✉ *Korespondenční seminář, KMA MFF UK, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8 - Karlín* ✉

Komentáře k 1. sérii

1. úloha Najděte všechna $n \in \mathbb{N}$, pro která platí tento vztah:

$$1995!\,x^{666x} > 1995^{1995}.$$

Lemma: *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $(1+\frac{1}{n})^n < 3$.*

Důkaz: Podle binomické věty platí

$$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!} <$$
$$< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 3$$

Nyní dokážeme následující odhad faktoriálu:

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Nejprve dokážeme levou část indukcí. Pro $n = 1$ nerovnost platí. Dokážeme-li, že při přechodu od n k $n+1$ se levá strana zvětší méněkrát než pravá, tedy že

$$\frac{\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{3}\right)^n} < \frac{(n+1)!}{n!},$$

budeme hotovi. Snadnou úpravou však zjistíme, že tento vztah je ekvivalentní s *Lemmatem*. Právě jsme provedli indukční krok a tím i důkaz matematickou indukcí.

Zbývá nám pravá část nerovnosti. Tu ale dostaneme, umocníme-li na n-tou nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro čísla $1, 2, \dots, n$ (součin těchto čísel je $n!$, průměr $\frac{n+1}{2}$).

Nyní už jsme připraveni k vlastnímu řešení rovnice. Je snadno vidět, že levá strana je rostoucí funkce x. Dokážeme-li, že $1995!\,3^{666\cdot 3} > 1995^{1995} > 1995!\,2^{666\cdot 2}$, budeme vědět, že všechna řešení rovnice jsou $\mathbb{N} \setminus \{1,2\}$.

Podle odhadu je $1995!\,3^{666\cdot 3} > 1995!\,3^{1995} > \left(\frac{1995}{3}\right)^{1995} 3^{1995} = 1995^{1995}$. To by byla jedna nerovnost. K důkazu druhé využijeme *Lemma* a odhad.

$$1995!\,2^{666\cdot 2} < \left(\frac{1995+1}{2}\right)^{1995} 2^{1332} < \left(\frac{1995+1}{1995}\right)^{1995} \frac{1}{3}\,1995^{1995} =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{1995}\right)^{1995} \frac{1}{3} 1995^{1995} < 1995^{1995}.$$

Takže všechna řešení jsou $\mathbb{N} \setminus \{1,2\}$.

Ti, co řešení spočítali na počítači, dostali 2 body (příště to bude méně — viz úvodní text). Mnoho řešitelů nepochopilo, že $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \doteq n!$ znamená, že $\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \to 1$ pro $n \to \infty$. Jinak řečeno, pro malá n to neznamená vubec nic. Řešitelé, kteří toto nepochopili a vztah chybně použili, dostali 3 body.

2. úloha Určete poslední trojčíslí (neboli zbytek při dělení tisícem) čísla $11^{11^{11}}$.

Podle binomické věty je

$$11^{11^{11}} = (1+10)^{11^{11}} = \sum_{k=1}^{11^{11}} \binom{11^{11}}{k} 10^k = 1 + 11^{11}10 + \binom{11^{11}}{2}100 + \dots,$$

kde všechny další členy jsou dělitelné tisícem. Potřebujeme zjistit zbytek po dělení čísla 11^{11} stem a zbytek po dělení čísla $\binom{11^{11}}{2}$ deseti. Opět využijeme binomickou větu:

$$11^{11} = (1+10)^{11} = 1 + 11\cdot 10 + \binom{11}{2}100 + \dots \equiv 111 \pmod{100}$$

$$\binom{11^{11}}{2} = 11^{11}\,\frac{11^{11}-1}{2} \equiv 1\cdot 5 = 5 \pmod{10}.$$

Hledané poslení trojčíslí je tudíž stejné jako poslední trojčíslí $1 + 111\cdot 10 + 5\cdot 100 = 1611$, to jest 611.

Asi třetina řešení využívala kongruence a binomickou větu. Tato řešení byla obvykle správně. Nejkrásnější byla řešení *M. Beneše*, *J. Štoly*, originálně úlohu vyřešila *J. Flašková* (vše $5+i$).

Další třetina řešení využívala tabulku posledních trojčíslí. Jen výjimečně byla ale všechna fakta vypozorovaná z tabulky také dokázána (zásadní chyba!), někdy byla tabulka i špatně. Tato skupina obvykle obdržela $-i$ až $-2i$.

Asi čtvrtina řešitelů se snažila vyjádřit vzorcem 1., 2. a 3. cifru od konce. Obvykle však neuspěli (zapomenutí přenosu do vyššího řádu!).

Čtyři řešení (mezi nimi všechna slovenská) využívala Eulerovy věty. Dostala $-i$, neboť důkazy byly zbytečně složité.

Dva řešitelé využili úpravu $11^{11^{11}} = 11^{11.11}$. Trestuhodné, zvlášť, když v zadání 1. série bylo Upozornění, že toto neplatí.

3. úloha Dokažte, že dekadický zápis některé mocniny čísla $A = 1993^{1994^{1995^{1996^{1997}}}}$ končí skupinou A nul a cifrou 1 tj.

$$\dots j\underbrace{00\dots0}_{A \text{ nul}}1,$$

kde j je nenulová číslice.

Lemma: *Je-li $n = 10^k p + 1, 10 \nmid p, k \geq 2$ přirozené číslo končící skupinou právě $k-1$ nul a jedničkou, pak n^{10} končí skupinou právě k nul a jedničkou.*

Důkaz: $n^{10} = (10^k p + 1)^{10} = 1 + 10 \cdot 10^k p + \dots$, kde další členy už jsou dělitelné 10^{2k}, tedy i $10^{k+2} (k > 2)$. Je tudíž

$$n^{10} = 10^{k+1}(p + 10s) + 1 = 10^{k+1} q + 1, \quad 10 \nmid q$$

a tedy n^{10} má na konci svého zápisu o nulu více než n. Indukcí se snadno dokáže, že číslo n^{10^l} má na konci svého zápisu o l nul více než n.

Všimněme si nejprve, že $1993^4 \equiv (-7)^4 = 49^2 = (50-1)^2 = 2500 - 2.50 + 1 \equiv 1 \pmod{100}$. Protože číslo $1994^{1995^{1996^{1997}}}$ je evidentně dělitelné čtyřmi, je $A = (1993^4)^s \equiv 1^s \equiv 1 \pmod{100}$ — číslo A končí alespoň jednou nulou před koncovou jedničkou. Označme n počet těchto nul. Je-li $n > A$, je $A = 10^n c + 1 > 10^n > 10^A$, ale $A < 10^A$ pro všechna přirozená A. Je tedy $n \le A$. Podle lemmatu pak číslo $A^{10^{A-n}}$ končí právě A nulami a jedničkou. Q.E.D.

Řešitelé, kteří využitím Eulerovy věty ukázali, že existuje mocnina A, jež končí skupinou **alespoň** A nul a jedničkou obdrželi $2 + 0i$. Ti, co ukázali totéž jinak, obdrželi body podle toho, jak bylo jejich řešení daleko od cíle. Nejkrásnější řešení měl *Tomáš Bárta.*

4. úloha Definujme posloupnost:

$$r_1 = 2, \qquad r_{i+1} = 2^{r_i}.$$

Dokažte:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \forall k \ge n : \quad r_n \equiv r_k \pmod{1995}.$$

Tvrzení neplatí jen pro 1995, nýbrž pro každé přirozené z na místě základu kongruence. Dokážeme jej matematickou indukcí podle z.

1) Pro $z = 1$ tvrzení evidentně platí, každá dvě celá čísla jsou kongruentní modulo jedna.
2) Nechť je $z > 1$ a pro všechny základy menší než z tvrzení platí. Rozlišíme dva případy:
   (i) Nechť je z sudé. Můžeme ho tedy psát jako $z = 2^q m$, m je liché. Protože $m < z$, platí $\exists n \in \mathbb{N} : \forall k \ge n : m \mid (r_k - r_n)$. Protože každým krokem se v posloupnosti r_n zvětšuje exponent u dvojky, bude určitě $\forall k \ge n + q : z = 2^q m \mid (r_k - r_n)$. Tím je v této části důkaz hotov.
   (ii) Nechť je z liché. Využijeme Eulerovy věty[1], která říká:

$$\forall a, m \in \mathbb{N} : (a, m) = 1 \implies a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

---

[1] $\varphi(m)$ značí počet přirozených čísel menších než m a nesoudělných s m. Je-li $m = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, je

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Důkaz není příliš obtížný, vyzkoušejte si ho za domácí úkol. Použijeme tuto větu pro $a = 2, m = z$. Protože z je liché, je $(2, z) = 1$. Určitě je $\varphi(z) < z$, takže pro základ $\varphi(z)$ dokazované tvrzení platí. To znamená, že od jistého indexu mají všechny členy stejný zbytek po dělení $\varphi(z)$ a tudíž rozdíl po sobě jdoucích členů je násobek $\varphi(z)$. Použitím Eulerovy věty dostaneme

$$r_{n+1} = 2^{r_n} = 2^{r_n - r_{n-1}} 2^{r_{n-1}} = 2^{k\varphi(z)} r_n = \left(2^{\varphi(z)}\right)^k r_n \equiv 1^k \cdot r_n = r_n \pmod z.$$

To znamená, že od indexu o jedna většího, než je ten při němž se začnou opakovat zbytky $\pmod{\varphi(z)}$ se začnou opakovat zbytky $\pmod z$, tedy i pro z tvrzení platí.

Tímto je důkaz matematickou indukcí hotov. Protože právě dokázané tvrzení platí pro všechny přirozené základy, platí tím spíše i pro základ 1995. Uff.

Původně jsme předpokládali, že uhodnete, že tvrzení platí pro všechna n na místě 1995 a dokážete ho indukcí. Takové řešení měl jen Michal Beneš. Ostatní úlohu řešili zkoumáním délky periody v posloupnosti $2^n \pmod m$ pro různá m. Takto např. zjistili, že pro $m = 1995$ je délka periody 36, a tedy k tomu, aby dokazované tvrzení platilo, stačí, aby se od jistého indexu začaly opakovat zbytky (mod 36). Analogicky postupovali dále. Někteří řešitelé si ale zkomplikovali práci tím, že tvrzení nedokazovali (mod 1995), ale (mod 3), (mod 5), (mod 7) a (mod 19). Protože 3, 5, 7 a 19 jsou nesoudělná a $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 = 1995$, plyne odsud tvrzení (mod 1995). To sice vypadá jako dobrý nápad, ale ve skutečnosti to řešení prodlouží.

5. úloha Určete poslední číslici čísla $(3 + \sqrt{7})^{k_{1995}}$ před desetinnou čárkou, kde

$$k_1 = 1995, \qquad k_{i+1} = 1995^{k_i}.$$

K zkoumanému číslu přičteme a odečteme $(3 - \sqrt{7})^{k_{1995}}$. Protože $0 < 3 - \sqrt{7} < 1$, je i přičtený výraz menší než jedna. Poslední číslice zadaného čísla před desetinnou čárkou je tedy o jedna menší než poslední číslice čísla $(3+\sqrt{7})^{k_{1995}} + (3-\sqrt{7})^{k_{1995}}$, což je celé číslo. Sestavíme posloupnost $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ posledních číslic čísel $(3+\sqrt{7})^i + (3-\sqrt{7})^i$. Snadno sestavíme rekurentní vztah pro c_i:

$$c_{n+1} \equiv 6c_n - 2c_{n-1} \pmod{10}, \qquad c_0 = 2,\ c_1 = 6,$$

je totiž

$$(3+\sqrt{7})^{n+1} + (3-\sqrt{7})^{n+1} = \left((3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n\right)\left((3+\sqrt{7}) + (3-\sqrt{7})\right) - \\ - \left((3+\sqrt{7})^{n-1} + (3-\sqrt{7})^{n-1}\right)\left(3+\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right).$$

Spočítáme-li první členy této posloupnosti, zjistíme, že $c_{24} = 2 = c_0, c_{25} = 6 = c_1$, je proto $c_{i+24} = c_i$. Stačí nám proto zjistit k_{1995} mod 24. To je ale už snadné. Stačí si uvědomit, že $1995 \equiv 3 \pmod{24}$, a že $3.9 \equiv 3 \pmod{24}$. Platí tedy

$$1995^{2m+1} \equiv 3^{2m+1} = 3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 9 \equiv 3 \pmod{24}.$$

Čísla k_i jsou jistě lichá, je tedy $k_{1995} \equiv 3 \pmod{24}$, a proto $c_{k_{1995}} = c_3 = 0$. Poslední číslice před desetinnou čárkou je tudíž ve zkoumaném čísle $0 - 1 \bmod 10 = 9$.