7. série

Téma: Všehochuť

Termín odeslání: 2. KVĚTNA 1995

1. ÚLOHA

Řekneme, že konečná množina M bodů roviny je rozptýlená, jestliže platí: jsou-li x, y dva různé body z M, pak mají vzdálenost aspoň 1.

(a) Nalezněte co největší $c > 0$, ke kterému existuje $d > 0$ tak, že pro každé $r > 0$ existuje rozptýlená množina ležící v kruhu o poloměru r, která má aspoň $c(r-d)^2$ prvků.

(b) Nalezněte co nejmenší konstantu $C > 0$, ke které existuje $D > 0$ tak, že platí: kdykoli je M rozptýlená množina ležící v kruhu o poloměru r, potom má M nejvýše $C(r+D)^2$ prvků.

Poznámka: Nemusíte nalézt nejlepší možné hodnoty c a C. Podstatný je důkaz, že hodnoty c, C opravdu splňují podmínky zadání. Na druhou stranu, čím lepší konstanty, tím více bodů.

2. ÚLOHA

V trojúhelníku ABC zvolíme na straně AB, BC resp. CA bod D, E resp. F. Pro jakou volbu bodů je $|DE| + |EF| + |FD|$ nejmenší?

3. ÚLOHA

Mějme graf G o n vrcholech, splňující následující podmínku: ke každým dvěma vrcholům a, b existují c a d tak, že dvojice ac, ad, bc a bd jsou spojeny hranou. Dokažte, že vrcholy G lze očíslovat $a_1, \dots, a_n$ tak, že dvojice $a_1a_2, \dots, a_{n-1}a_n$, a_na_1 jsou spojeny hranou.

4. ÚLOHA

Lagrangeova věta praví, že každé přirozené číslo lze napsat jako součet čtverců čtyř *nezáporných* celých čísel. Dokažte, že pokud lze n^2 napsat jako součet k *kladných* celých čísel pro $k = 2, 3, 4$, pak to lze pro všechna k splňující $1 \le k \le n^2 - 14$. Dokažte, že pro $k = n^2 - 13$ už to nejde.

5. ÚLOHA

Označme $\mathcal{P}$ množinu všech polynomů s reálnými koeficienty (včetně nulového) a pro $p, q \in \mathcal{P}$ definujme přirozeným způsobem pq a $p+q$. Pro $p \in \mathcal{P}$ označme $p\mathcal{P} := \{pq : q \in \mathcal{P}\}$, nazvěme ji *ideálem* generovaným p. Dokažte: množina $A \subseteq \mathcal{P}$ splňuje podmínky

(i) $p, q \in A \implies p + q \in A$
(ii) $p \in A \implies p\mathcal{P} \subseteq A$

právě tehdy, když existuje $r \in \mathcal{P}$ tak, že $A = r\mathcal{P}$. Jinými slovy, tvrzení první úlohy šesté série platí i v této situaci.