ABC'$ vyhovuje podmínkám úlohy. Tím jsme dokázali, že U je množinou všech vyhovujících bodů C.

Tato úloha byla jedna z těch těžších, správně ji vyřešili jen dva řešitelé (*Michal Beneš* a *Davídek Opěla*). Bohužel jejich řešení nebyla příliš pěkná (alespoň podle mého názoru) — využívali analytické geometrie, resp. trigonometrie a po rozličných úpravách se dostali k tomu, že zkoumaná množina je přímka.

Komentáře k 3. sérii

úloha Dokažte, že pro každé přirozené k platí

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k+i}{k-i} = \sqrt{1 + f_{2k} \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1-i}{i}}$$

Lemma 1 *Pro každé* $k \in \mathbb{N}_0$

$$f_{2k+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{2k-i}{i}, \qquad f_{2k+2} = \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1-i}{i}$$